МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Основи теорії прийняття рішень»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Технічне обслуговування та ремонт
повітряних суден і авіадвигунів

за темою − Прийняття рішень в умовах конфлікту

Харків 2021

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від _23.09.2021__ № _8_

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від _22.09.2021__ № _2_

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від _22.09.2021__ № _8_

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від _10.09.2021__ № _2_

Розробники: викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст першої категорії Подгорних Н.В.

Рецензенти:
1. Завідувач відділення фахової підготовки навчального відділу КЛК ХНУВС, старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С. І.
2. Завідувач кафедри інформатика і вищої математики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, д. т. н., професор Ляшенко В. П.

План лекції

1. Базові поняття та означення теорії ігор.
2. Матрична гра в чистих стратегіях.
3. Змішані стратегії.

Рекомендована література:

Рекомендована література:

Основна

1. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень. – Київ: Освіта України, 2018. – 246 с.
2. Теорія прийняття рішень [текст] підручник. / За заг. ред. Бутка М. П. [М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко та ін.] – К. : «Центр учбової літератури», 2015. – 360 с.
3. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник / А. І. Орлов М .: Видавництво «Март», 2004. - 656 с.
4. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2- ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. - 336 с.
5. Ус С.А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 300 с.
6. О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик. Основи теорії прийняття рішень. – К., 2014. – 94с.
7. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень : Підручник. – К.: АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.]

Додаткова

8. Орлів М. С. Підготовка і прийняття управлінських рішень : навч.-метод. матеріали / М. С. Орлів ; упоряд. Г. І. Бондаренко. – К. : НАДУ, 2013. – 40 с.
9. Клименко С.М., Дуброва О.С. Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2006. — 188 с.
10. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі: навч. посібник / В.В. Вітлінський, П.І.Верченко, Сігал А.В., Наконечний Я.С.; за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.:КНЕУ, 2002. – 446с.

Текст лекції

1. Базові поняття та означення теорії ігор.

Конфліктною називають ситуацію, коли не збігаються інтереси двох або більше сторін.

Конфлікт може бути:

- антагоністичним, коли виграш однієї сторони досягають завдяки програшу протилежної;

• неантагоністичним, коли інтереси сторін не є ні строго протилежними, ні повністю співпадаючими, наприклад, конфлікт студента та викладача на екзамені.

Розумно вирішувати конфліктні ситуації та не вибирати крайні форми поведінки, якщо це можливо. Для цього потрібно вміти формально описувати конфлікт (побудувати модель) і провести її аналіз.

На описовому рівні конфлікти є предметом вивчення науки конфліктології, яка досліджує закономірності виникнення, розвитку, вирішення і завершення конфліктів будь-якого рівня.

Так, наприклад, встановлено, що всі види вирішення конфліктів між людьми зводяться до 5 способів і визначаються 4 видами дій учасників, що відображено на сітці Томаса-Кілмана (рис. 1).

Рис. 1. Стилі поведінки людини в конфліктних ситуаціях

Конфронтація виникає, коли:

- результат вирішення конфлікту дуже важливий;
- критична ситуація;
- немає іншого вибору;
- є влада і авторитет.

Ухилення виникає, коли:

- результат не дуже важливий;
- відчуття можливості вирішити конфлікт на свою користь;
- складність самої ситуації;
- необхідно виграти час;
- немає достатніх ресурсів (влади).

Співпраця можлива, коли:

- сторони взаємозалежні;
- рівність влади над ситуацією (відсутність лідера) ;
- є можливість узгодити свої інтереси з інтересами іншої сторони.

***Пристосування* можливе**, коли:

- конфлікт не дуже хвилює;
- бажання зберегти мир;
- розуміння своєї неправоти;
- мало шансів на перемогу;
- розуміння проблем іншої сторони.

Компроміс можливий, коли:

- сторони бажають швидко вирішити конфлікт;
- сторони прагнуть отримати хоча б щось можливе з ситуації;
- інші підходи вирішення конфлікту неефективні.

Таким чином, конфліктологія дає змогу, на змістовному рівні, класифікувати конфліктні ситуації, визначити взаємозв'язок дій (стратегій) сторін з мотивацією цих дій та зв'язати потенційно можливий результат вирішення конфлікту з обраною стратегією поведінки.

На відміну від конфліктології, теорія ігор – це математична дисципліна, яка вивчає формальні аспекти конфлікту, а саме:

- математичні моделі конфліктних ситуацій;
- методи аналізу моделей конфліктних ситуацій;
- формальні стратегії оптимальної поведінки в умовах конфлікту.

