**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ**
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ**
**КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

# ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
**Аеронавігація**

**за темою -** Система збіжних сил (СЗС)

**Харків 2022**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 № 8

**СХВАЛЕНО**
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 № 1

**ПОГОДЖЕНО**
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 10.08.2022 № 1

**Розробник:** доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.т.н., доцент, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Долударєва Я.С.

**Рецензенти:**
1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.
2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

**План лекції:**

1. Збіжні сил.
2. Силовий багатокутник.
3. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил (СЗС).
4. Аналітична умова рівноваги системи збіжних сил (СЗС).

**Рекомендована література:**

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишинв та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матералів Підручкик/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зіньковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

## Текст лекції
## 1. Збіжні сили.

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **системою збіжних сил**.

Якщо ми перенесемо усі сили даної системи по лініях їх дії у спільну точку перетину цих ліній, то, згідно з першим висновком з аксіом статики, дія системи на абсолютно тверде тіло не зміниться. Таким чином будь – яку систему збіжних сил можна замінити еквівалентною системою сил, прикладених в одній точці.

Задача про складання двох сил, прикладених в одній точці, графічно вирішується дуже просто. Припустимо, що у точці А твердого тіла прикладені дві сили $\overline{F}_1$ *і* $\overline{F}_2$ (рис. 1,а). Згідно з третьою аксіомою статики (правила паралелограма сил) рівнодіюча $\overline{F}_{рівн}$ даних сил прикладена у тій же точці А і зображується по модулю і напрямку діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

Щоб знайти рівнодіючу немає необхідності будувати увесь паралелограм ABCD, достатньо побудувати тільки один з трикутників ABC або ADC. Для побудови одного з них (наприклад, ABC, рис. 1,б) з кінця вектора однієї сили $\overline{F}_1$ проводимо вектор $\overline{BC} = \overline{F}_2$. Замикаюча сторона АС трикутника АВС зображує по модулю і напрямку рівнодіючу двох даних збіжних сил. Залишається лише у прийнятому масштабі виміряти її довжину і величини кутів $\varphi_1$ і $\varphi_2$. Трикутник АВС (або ADC) називається силовим трикутником, а даний спосіб складання двох сил – правилом трикутника.

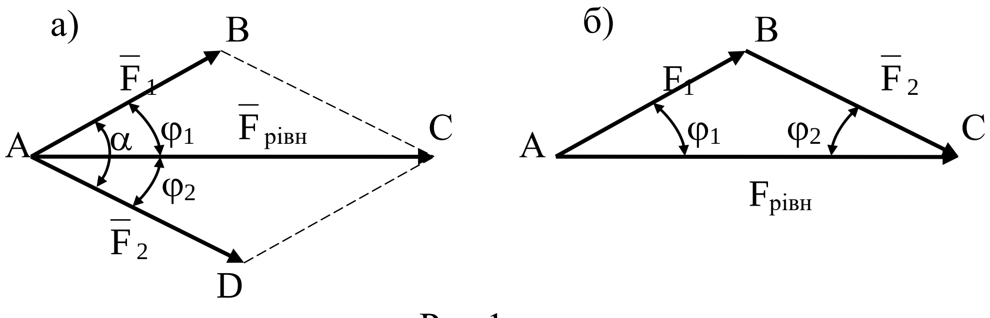


Рис 1

Рівнодіючу двох сил, прикладених до однієї точки, неважко знайти розрахунками. Для цього будуємо той же силовий трикутник АВС (або ADC), але не гонячись за точністю побудови, тому що тепер він буде служити лише для ілюстрації рішення. Позначимо кут між даними силами $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ через $\alpha$, а кути, які рівнодіюча утворює з цими силами, - відповідно через $\varphi_1$ і $\varphi_2$ (рис. 1). Сторони трикутника АВС являють собою, у відомому масштабі, числові значення (модулі) сил, а тому, згідно з відомою з тригонометрії теоремою косинусів, будемо мати

$$F_{рівн}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 Cos\ A\hat{B}C\ .$$

Крім того, $A\hat{B}C = 180^\circ - \alpha$ і $Cos\ A\hat{B}C = Cos\ (180^\circ - \alpha) = -Cos\alpha$ , отже модуль рівнодіючої двох збіжних сил

$$F_{рівн} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2Cos\alpha} \qquad (1)$$

Перед коренем завжди беремо знак плюс, тому що модуль вектора числа додатній.

