

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

**з навчальної дисципліни «Основи теорії прийняття рішень»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
Технології робіт та технологічне обладнання аеропортів**

**за темою – Прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності**

**Харків 2021**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 23.09.2021 № 8

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 22.09.2021 № 2

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією Науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 22.09.2021 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол  
від 10.09.2021 № 2

**Розробник:** викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст  
першої категорії Подгорних Н.В.

**Рецензенти:**

1. Завідувач відділення фахової підготовки навчального відділу КЛК ХНУВС,  
старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної  
техніки КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист  
Владов С. І.
2. Завідувач кафедри інформатика і вищої математики Кременчуцького  
національного університету імені Михайла Остроградського, д. т. н., професор  
Ляшенко В. П.

## План лекції

1. Прийняття рішень в умовах ризику.
2. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень. – Київ: Освіта України, 2018. – 246 с.
2. Теорія прийняття рішень [текст] підручник. / За заг. ред. Бутка М. П. [М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко та ін.] – К. : «Центр учбової літератури», 2015. – 360 с.
3. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник / А. І. Орлов М. : Видавництво «Март», 2004. - 656 с.
4. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. - 336 с.
5. Ус С.А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 300 с.
6. О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик. Основи теорії прийняття рішень. – К., 2014. – 94с.
7. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень : Підручник. – К.: АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.]

#### Додаткова

8. Орлів М. С. Підготовка і прийняття управлінських рішень : навч.-метод. матеріали / М. С. Орлів ; упоряд. Г. І. Бондаренко. – К. : НАДУ, 2013. – 40 с.
9. Клименко С.М., Дуброва О.С. Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2006. — 188 с.
10. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі: навч. посібник / В.В. Вітлінський, П.І.Верченко, Сігал А.В., Наконечний Я.С.; за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.:КНЕУ, 2002. – 446с.

### Текст лекції

#### 1. Прийняття рішень в умовах ризику.

Задача прийняття рішень в умовах невизначеності виникає, коли необхідно діяти в ситуації, що відома не повністю. Задачу формують як задачу пошуку окремого найкращого (в якомусь розумінні) рішення на заздалегідь заданій множині допустимих рішень.

Основна трудність полягає у тому, що наслідки, пов'язані з прийняттям того або іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях –

втратах, які може зазнати особа, що приймає рішення (ОПР). Вихідною інформацією, необхідною для розв'язування задачі, є *функція втрат*  $F(d, S)$ , що являє собою залежність втрат ОПР від двох аргументів: його рішення  $d$  та ситуації  $S$ , в якій це рішення приймається.

Головний принцип розв'язування задач в умовах невизначеності полягає у перетворюванні функції втрат у функцію ризику  $R(d)$ , яка відображає залежність ступеня ризику, на який іде ОПР, вже тільки від одного аргументу – від рішення  $d$ , що приймають. Спосіб такого перетворювання неоднозначний і залежить від вибраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називають рішення, яке мінімізує ризик.

На відміну від постановки, прийнятої в теорії ігор, у задачах теорії статистичних рішень невизначеність ситуації не має антагоністичного (конфліктного) характеру. Передбачається, що зовнішнє середовище, в якому приймають рішення, байдуже до наших рішень і не протидіє нам. Невизначеність у теорії статистичних рішень зв'язують лише з незнанням того, в якому стані знаходиться зовнішнє середовище – «природа», яку умовно можна вважати другим учасником гри.

Здавалося б, що відсутність свідомої протидії супротивника спрощує задачу вибору рішення, тому що ОПР ніхто не заважає. Але це не так! У грі з активним супротивником ми знаємо щодо його намірів протидіяти, а тому можемо розв'язувати задачу у припущенні, що супротивник прийме найгірше для нас рішення. Тим самим частково знімається елемент невизначеності гри. У грі з природою таке обґрунтоване припущення зробити неможливо і тому вибір оптимального рішення значною мірою залежить від вибору критерію оптимальності, тобто від суб'єктивних уподобань ОПР.

Розглянемо формальну постановку задачі. Передбачається, що ОПР (гравець  $A$ ) може приймати одне з рішень  $d_i$   $i=1, \dots, m$ , а другим «гравцем» виступає зовнішнє середовище, яке може перебувати в одному зі станів  $S_j$ . Формально таку задачу можна представити у вигляді матриці, елементи якої – виграш (корисність) від рішення  $d_i$  у ситуації  $S_j$ . На відміну від розглянутих раніше матричних ігор, у даному випадку для вибору оптимальної стратегії вже не можна орієнтуватися на те, що другий гравець (природа) прагне мінімізувати наш виграш. Тому, поряд з платіжною матрицею, вводиться матриця ризиків, елементи якої – величина ризику, який пов'язаний з рішенням  $d_i$  у ситуації  $S_j$ .