Розглянемо спочатку особливості так званої гри в нормальній (стратегічній) формі.

Нехай

$$A = \{A_i\},\ i = 1,\dots,N$$

– перелік гравців, які беруть участь у грі,

$$S_i = \{s_{ij}\}$$

– множина *стратегій* поведінки i -го гравця у j -й ситуації,

$$u = u(s_{ij})$$

– профіль платежів (втрат або виграшів) для кожної стратегії s_{ij} .

Складність планування такої гри полягає у тому, що виграш кожного гравця залежить не тільки від його стратегії, а й від вибору стратегій інших гравців.

Гра в нормальній формі передбачає, що:

- гравці стратегічно незалежні;
- можуть обирати довільні стратегії;
- стратегії пов'язані між собою через корисність вибору, яка призводить до того чи іншого виграшу.

Для математичного аналізу гри мають бути сформульовані її *правила*, які визначають:

- систему можливих ходів кожної зі сторін;
- об'єм інформації щодо ходів протилежних сторін;
- послідовність чергування ходів;
- результат гри, до якого призводить послідовність ходів.

Результат (виграш або програш) гри не завжди має кількісний вираз. Але зазвичай можна встановити деяку шкалу вимірювання і визначати результат гри числом, наприклад, «+1» позначає виграш, «–1» позначає програш, а «0» позначає нічийний результат гри.

Найпростіша гра – парна гра *з нульовою сумою*, у якій приймає участь лише два гравці A та B , причому виграш (програш) A дорівнює програшу (виграшу) B .

Для зручності, гру з нульовою сумою можна розглядати зі сторони тільки одного гравця, наприклад, гравця *A*, ототожнюючи його з «нашою» стороною, яка прагне виграти, а гравця *B* ототожнювати з супротивником.

Особистий хід – це усвідомлений вибір (здійснення гравцем однієї з можливих дій, передбачених правилами гри).

Випадковий хід – це вибір можливих дій, передбачених правилами гри, які здійснюються не гравцем, а механізмом випадкового вибору, наприклад, киданням монети або гральної кістки.

Гра математично визначена, якщо для кожного випадкового ходу вказаний розподіл імовірності можливих результатів.

Гра з повною інформацією – це гра, в якій кожен гравець перед особистим ходом знає результати всіх попередніх ходів, як особистих, так і випадкових. Зауважимо, що ігри, які мають практичне значення, часто не володіють повною інформацією, так як у конфліктних ситуаціях невідомі ходи супротивника.

Стратегія гравця – це сукупність правил, які визнають однозначний вибір особистого ходу в кожній конкретній ситуації. Щоб поняття стратегії мало сенс, гра повинна включати особисті ходи гравців, тобто гра тільки з випадковими ходами не має стратегії.

Залежно від числа можливих стратегій, ігри розділяються на скінчені, коли у кожного гравця існує скінчене число стратегій, та нескінчені. Скінчена гра, в якій гравець *A* має m стратегій $A_1, ..., A_m$, а гравець *B* має n стратегій $B_1, ..., B_n$, зветься $m \times n$ матричною грою.

Позначимо через aij виграш для стратегій Ai і Bj, та будемо вважати, що числа aij відомі та записані в клітинках платіжної матриці (табл.1).

Таблиця 1. **Платіжна матриця $m \times n$ гри**

Наші рішення	**Рішення супротивника**			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. Гравці *A* і *B* , не дивлячись на рішення один одного, кладуть на стіл монети сторонами Герб і Цифра. Правило гри таке:

- *A* виграє, якщо сторони монет однакові,
- *B* виграє (*A* програє), якщо сторони монет різні. Складемо платіжну матрицю (табл. 2).

Таблиця 2. **Платіжна матриця гри для гравців *A* та *B***

Рішення гравця *A*	**Рішення гравця *B***	
	B_1 (Герб)	B_2 (Цифра)
A_1 (Герб)	1	–1
A_2 (Цифра)	–1	1

Проведемо аналіз гри:

1. Для одноразової гри розумних стратегій немає (шанси виграти гравців однакові).

2. Для багаторазової гри вже є шанс виграти.

3. Безглуздо застосовувати одну й ту ж стратегію, наприклад $A1$, тому що за кількома ходами супротивник її легко «визначить».

4. Нерозумно чітко чергувати стратегії, тому що про таку «стратегію» гри теж легко здогадатися.