Визначимо тепер напрям рівнодіючої.

За теоремою синусів з того ж трикутника будемо мати

$$\frac{AB}{\sin\ B\hat{C}A} = \frac{BC}{\sin\ B\hat{A}C} = \frac{AC}{\sin\ A\hat{B}C},$$

але $B\hat{C}A = C\hat{A}D = \varphi_2$, $B\hat{A}C = \varphi_1$, $A\hat{B}C = 180^\circ - \alpha$ і $\sin\ (180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ .

Сторони ж трикутника пропорційні модулям сил. Отже, теорема синусів для даного силового трикутника дає таку залежність:

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{F_{рівн}}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

Формула (2) дозволяє знайти синуси кутів між рівнодіючою і складовими силами, а відповідно і самі ці кути.

## 2. Силовий багатокутник

Хай, наприклад, потрібно скласти чотири збіжні сили $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\ i\ \bar{F}_4\}$ . Зобразимо ці сили у будь – якому довільному масштабі векторами, прикладеними у точці А перетину їх ліній дії (рис. 2, а).

Будемо складати сили послідовно, користуючись вже встановленим нами для складання двох збіжних сил правилом силового трикутника.

Спочатку складемо за цим правилом будь – які дві з даних сил, наприклад сили $\bar{F}_1$ і $\bar{F}_2$, для цього з кінця сили $\bar{F}_1$ проведемо вектор $\overline{BC} = \bar{F}_2$. Рівнодіюча $\bar{F}_{12}$ сил $\bar{F}_1$ і $\bar{F}_2$ зобразиться у вибраному масштабі замикаючою стороною трикутника, тобто вектором $\overline{AC}$ . Складемо тепер за тим же правилом сили, $\bar{F}_{12}$ і $\bar{F}_3$, для чого з точки С проводимо вектор $\overline{CD} = \bar{F}_3$ і з′єднуємо точки А і D. Вектор $\overline{AD} = \bar{F}_{123}$ являє собою рівнодіючу сил $\bar{F}_{12}$ (що у свою чергу є рівнодіючою сил $\bar{F}_1$, і $\bar{F}_2$) і $\bar{F}_3$, тобто замінює собою дію вже трьох сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ і $\bar{F}_3$.

Продовжуючи складання далі, складемо сили $\bar{F}_{123}$ і $\bar{F}_4$. Проведемо з точки D вектор $\overline{DE} = \bar{F}_4$ і з′єднаємо прямою точки А і Е. Вектор $\overline{AE} = \bar{F}_{рівн}$ , зображуючий рівнодіючу сил $\bar{F}_{123}$ і $\bar{F}_4$, водночас служить і рівнодіючою усієї системи сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4\}$.

Виконану вище роботу можна записати так:

$$\left\{\overline{F}_1,\overline{F}_2,\overline{F}_3,\overline{F}_4\right\}\sim\left\{\overline{F}_{12},\overline{F}_3,\overline{F}_4\right\}\sim\left\{\overline{F}_{123},\overline{F}_4\right\}\sim\overline{F}_{рівн}.$$