**Таблиця 1. Матриця виграшів**

Можливі рішення ОПР	Стани зовнішнього середовища				
	$S_1$	...	$S_j$	...	$S_n$
$d_1$	$u_{11}$	...	$u_{ij}$	...	$u_{1n}$
...	...	...	...	...	...
$d_i$	$u_{i1}$	...	$u_{ij}$	...	$u_{in}$
...	...	...	...	...	...
$d_m$	$u_{m1}$	...	$u_{mj}$	...	$u_{mn}$

Таблиця 2. Матриця ризиків

Можливі рішення ОПР	Стани зовнішнього середовища				
	$S_1$	...	$S_j$	...	$S_n$
$d_1$	$r_{11}$	...	$r_{ij}$	...	$r_{1n}$
...	...	...	...	...	...
$d_i$	$r_{i1}$	...	$r_{ij}$	...	$r_{in}$
...	...	...	...	...	...
$d_m$	$r_{m1}$	...	$r_{mj}$	...	$r_{mn}$

Величину ризику визначають за допомогою різниці

$$r_{ij} = \max u_{ij} - u_{ij}$$

між максимальним виграшом, який ОПР потенційно отримала би, якщо б знала, що середовище знаходиться у певному стані  $S_j$ , та реальним виграшом  $u_{ij}$ , який ОПР отримає з вибором рішення  $d_i$  у даному стані  $S_j$ . Слід зауважити, що вихідна платіжна матриця (матриця виграшів) може однозначно бути перетворена в матрицю ризиків, але не навпаки.



Рис. 1 Перетворення платіжної матриці в матрицю ризиків

У теорії статистичних рішень розглядають пошук оптимального розв'язку задачі в умовах:

- *ризик*, коли розподіл імовірності  $P(S_j)$  станів середовища  $S_j$  відомий або його можна оцінити на основі попередніх експериментальних досліджень за вибіркою спостережень;
- *невизначеності*, коли невідомий розподіл імовірності  $P(S_j)$  станів середовища  $S_j$ , а його оцінювання на основі попередніх експериментальних спостережень складно реалізувати або взагалі неможливо.

Задачу прийняття оптимальних рішень в умовах ризику формують таким чином. Нехай відомі імовірності  $P(S_j)$  станів середовища  $S_j$ . Тоді для кожного рядка платіжної матриці можна визначити очікуваний виграш для фіксованого рішення  $d_i \in D$  у вигляді математичного сподівання

$$E\{u(d_i)\} = \sum_{j=1}^n u_{ij} P(S_j).$$

Оптимальною стратегією буде та з можливих стратегій, яка забезпечує найбільший очікуваний виграш:

$$d^* = \arg \max_{1 \leq i \leq m} E\{u(d_i)\}.$$

**Приклад 1.** Матриця (табл. 3), у якій представлено виграші  $u_{ij}$ , що отримає ОПР від кожного з трьох рішень  $d_1, d_2, d_3$ , у кожній з чотирьох ситуацій з відомим розподілом імовірності  $P(S_j)$ .

**Таблиця 3. Матриця виграшів**

$S_j$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$\sum_{j=1}^n u_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1) = 0,25$	$P(S_2) = 0,3$	$P(S_1) = 0,25$	$P(S_1) = 0,2$	
$d_1$	1	4	5	9	4.5
$d_2$	3	8	4	3	4.75
$d_3$	4	6	6	2	4.7

В останньому стовпчику табл. 3 надано розрахунки очікуваних результатів ОПР для кожного можливого рішення, які визначені за формулою математичного сподівання. Максимальному очікуваному результату відповідає рішення  $d_2$ , яке є оптимальним розв'язком задачі за умовою.

Якщо для відомого розподілу імовірності перейти від матриці виграшів до матриці ризиків, то для кожного рядка такої матриці можна визначити очікуваний ризик з фіксованим рішенням  $d_i$  у вигляді математичного сподівання. Тоді оптимальне рішення (стратегія) ОПР має задовольняти умову мінімуму середнього ризику. Зрозуміло, що при такому переході оптимальне рішення не зміниться.