5. Шанс виграти підвищується, якщо застосовувати *змішану стратегію*, коли чисті стратегії $A1$ і $A2$ чергуються випадковим чином.

$$A1\ A2\ A2\ A1\ A1\ A2\ A1\ A2\ A2\ A2\ A2\ A1\ldots$$

Приклад 2. Кожен з гравців *A* і *B*, не дивлячись на рішення один одного, обирає одне з трьох цілих чисел – **1**, **2** або **3**. Правило гри таке:

- *A* виграє, якщо сума чисел парна, і він отримає цю суму,
- *B* виграє, якщо сума чисел непарна, і *A* програє цю суму.

Складемо платіжну матрицю гри (табл. 3).

Таблиця 3. **Платіжна матриця гри**

Рішення гравця *A*	**Рішення гравця *B***		
	B_1 (число 1)	B_2 (число 2)	B_3 (число 3)
A_1 (число 1)	2	–3	4
A_2 (число 2)	–3	4	–5
A_3 (число 3)	4	–5	6

Аналіз гри показує, що:

1. На будь-яку стратегію, обрану *A*, його супротивник *B* може відповісти найкращим для нього чином:
   - на хід $A1$ відповісти ходом $B2$;
   - на хід $A2$ відповісти ходом $B3$;
   - на хід $A3$ відповісти ходом $B2$.
2. Якщо *B* знає, який хід зробив *A*, то *B* неодмінно виграє.
3. Сукупність оптимальних (найбільш вигідних) стратегій обох гравців (коли вони не знають про хід один одного) зводиться до застосування змішаної стратегії, яка буде розглянута далі.

2. Матрична гра в чистих стратегіях.

Означення 1. Оптимальною будемо називати стратегію, яка з багаторазовими повторами забезпечить даному гравцю максимально можливий середній виграш або мінімально можливий середній програш.

При побудові оптимальної стратегії гравець вважає, що його супротивник теж розумний і робить все, щоб завадити нашому виграшу. У даному випадку не враховуються елементи ризику та можливі помилки кожного з гравців. Рішення гри (виграш або програш) зводиться до одного числа – ціни гри.

Якщо гравець А обирає стратегію A_i , він повинен передбачити, що гравець В теж розумний і прийме стратегію B_j , при якій наш виграш a_{ij} буде мінімальним. Тобто маємо передбачити, що на кожне рішення A_i супротивник B прийме рішення (табл.4)

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} .$$

Таблиця 4. **Визначення стратегії гравця *A* за платіжною матрицею**

Наші рішення	**Рішення супротивника**				$\alpha_i = \min_j a_{ij}$.
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m

Розраховуючи на розумного супротивника і діючи найбільш обережно ми маємо вибрати ту зі стратегій, для якої число α_i буде максимальним, тобто

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Величина α зветься нижньою ціною гри (максміном). Дотримуючись максмінної стратегії нам гарантований виграш не менше, ніж нижня ціна гри для будь-якої поведінки супротивника, хід якого заздалегідь не знаємо.

Для обчислення нижньої ціни гри α) достатньо знайти максимальний елемент у правому стовпчику табл. 4.

Розглянемо тепер, які рішення має приймати гравець B (наш супротивник), щоб мінімізувати свій програш.

Якщо гравець B обирає стратегію B_j , то він міркує так: розумний гравець A прийме таку стратегію A_i, щоб число a_{ij} було максимальним, тобто відповідало максимальному виграшу A і максимальному програшу B. Звідси випливає, що гравець B передбачає, що на кожне його рішення B_j гравець A приймає рішення

$$\beta_j = \max_i a_{ij} .$$

Розраховуючи на розумного противника і діючи найбільш обережно гравець B має вибрати ту зі своїх стратегій, для якої число β_j буде мінімальним, тобто

$$\beta = \min \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Величина β зветься верхньою ціною гри або мінімаксом. Дотримуючись мінімаксної стратегії гравець B (наш супротивник) гарантує, що його програш не перевищить число β (верхню ціну гри) для будь-яких наших дій, про які він може не знати. Для обчислення верхньої ціни гри β достатньо знайти мінімальний елемент у нижньому рядку табл. 5.

Таблиця 5. **Визначення стратегії гравця *B* за платіжною матрицею**

Наші рішення	Рішення супротивника			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
$\beta_i = \max\limits_i a_{ij}$	β_1	β_2	...	β_n

У табл. 6 подано приклад розрахунку нижньої α та верхньої β цін гри для конкретної платіжної матриці. В даному випадку нижня ціна гри дорівнює $\alpha = 2$, що відповідає рішенню A1 гравця A, а верхня ціна гри дорівнює $\beta = 4$, що відповідає рішенню B4 гравця B.