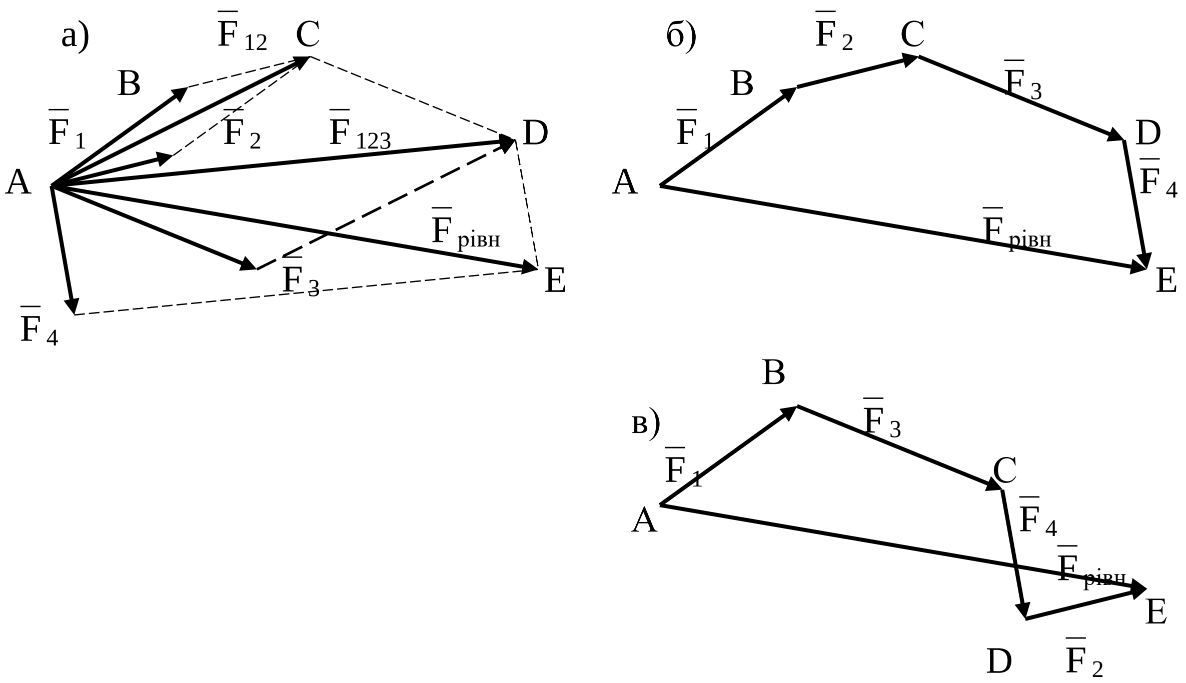


Рис. 2

Процес побудови рівнодіючої плоскої системи збіжних сил зручніше вести дещо іншим шляхом. Виберемо у площині дії системи сил довільну точку А (рис. 2, б) і відкладемо від неї вектор $\overline{AB}$, рівний у прийнятому масштабі силі $\overline{F}_1$; з кінця його (точка В) проводимо вектор $\overline{BC}=\overline{F}_2$; з кінця цього вектора (точка С) проводимо вектор $\overline{CD}=\overline{F}_3$; і т.д. розміщуючи кожний раз початок наступного вектора у кінці попереднього, доки не вичерпаємо всі сили.

Одержаний багатокутник ABCDE, сторони якого у вибраному масштабі рівні даним силам і однаково з ними спрямовані, називається силовим багатокутником.

Замикаюча сторона $\overline{AE}$ силового багатокутника, спрямована від початку першої сили до кінця останньої сили, зображає у вибраному масштабі рівнодіючу даної системи збіжних сил як по модулю, так і за напрямом. Це очевидно з ходу побудови і з порівняння рис..2, а і б.

Для того щоб визначити лінію дії рівнодіючої, достатньо провести через спільну точку ліній дії збіжних сил пряму, паралельну замикаючій стороні силового багатокутника.

Одержане правило складання збіжних сил способом багатокутника є загальним для складання будь – яких векторів і називається правилом геометричного складання. Воно справедливе при будь – якій кількості векторів (у даному випадку при будь – якій кількості збіжних сил).

У вигляді формули геометричне складання сил записується так:

$$\overline{F}_{гол} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{i}^{i=n} \overline{F}_i \,.$$

Геометрична сума всіх сил даної системи називається головним вектором цієї системи.

З метою спрощення запису межі зміни індекса іноді відкидають, маючи завжди на увазі під $\sum$ суму n складових, причому i=1,2,3,…,n, тобто, наприклад, записують, що

$$\overline{F}_{гол} = \sum \overline{F}_i \,. \qquad (3)$$

Із встановленого вище правила находження рівнодіючої способом силового багатокутника витікає, що рівнодіюча $\overline{F}_{рівн}$ системи збіжних сил дорівнює їх головному вектору $\overline{F}_{гол}$. Лінія дії цієї рівнодіючої проходить через спільну точку перетину ліній дії складових сил.

