

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
**Аеронавігація**

**за темою – Вступ до динаміки**

**Харків 2022**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2022 № 8

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 22.08.2022 № 1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від  
10.08.2022 № 1

**Розробник:** доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.т.н., доцент,  
спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Долударєва Я.С.

**Рецензенти:**

1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.
2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

### План лекції:

1. Предмет динаміки. Дві основні задачі динаміки.
2. Основні закони динаміки.
3. Метод кінетостатики (принцип Даламбера).
4. Сили інерції при криволінійному русі.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишин та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

#### Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

## Текст лекції

### 1. Предмет динаміки. Дві основні задачі динаміки.

**Динамікою** називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається залежність між механічним рухом тіл і діючими на них силами.

Вивчення динаміки починається з вивчення руху найпростішого об'єкта – матеріальної точки.

**Матеріальною точкою**, як нам відомо, називається таке матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

Нагадаємо, що за матеріальну точку ми можемо прийняти не тільки тіло зникаюче малих розмірів, але іноді і тіло скінчених розмірів (і, може бути, значних і дуже великих розмірів), якщо тільки в умовах даних досліджень ці розміри не мають значення. Наприклад, при поступальному русі тіла всі його точки рухаються однаково, і для визначення руху тіла достатньо знати рух будь-якої однієї його точки. Тому тіло, що рухається поступально, можна в динаміці прийняти за матеріальну точку, яка також рухається поступально і має масу тіла.

У тих випадках, коли розмірами тіла, що рухається не поступально, знехтувати неможливо, ми можемо умовно розділити його на окремі, малі в порівнянні з відстанями, які мають значення в даній задачі, частини і прийняти їх за матеріальні точки. Отже, всяке тіло і будь-яку комбінацію зв'язаних між собою тіл можна розглядати як сукупність матеріальних точок.

Умовно виділена сукупність взаємодіючих між собою матеріальних точок називається механічною системою матеріальних точок або просто системою.

Абсолютно тверде тіло можна також розглядати як систему матеріальних точок, відстані між якими не змінюються ні при яких обставинах, тобто як незмінну систему.

Множину поодиноких задач динаміки можна звести до двох основних задач.

**Перша задача динаміки.** Відомий рух даної матеріальної точки або даної системи. Вимагається визначити сили, що діють на цю точку або цю систему.

**Друга задача динаміки** (обернена першій). Відомі сили, що діють на дану матеріальну точку або дану систему. Вимагається визначити рух цієї точки або цієї системи.

Для рішення цих задач у динаміці користуються як встановленими в статичці способами складання сил і приведення їх систем до найпростішого вигляду, так і прийнятими у кінематиці характеристиками і способами описування різних рухів. Кількісні співвідношення між різними фізичними величинами, зв'язані з механічним рухом матеріальних тіл, встановлюються у динаміці шляхом математичних виводів з основних законів класичної механіки.

### 2. Основні закони динаміки.

Встановлення основних законів динаміки було започатковано італійським вченим Галілеєм (1564-1642) і продовжено Ньютоном.

Динаміка спирається на ряд положень, які являються аксіомами і називаються законами динаміки. Перш ніж перейти до розгляду цих законів, уведемо нове для нас поняття ізолюваної матеріальної точки, на яку не діють другі матеріальні точки. В дійсності ізолювані тіла в природі не існують і поняття ізолюваної матеріальної точки є умовним.

**Перший закон динаміки**, який називається аксіомою інерції або першим законом Ньютона, формулюється стосовно матеріальної точки так: ізолювана матеріальна точка або знаходиться у спокої, або рухається прямолінійно і рівномірно.

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух є єдиний вид руху, в якому прискорення дорівнює нулю, тому аксіому інерції можна сформулювати і так: прискорення ізолюваної матеріальної точки дорівнює нулю.

Таким чином, ізолювана від впливу оточуючих тіл матеріальна точка не може сама по собі надати прискорення. Ця властивість тіл називається інерцією або інертністю.

Можна сказати, що інерція, або інертність, є властивість тіла зберігати свою швидкість по модулю і напрямку незмінною (в тому числі і швидкість рівну нулю).

Змінити швидкість, тобто надати прискорення, може лише прикладена до тіла сила.

Залежність між силою і наданим нею прискоренням встановлює **другий закон динаміки**, або другий закон Ньютона, який читається так: прискорення, надане матеріальній точці силою, має напрям сили і пропорційне її модулю.