Таблиця 6. **Визначення нижньої та верхньої цін гри**

Наші рішення	Рішення супротивника				$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	2	3	**2**
A_2	8	1	9	–4	–4
A_3	–6	3	5	4	–6
$\beta_i = \max\limits_i a_{ij}$	8	7	9	**4**	

Таким чином, основний принцип розглянутих стратегій – обережна гра в розрахунку на розумну поведінку протилежної сторони, яка гравцям гарантує виграш і програш у межах цін гри α та β. Зауважимо, що для будь-яких чисел a_{ij} нижня ціна гри не перевищує верхню ціну гри, тобто справедливе співвідношення: $\beta \geq \alpha$.

Згідно з умовою (7.4) в матричній грі можливі дві ситуації:

- нижня ціна гри строго менше верхньої: $\alpha < \beta$
- нижня та верхня ціни гри співпадають: $\alpha = \beta$

Умова $\alpha = \beta$ означає, що матрична гра має *сідлову точку*. Нагадаємо, що в математиці сідлова точка – це стаціонарна (критична) точка з області визначення функції, у якій всі частинні похідні дорівнюють нулю, але ця точка не є локальним екстремумом.

Для функції $H\ (i,\ j)$ двох змінних $i,\ j$, яка має сідлову точку $i^0,\ j^0$, справедлива умова

$$H\ (i^0, j) < H\ (i, j) < H\ (i, j^0\ )\ \forall i \neq i^0\ , \forall j \neq j^0\ .$$

Графік такої неперервної функції $H\ (i,\ j)$ нагадує сідло: поверхня $H\ (i,\ j)$ опукла в одному напрямку та увігнута в іншому (рис. 2).

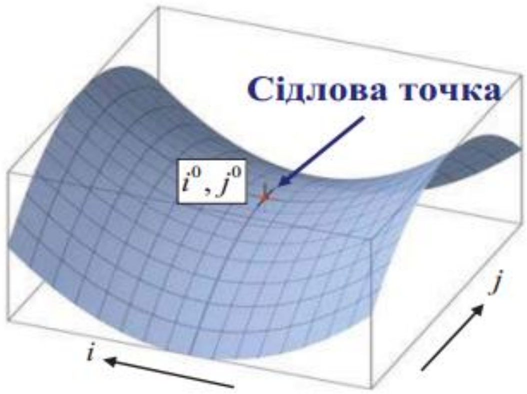

Рис. 2. Графік функції H (i, j) з сідловою точкою i^0, j^0

Якщо матриця гри має сідлову точку, то відхилення від стратегії в цій точці будь-яким з гравців погіршує його результат. Тобто оптимальне рішення *для обох гравців* – стратегія гри в сідловій точці. В такому випадку значення $\alpha = \beta$ називається *чистою ціною гри*.

Теорема 1. Якщо (i_1, j_1) та (i_2, j_2) – дві сідлові точки, то існують «симетричні» сідлові точки (i_1, j_2) та (i_2, j_1), причому виграші (програші) гравців у всіх сідлових точках однакові : (i_1, j_1) = (i_2, j_2) = (i_1, j_2) т= (i_2, j_1).

Таким чином можна зробити такі загальні висновки:

1. Якщо в матричній грі є сідлова точка, то оптимальні стратегії обох гравців однакові – стратегії у сідловій точці, а ціна гри відома і дорівнює чистий ціні гри $\alpha = \beta$.

2. Якщо за наявністю сідлової точки один з гравців буде притримуватись оптимальної стратегії, а другий гравець, у надії підвищити свій виграш, буде відхилятися від неї, то він може тільки втратити, але не збільшити свій виграш.

3. Матриця гри може містити кілька сідлових точок.

4. Виграші у всіх сідлових точках однакові.

5. Якщо дві сідлові точки лежать у різних рядках і стовпчиках, то знайдуться ще дві «симетричні» сідлові точки.

6. Не у всіх платіжних матрицях є сідлова точка.

7. Гру з сідловою точкою рідко зустрічають на практиці: найчастіше нижня і верхня ціни гри різняться, тобто $\alpha < \beta$.