**Таблиця 4. Матриця ризиків**

$S_j$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$\sum_{j=1}^n r_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1) = 0,25$	$P(S_2) = 0,3$	$P(S_1) = 0,25$	$P(S_1) = 0,2$	
$d_1$	3	4	1	0	2,2
$d_2$	1	0	2	3	1,35
$d_3$	0	2	0	7	2,0

З іншого боку оптимальне рішення залежить від розподілу  $P(S_j)$  імовірності станів середовища. Тому для однієї і тієї ж матриці ризиків оптимальне рішення може змінитися, якщо зміниться розподіл  $P(S_j)$  (табл. 5).

**Таблиця 5. Матриця ризиків при зміні розподілу  $P(S_j)$**

$S_j$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$\sum_{j=1}^n r_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1) = 0,6$	$P(S_2) = 0,1$	$P(S_1) = 0,2$	$P(S_1) = 0,1$	
$d_1$	3	4	1	0	2,4
$d_2$	1	0	2	3	1,3
$d_3$	0	2	0	7	0,9

Пошук оптимальних рішень у реальних практичних задачах найчастіше проводиться при відсутності будь-якої інформації щодо імовірності  $P(S_j)$  станів середовища, тобто в умовах невизначеності.

## 2. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Існує два підходи до розв'язування задачі в умовах відсутності інформації щодо імовірності  $P(S_j)$  станів середовища:

- вибір оптимального рішення на основі додаткового критерію;
- використання змішаних стратегій.

Критерієм оптимальності в умовах невизначеності називають правило вибору найкращого рішення, яке засновано на певних припущеннях (гіпотезах) ОПР відносно поведінки зовнішнього середовища. Такі критерії повинні мати наступні властивості:

- забезпечення відбору перспективних та нівелювання неперспективних альтернатив (стратегій);
- незалежність від адитивної добавки до значень функції корисності.

Розглянемо особливості основних критеріїв, які отримали найбільше поширення у теорії прийняття рішень.

**Критерій Лапласа** (рівноможливих станів) оснований на припущенні, що імовірності  $P(S_j)$  станів однакові:  $P(S_1) = P(S_2) = \dots = P(S_n)$ .

За таким критерієм оптимальною вважають стратегію  $d_i$ , для якої сума значень виграшів для усіх станів  $S_j$  зовнішнього середовища максимальна.

Цілком зрозуміло, що припущення, коли імовірності станів однакові не завжди є обґрунтованим. Ще один суттєвий недолік критерію Лапласа продемонструємо на прикладі матриці виграшів, поданої у табл. 6.

**Таблиця 6. Ілюстрація недоліку критерію Лапласа**

Стратегії	Стани зовнішнього середовища							
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	...	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	
$d_1$	1	0	0	...	0	0	100	101
$d_2$	9,9	10	10	...	10	10	10,1	100

За критерієм Лапласа оптимальним вважають рішення  $d_1$ , оскільки при виборі альтернативи  $d_1$  сума виграшів при можливих станах зовнішнього середовища більша, ніж сума виграшів за умови вибору альтернативи  $d_2$ .

Однак, як видно з табл. 6, при рішенні  $d_1$  виграші розподілені вкрай нерівномірно за станами  $S_j$ . Тому, якщо обрати рішення  $d_1$ , то ОПР ризикує взагалі нічого не отримати тоді, як рішення  $d_2$  гарантує мінімальний виграш 9,9 одиниць.

**Критерій Вальда** (крайнього песимізму до виграшу) заснований на гіпотезі, згідно з якою ОПР прагне отримати гарантований результат для будь-якого стану середовища  $S_j$

Для вибору оптимальної альтернативи для кожного рішення  $d_i$  (рядка матриці виграшів) визначають мінімальне значення і обирають максимальне з отриманих чисел, яке і визначає оптимальну альтернативу.

Головний недолік критерію Вальда полягає в тому, що визначення оптимальної альтернативи спирається на найгіршу ситуацію, хоча природа байдужа до наших рішень і не протидіє ОНР. При такому невиправданому песимізмі ОНР можуть бути відкинуті більш вигідні альтернативи.

Для ілюстрації згаданого недоліку розглянемо матрицю виграшів (табл. 7).

За критерієм Вальда оптимальним вважається рішення  $d_1$ , оскільки саме така альтернатива відповідає максимуму останнього стовпчика таблиці.

Однак, як видно з табл. 7, для всіх станів середовища, за винятком стану  $S_1$ , рішення  $d_2$  забезпечує більш високі виграші.