Поняття головного вектора даної системи сил (тобто геометричної суми сил), взагалі, не еквівалентне поняттю їх рівнодіючої. У випадках, коли лінії дії складових сил не перетинаються в одній точці, геометрична сума сил, як ми побачимо це далі, не повністю визначає їх рівнодіючу. Більш того, в окремих випадках система може й не мати рівнодіючої зовсім, тоді як головний вектор можна найти для будь – якої системи сил.

Необхідно відмітити, що порядок, за яким будується силовий багатокутник може бути змінений; замикаюча його сторона не зміниться при цьому (рис. 2, в) ні по модулю, ні за напрямом.

Геометрична сума не змінюється від зміни місць складових.

### 3. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Як ми вже знаємо, довільна система збіжних сил може бути замінена рівнодіючою, рівною головному вектору даної системи сил. Якщо система збіжних сил знаходиться у рівновазі, то її рівнодіюча, а отже, і її головний вектор дорівнює нулю.

**Теорема.** Для рівноваги вільного твердого тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник, побудований з цих сил, був замкнений.

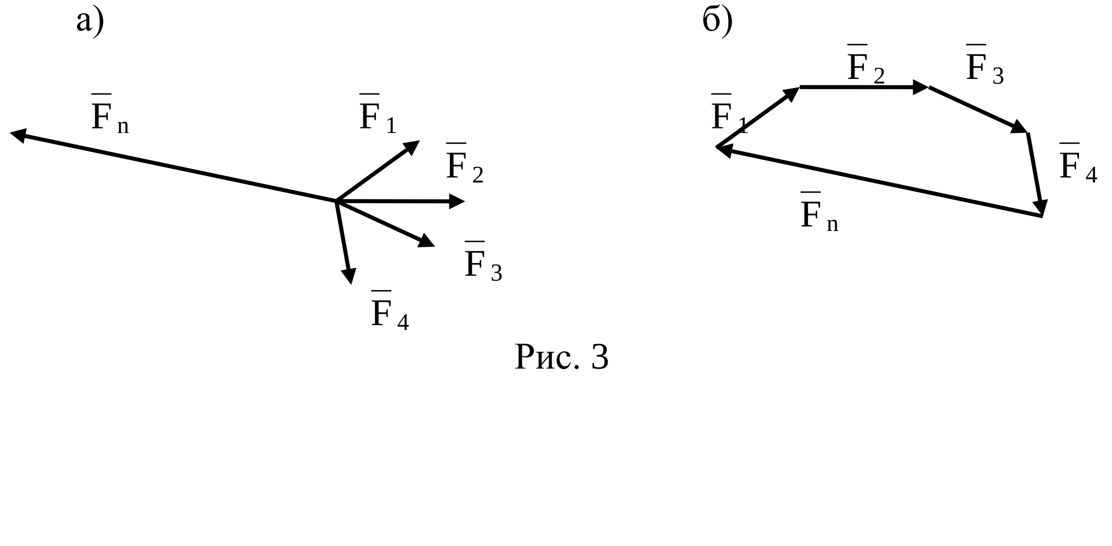


Рис. 3

Доведення необхідності. Дане тверде тіло, яке знаходиться у рівновазі під дією системи збіжних сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\}$ (рис. 3, а). Отже, згідно з параграфом 1.1, $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\} \sim 0$. З іншого боку, у відповідності з третьою аксіомою статики, $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n\} \sim \overline{F}_{рівн}$, тому $\overline{F}_{рівн} \sim 0$. Рівнодіюча $\overline{F}_{рівн}$ є замикаючим вектором силового багатокутника, а так як вона дорівнює нулю, то кінець останнього вектора співпадає з початком першого вектора, тобто силовий багатокутник замкнений (рис. 3, б).

Доведення достатності. Так як силовий багатокутник замкнений (рис. 3, б), то геометрична сума сил системи дорівнює нулю, тобто $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = 0$. Якщо геометрична сума системи збіжних сил дорівнює нулю, то система сил урівноважена : $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\} \sim 0$, а це означає, що тіло під дією такої системи знаходиться у рівновазі.