8. У випадку відсутності сідлової точки для підвищення шансів середнього виграшу ходи гравців повинні включати не тільки чисті стратегії, що ґрунтуються на мінмаксі та максміні, але й випадкові ходи, тобто доцільно будувати змішані стратегії.

3. Змішані стратегії.

При розв'язанні задач виникає питання: як обирати стратегії, щоб для багаторазової гри наш середній виграш $\nu_{\text{ср}}$ перевищував нижню ціну, тобто щоб $\nu_{\text{ср}} > \alpha$.

Покажемо, що для цього слід застосовувати *змішані стратегії* – тобто чергувати чисті стратегії A_i , i = 1,..., m. з певним співвідношенням частот p_i (табл. 8).

***Таблиця 8.* Розподіл частот чистих стратегій**

Чисті стратегії	A_1	A_2	…	A_m
Частоти	p_1	p_2	…	p_m

Зауважимо, що чисту стратегію можна вважати особливим випадком змішаної стратегії, коли таку стратегію застосовувати з частотою одиниці, а інші – з нульовою частотою.

Означення 2. Змішаною стратегію називають імовірнісний розподіл, який задано на множині чистих стратегій, а саме:

$$p = (p_1,..., p_m) \in P_m = \left\{ p \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \right\} \text{ для гравця } A,$$

$$q = (q_1,..., q_n) \in Q_n = \left\{ q \mid \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0 \right\} \text{ для гравця } B.$$

Означення 3. Чисту стратегію називають активною (корисною), якщо її використовують у деякій оптимальній змішаній стратегії з ненульовою імовірністю.

Означення 4. Платіжною функцією називають математичне сподівання виграшу гравця А для багаторазового використання змішаних стратегій p та q

$$E(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Таким чином, мета гравця А – збільшення платіжної функції, а мета гравця В – протилежна, тобто зменшення платіжної функції *E(p,q)*.

Оскільки цілі гравців протилежні, то, за аналогією з використанням чистих стратегій, вводиться визначення нижньої ціни гри

$$\alpha = \max_{p \in P_m} \min_{q \in Q_n} E(p,q)$$

та верхньої ціни гри

$$\beta = \min_{q \in Q_n} \max_{p \in P_m} E(p,q).$$

У 1928 році математик Джон фон Нейман довів таку основну теорему матричних ігор.

Теорема 2. У будь-якій матричній грі двох гравців з нульовою сумою існує принаймні одна оптимальна пара змішаних стратегій $p^* \in P_m$ та $q^* \in Q_n$, при яких виконуються умову рівноваги

$$\max_{p \in P_m} \min_{q \in Q_n} E(p,q) = \min_{q \in Q_n} \max_{p \in P_m} E(p,q) = \nu ,$$

де $\nu = E(p^*, q^*)$ – чиста ціна гри.

Якщо гравці дотримуються оптимальних змішаних стратегій p^*, q^*, то

$$E(p,q^*) \le E(p^*,q^*) \le E(p^*,q) \ \forall p \in P_m, \ \forall q \in Q_n.$$

Перш ніж визначити умову рівноваги розглянемо методи спрощення платіжної матриці. Враховуючи те, що платіжна матриця визначає виграші гравця A та програші гравця B, введемо такі означення.

Означення 5. Рядок i_1 платіжної матриці *домінує* над рядком i_2, якщо $a_{i_1 j} \ge a_{i_2 j}, \ \forall j = 1,\ldots,n$

Зрозуміло, що в цьому випадку стратегія гравця A, що відповідає рядку i_1 заздалегідь краща стратегії, що відповідає рядку i_2 (забезпечує більший виграш), і друга стратегія може бути видалена з платіжної матриці. Аналогічно визначають домінування стовпчиків.

Означення 6. Стовпчик j_1 платіжної матриці *домінує* за стовпчик j_2 , якщо $a_{ij_1} \le a_{ij_2}, \ \forall i = 1,\ldots,m$.

Також платіжні матриці можуть бути спрощені, якщо з них видалити

- один зі співпадаючих рядків;
- один зі співпадаючих стовпчиків.

Приклад 3. Спростимо платіжну матрицю (табл. 9).

***Таблиця 9.* Початкова платіжна матриця**

Чисті стратегії гравця ***A***	**Чисті стратегії гравця** ***B***			
	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$	1	2	4	3
$A2$	0	2	3	2
$A3$	1	2	4	3
$A4$	4	3	1	0

Порядок спрощення:

Крок 1. Видаляємо рядок 2, та 3.

Крок 2. Видаляємо стовпчик 3.