Якщо сила  $\vec{F}_1$  надає матеріальній точці прискорення  $\vec{a}_1$ , а сила  $\vec{F}_2$  - прискорення  $\vec{a}_2$ , то на підставі другого закону можна написати

$$F_1 / F_2 = a_1 / a_2 \text{ або } F_1 / a_1 = F_2 / a_2.$$

Отже, для даної матеріальної точки відношення сили до прискорення є величиною сталою. Це відношення позначимо  $m$  і назовемо масою даної матеріальної точки:

$$F / a = m = \text{const.}$$

Маса – одна із основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інерційні і гравітаційні властивості.

Ньютон називав масою кількість матерії, яка міститься у тілі, і вважав масу величиною сталою.

З сучасної точки зору маса тіла не є сталою і залежить від швидкості руху. Теорія відносності встановлює таку залежність між масою тіла, коли воно знаходиться в спокої і рухається:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (V / c)^2},$$

де  $m$  - маса рухомого тіла,  $m_0$  - маса спокою,  $V$  - швидкість руху тіла,  $C$  - швидкість світла.

З цієї формули видно, що із зростанням швидкості тіла зростає його маса і, отже, важче надати тілові подальше прискорення.

На підставі висновків теорії відносності сучасна наука дає масі таке визначення: маса є міра інертності тіла.

Але помітно маса тіла змінюється тільки при дуже великих швидкостях, близьких до швидкості світла, тому далі цією зміною ми будемо нехтувати і вважати масу тіла сталою величиною.

Другий закон Ньютона виражається рівнянням

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1)$$

яке називається основним рівнянням динаміки і читається так: сила є вектор, який дорівнює добутку маси точки на її прискорення.

З досвіду відомо, що під дією притягання Землі у порожнині тіла падають в одному місці з однаковим прискоренням, яке називається прискоренням вільного падіння. Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння. Якщо сила тяжіння одного тіла  $G_1 = m_1 g$ , а другого -  $G_2 = m_2 g$ , то

$$G_1 / G_2 = m_1 g / m_2 g = m_1 / m_2$$

тобто сили тяжіння тіл пропорційні їх масам, що дозволяє порівнювати маси тіл, зважуючи їх.

Прискорення вільного падіння  $g$  в різних місцях земної поверхні різне і зменшується від полюсів до екватора, тому що земна куля сплюснена в напрямку полюсів. Другою причиною зменшення прискорення вільного падіння при переміщенні від полюсів до екватора являється існування центробіжної сили інерції, про яку мова буде пізніше. Для Києва  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ , на полюсах  $g = 9,83 \text{ м/с}^2$ , на екваторі  $g = 9,78 \text{ м/с}^2$ . Із сказаного ясно, що сила тяжіння тіла залежить від місця, де відбувається зважування.

З другого закону Ньютона виходить, що під дією постійної сили вільна матеріальна точка, яка знаходиться в спокої, рухається рівномірно прямолінійно.

Рух під дією постійної сили може бути і прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не співпадає з лінією дії сили). Приклад руху під дією постійної сили – вільне падіння тіл.

До основних законів динаміки відноситься відома нам із статки аксіома взаємодії, або третій закон Ньютона: сили взаємодії двох матеріальних точок по модулю рівні між собою і спрямовані у протилежні боки.

Четвертий закон (закон незалежності дії сил): прискорення, одержане матеріальною точкою при одночасній дії на неї декількох сил, дорівнює геометричній сумі цих прискорень, які б одержала ця точка під дією кожної окремої із даних сил.

Нехай на точку, маса якої  $m$ , одночасно діють сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , надаючи їй прискорення  $a$ .

Прискорення, які б одержала ця точка при окремій дії на неї кожної з даних сил, позначимо  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ . У відповідності з даним законом, встановленим на базі багаточисельних експериментів Галілеєм, будемо мати

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \dots + \bar{a}_n. \quad (2)$$

Якщо ми помножимо обидві частини даного рівняння на скалярний множник  $m$  (на масу тіла), то одержимо

$$m\bar{a} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + m\bar{a}_3 + \dots + m\bar{a}_n.$$

У відповідності з основним законом динаміки (1)  $m\bar{a}_1 = \bar{F}_1$ ,  $m\bar{a}_2 = \bar{F}_2$ ,  $m\bar{a}_3 = \bar{F}_3, \dots, m\bar{a}_n = \bar{F}_n$ . Звідси одержуємо

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n.$$

Позначивши через  $\bar{F}$  рівнодіючу системи сил, прикладених у даній точці, яка дорівнює їх геометричній сумі, будемо мати

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Останнє рівняння зовнішньо не відрізняється від основного закону динаміки (1). Отже, основне рівняння динаміки зостається в силі і у тому випадку, коли на точку одночасно діють декілька сил. Під прикладеною до точки силою  $\bar{F}$  треба розуміти в цьому випадку рівнодіючу усіх сил, діючих на точку.