**Рівновага трьох непаралельних сил.**

**Теорема.** Якщо три непаралельні сили лежать в одній площині і являють собою урівноважену систему, то їх лінії дії перетинаються в одній точці.

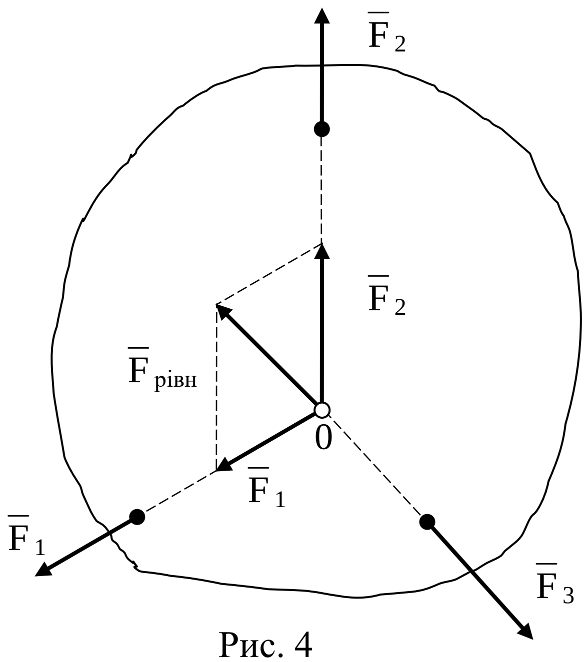

Рис. 4

Доведення. Маємо тіло, що знаходиться у рівновазі під дією трьох сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$, тобто $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\} \sim 0$ (рис. 4). Подовжимо лінії дій двох з них, нехай це будуть сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$; так як лінії дії сил непаралельні, то вони перетнуться у деякій точці 0. На підставі висновку 1 перенесемо їх точки прикладення у точку 0 і у відповідності з аксіомою 3 замінимо ці сили рівнодіючою $\overline{F}_{рівн}$. Так як $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\} \sim \overline{F}_{рівн}$ і оскільки тіло знаходиться у рівновазі, то $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\} \sim \{\overline{F}_{рівн}, \overline{F}_3\} \sim 0$. На підставі аксіоми 1 сили $\overline{F}_3$ і $\overline{F}_{рівн}$ повинні бути рівні по модулю і напрямлені уздовж однієї прямої у протилежні сторони, тому лінія дії сили $\overline{F}_3$ співпадає з лінією дії (сили $\overline{F}_{рівн}$ і, отже, проходить через точку 0 перетину ліній дії сил $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$). На підставі доведеної вище теореми цілком зрозуміло, що ця умова необхідна, але не достатня, тобто перетин лінії дії трьох сил, прикладених до тіла, не гарантує рівновага цього тіла.

### 4. Аналітична умова рівноваги системи збіжних сил (СЗС).

**Теорема.** Для рівноваги вільного твердого тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на кожну з осей системи координат x0y дорівнювали б нулю.

Доведення необхідності. Дане тіло, яке знаходиться у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил, отже $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\} \sim \overline{F}_{рівн} \sim 0$, або $F_{рівн} = 0$.

Ми довели, що модуль будь - якої сили, а, отже, і рівнодіючої, визначається на площині за формулою

$$F_{рівн} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} F_{ix})^2 + (\sum_{i=1}^{n} F_{iy})^2} \, .$$

Так як під коренем стоїть сума додатних складових, то $F_{рівн}$ буде дорівнювати нулю тільки тоді, коли одночасно

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \text{ і } \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad (4)$$

Це рівняння (4) називаються **рівнянням рівноваги системи збіжних сил на площині.**

Доведення достатності. Хай виконуються умови (4), тоді будуть справедливі і вирази $F_{рівн\ x} = 0$, $F_{рівн.y} = 0$

Отже, $F_{рівн.} = \sqrt{(F_{рівн.x})^2 + (F_{рівн.y})^2} = 0$ , тобто система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\}$ є урівноваженою системою сил, а це означає, що тіло під дією такої системи сил знаходиться у рівновазі.

**Аналітична умова рівноваги** системи збіжних сил:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum F_{kz} = 0 \end{cases}$$