Спрощена таблиця приймає остаточний вигляд (табл. 10).

***Таблиця 10.* Кінцева таблиця після спрощення за кроками 1 та 2**

Чисті стратегії гравця ***A***	**Чисті стратегії гравця** ***B***		
	$B1$	$B2$	$B4$
$A1$	1	2	3
$A4$	4	3	0

Таким чином, тепер можна аналізувати не початкову платіжну матрицю 4×4, а спрощену матрицю 2×3, що спрощує задачу.

Розглянемо порядок розв’язування матричної гри 2×2 в змішаних стратегіях. Припустимо, що платіжна матриця гри (табл. 11) не має сідлової точки, тобто нижня ціна гри менше верхньої.

Таблиця 11. **Платіжна матриця гри** 2×2

Стратегії гравця A	**Стратегії гравця** B	
	$B1$	$B2$
$A1$	a_{11}	a_{12}
$A2$	a_{21}	a_{22}

Необхідно знайти оптимальну стратегію гравця A

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

яка для будь-яких дій супротивника забезпечує гравцю А максимальний середній виграш, що дорівнює ціні гри (табл. 12).

Таблиця 12. **Оптимальна стратегія гравця** A

Оптимальна стратегія гравця A	**Чисті стратегії гравця** B	
	$B1$	$B2$
A_1 з частотою p_1	a_{11}	a_{12}
A_2 з частотою p_2	a_{21}	a_{22}

За означенням, стратегія гравця A буде оптимальною, якщо незалежно від ходу супротивника середній виграш A дорівнює ціні гри ν, тобто

$$\left.\begin{array}{lll} \text{якщо} & B_1 \Rightarrow & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu \\ \text{якщо} & B_2 \Rightarrow & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu \end{array}\right\}.$$

Оскільки $p_1+p_2=1$, то з системи рівнянь випливає:

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1-p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1-p_1).$$

Тобто

$$p_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \quad p_2 = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

Це дає змогу визначити ціну гри:

$$\nu = a_{11}\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} + a_{21}\left(1-\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\right).$$

Або

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

Для відомої ціни гри ν, легко можна визначити і оптимальну стратегію супротивника (гравця B).

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

Для цього достатньо одного рівняння, наприклад,

$$a_{11}q_1 + a_{12}(1-q_1) = \nu .$$

У результаті остаточно маємо

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} .$$

Приклад 4. Покажемо на прикладі конкретної платіжної матриці (табл. 13), що змішана стратегія дійсно може забезпечити рішення гри з ціною ν, яка перевищує нижню ціну гри, тобто $\upsilon > \alpha$.

Таблиця 13. **Платіжна матриця гри з ціною** ν

Чисті стратегії гравця A	**Чисті стратегії гравця** B	
	B_1	B_2
A_1	3	5
A_2	6	1,5

Згідно з даними табл. 13 нижня ціна гри дорівнює

$$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = 3 ,$$

а верхня ціна гри дорівнює

$$\beta = \min_{i} \max_{j} = 5.$$

Оскільки немає сідлової точки, то будемо шукати оптимальний розв'язок у змішаних стратегіях.
Знайдемо p_1 та p_2:

$$p_1 = \frac{\frac{3}{2} - 6}{3 + \frac{3}{2} - 5 - 6} = \frac{9}{13} .$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13} .$$

Звідси ціна гри дорівнює

$$\nu = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = 3 \cdot \frac{9}{13} + 6 \cdot \frac{4}{13} = \frac{51}{13} \approx 3{,}923 > 3 .$$

Маємо:

$$q_1 = \frac{\frac{3}{2} - 5}{3 + \frac{3}{2} - 5 - 6} = \frac{7}{13} .$$

$$q_2 = 1 - q_1 = \frac{6}{13} .$$

Таким чином, оптимальний розв'язок гри в змішаних стратегіях буде таким:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix},$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}.$$

Для багаторазового використання оптимальні змішані стратегії забезпечать максимальний виграш гравцю A та мінімальний програш гравцю B. Зауважимо, що ціна гри $\upsilon \approx 3{,}923$ дійсно перевищує нижню ціну гри $\alpha=3$.

Контрольні питання:

1. Наведіть базові поняття та означення теорії ігор.

2. Наведіть алгоритм визначення нижньої та верхньої ціни ігри.

3. Яке оптимальне рішення гравців у грі з сідловою точкою?

4. В чому полягає особливість розв’язування матричної гри в змішаних стратегіях.