**Таблиця 8.7. Приклад недоліку критерію Вальда**

Стратегії	Стани зовнішнього середовища							$\min_{S_j} u(d_i, S_j)$
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	
$d_1$	2	3	1	5	4	3	1	1
$d_2$	0	6	8	17	9	6	8	0

**Критерій Гурвіца** (зваженого песимізму-оптимізму) ґрунтується на наступній гіпотезі: рівень песимізму ОНР приймає деяке значення  $\lambda \in [0,1]$  причому, чим більше значення  $\lambda$ , тим більший песимізм у ОНР.

За критерієм Гурвіца для кожної альтернативи  $d_i$  визначають два числа

$$u_i^{\min} = \min_{S_j} u(x_i, S_j) \quad \text{та} \quad u_i^{\max} = \max_{S_j} u(x_i, S_j)$$

та обирають оптимальну альтернативу, яка задовольняє умову

$$d^* = \arg \max_{d_i \in D} \{ \lambda u_i^{\min} + (1 - \lambda) u_i^{\max} \}.$$

Таким чином, критерій Гурвіца заснований на припущенні ОНР, що природа може знаходитись у самому гіршому стані з імовірністю  $\lambda$  та в самому кращому стані з імовірністю  $1 - \lambda$ .

Зрозуміло, що при  $\lambda = 1$  критерій Гурвіца зводиться до критерію Вальда (критерію максіміну).

Критерій Гурвіца забезпечує певну гнучкість для вибору оптимального рішення. Водночас він дуже чутливий до вибору  $\lambda$ , що може змінити висновок щодо оптимальності альтернативи (табл. 8).

Як видно з табл. 8 при  $\lambda = 0.5$  оптимальним за критерієм Гурвіца є рішення  $d_2$ , а при  $\lambda = 0.9$  – рішення  $d_1$ . Таким чином, вибір оптимальної альтернативи залежить від суб'єктивного вибору  $\lambda$ , тобто залежить від ставлення ОНР до ризику.

**Таблиця 8. Приклад вибору альтернативи за критерієм Гурвіца**

Стратегії	Стани зовнішнього середовища					$u_i^{\min}$	$u_i^{\max}$	Значення критерію	
								$\lambda u_i^{\max} + (1 - \lambda) u_i^{\min}$	
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$			$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,9$
$d_1$	1	3	2	4	5	1	5	3	1,4
$d_2$	0	6	8	10	12	0	12	6	1,2

**Критерій Севіджа** (найменшого розчарування), подібно до критерію Вальда, проявляє крайній песимізм, але не до виграшу ОПР, а до ризику.

Тобто для його використання здійснюють перехід від матриці виграшів до матриці ризиків, за якою визначають оптимальну альтернативу, що задовольняє умову

$$d^* = \arg \min_{d_i} \max_{S_j} r(d_i S_j).$$

Незважаючи на те, що матриця ризиків однозначно пов'язана з матрицею виграшів, рішення за критеріями Вальда та Севіджа можуть не співпадати, що продемонстровано в табл. 9 і 10.

**Таблиця 9. Приклад вибору альтернативи за критерієм Вальда**

Рішення	Стани середовища				$\min u(d_i S_j)$
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	
$d_1$	1	4	5	9	1
$d_2$	3	8	4	3	3
$d_3$	4	6	6	2	2

Легко побачити, що за даними таблиці виграшів (табл. 9) оптимальною альтернативою є альтернатива  $d_2$ , оскільки саме вона забезпечує максимум з мінімальних винагород.

**Таблиця 10. Приклад вибору альтернативи за критерієм Севіджа**

Рішення	Стани середовища				$\max r(d_i S_j)$
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	
$d_1$	3	4	1	0	4
$d_2$	1	0	2	6	6
$d_3$	0	2	0	7	7

Водночас оптимальним рішенням за критерієм Севіджа є альтернатива  $d_1$ , оскільки сама вона забезпечує мінімум максимальних ризиків (табл. 10).

Таким чином, слід пам'ятати, що вибір оптимального рішення в умовах невизначеності значною мірою є суб'єктивним, тому що залежить від вибору критерію оптимальності, а з використанням критерію Гурвіца ще й від значення  $\lambda$ .

Разом з тим теорія прийняття рішень дає змогу знайти науково обгрунтоване оптимальне рішення (з точки зору обраного критерію), яке спрямоване на досягнення максимуму позитивного або мінімуму негативного результату для конкретної практичної задачі в умовах невизначеності.

**Контрольні питання:**

1. Охарактеризуйте особливості прийняття рішень у грі з природою.
2. Порівняйте методи прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності.
3. Наведіть відмінності критеріїв Лапласа, Вальда, Гурвіца та Севіджа.