### 3. Метод кінетостатики (принцип Даламбера).

Уявімо собі матеріальну точку масою  $m$ , яка рухається з прискоренням  $a$  під дією якоїсь системи активних і реактивних сил, рівнодіюча яких дорівнює  $\bar{F}$ .

Використовуємо основне рівняння динаміки, щоб рівняння руху записати у вигляді рівняння рівноваги (метод кінетостатики):

$$\bar{F} = m\bar{a}.$$

Перепишемо це рівняння в такому вигляді:

$$\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0. \quad (3)$$

Вираз, що взятий у дужки, позначається  $F^i$  і називається силою інерції:

$$F^i = -m\bar{a}. \quad (4)$$

Сила інерції є вектор, рівний добутку маси точки на її прискорення і спрямований в бік, протилежний прискоренню.

Тоді

$$\bar{F} + \bar{F}^i = 0 \text{ або } \sum(\bar{F}, \bar{F}^i) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5), яке є математичним виразом принципу, що носить ім'я французького вченого Даламбера (1717-1783), можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Слід підкреслити, що одержане рівняння, хоча і назване рівнянням рівноваги, в дійсності є іншого вигляду рівнянням руху матеріальної точки.

Принцип Даламбера формулюється так: активні і реактивні сили, діючі на матеріальну точку, разом з силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, яка задовольняє всі умови рівноваги.

Слід пам'ятати, що сила інерції прикладена до розглядуваної матеріальної точки умовно, але для зв'язку, що викликає прискорення, вона є реальною.

Пояснимо це на прикладі (рис. 1). Нехай до тіла, яке лежить на

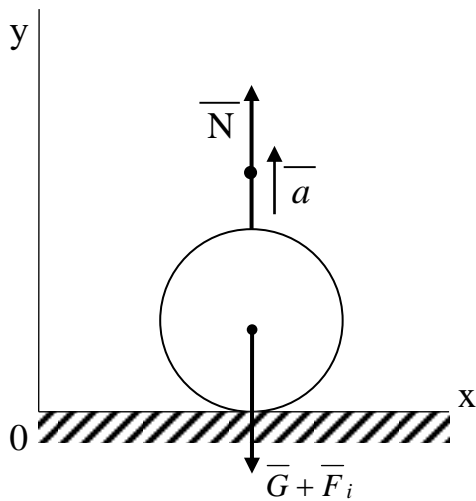


Рис. 1

горизонтальній площині, прив'язана нитка, здатна витримати силу тяжіння  $G$  цього тіла. Якщо до нитки прикласти силу  $N$  статично (поступово), то тіло буде підняте уверх і нитка не порветься, якщо ж силу  $N$  прикласти динамічно (раптово, ривком), то нитка порветься. Це явище пояснюється таким чином.

Щоб підняти вантаж, необхідно йому надати якесь прискорення  $\vec{a}$ . Для визначення величини натягування нитки використаємо принцип Даламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; \quad N - G - F^i = 0,$$

звідки

$$N = G + F^i = G + ma.$$

У першому випадку вантажу  $G$  надається невелике прискорення і сила інерції, яка збільшує натягання нитки, невелика, у другому випадку прискорення значне і сила інерції відповідно зростає. В обох випадках сила інерції не збільшує тиск на опору, так як прикладена до тіла умовно.

Підкреслимо, що вагою тіла називається сила, з якою тіло внаслідок притягання Землі діє на опору (або на підвіс), яка вдержує його від вільного падіння. Якщо тіло і опора нерухомі, то вага тіла дорівнює його силі тяжіння.

#### 4. Сили інерції при криволінійному русі.

У загальному випадку руху точки криволінійною траєкторією повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень (рис. 2). Дотичне прискорення  $a_t = dV / dt$ , нормальне прискорення  $a_n = V^2 / \rho$ ,

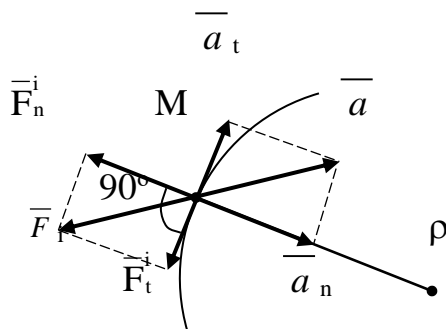


Рис. 2

повне прискорення  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ .

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:  $F_t^i = mdV / dt$  - дотична, або тангенціальна, сила інерції,  $F_n^i = mV^2 / \rho$  - нормальна, або центробіжна, сила інерції,  $F^i = ma$  - повна сила інерції.

Як приклад розглянемо рівномірний рух по колу в горизонтальній площині тіла, маючого силу тяжіння  $G$ , і прив'язаного до невагомої нитки довжиною  $l$ , розташованої в тій же площині (рис. 3, а). Щоб нитка зоставалася в площині руху тіла, вважається що вона ковзається по ідеально гладкій поверхні. Швидкість тіла позначимо  $V$ . Тоді  $F_n^i = mV^2 / l$  - центробіжна сила інерції (ця сила натягує



нитку),  $N = mV^2 / l$  - доцентрова сила, прикладена до тіла (ця сила утримує тіло на колі, по якому воно рухається).

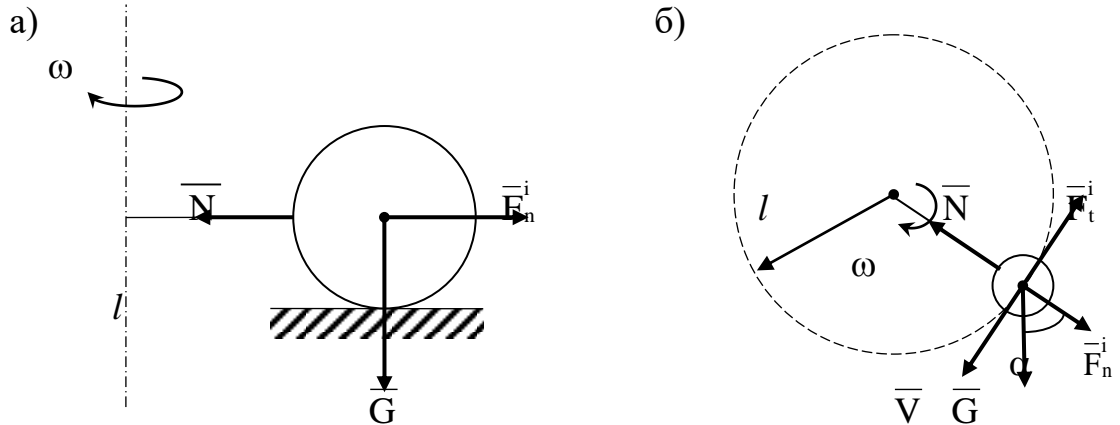


Рис. 3

Центробіжна і доцентрова сили (дія і протидія) за третім законом Ньютона рівні за модулем і спрямовані в протилежні боки. Очевидно, що дотична сила інерції  $F_t^i$  в цьому випадку дорівнює нулю, так як  $V = const$ .

З практики відомо, що при достатній швидкості нитка може порватися і тіло полетить по дотичній до кола, тобто за напрямом швидкості у момент розриву. Це ще раз доводить, що центробіжна сила інерції є реальною силою для зв'язку, але до тіла вона прикладена умовно.

Знайдемо натягування нитки, якщо прив'язане до неї тіло буде рухатися по колу у вертикальній площині (рис. 3, б). Для визначення натягування  $N$  нитки застосуємо принцип Даламбера, тобто прикладемо до тіла нормальну силу інерції  $F_n^i$  і дотичну силу інерції  $F_t^i$ .

Спроектуємо всі сили на напрям нитки:

$$N - G \cos \alpha - F_n^i = 0,$$

звідки

$$N = F_n^i + G \cos \alpha = mV^2 / l + G \cos \alpha.$$

Натягування нитки буде максимальним при  $\alpha = 0$ , тобто коли тіло буде знаходитися в найнижчому положенні:

$$N_{\max} = mV^2 / l + G.$$

Натягування нитки буде мінімальним при  $\alpha = \pi$ , тобто коли тіло буде знаходитися у верхньому положенні:

$$N_{\min} = mV^2 / l - G.$$

Якщо виразити лінійну швидкість тіла через кутову швидкість нитки  $V = \omega l$ , то формула центробіжної сили інерції набуде вигляду

$$F_n^i = m\omega^2 l. \quad (6)$$