**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ**
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**ВНУТРІШНІХ СПРАВ**
**КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

# ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
**Технічне обслуговування та ремонт**
**повітряних суден і авіадвигунів**

**за темою –** Кінематика твердого тіла

**Харків 2021**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 23.09.2021 № 8

**СХВАЛЕНО**
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.09.2021 № 2

**ПОГОДЖЕНО**
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 22.09.2021 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 10.09.2021 № 2

**Розробник:** викладач циклової комісії природничих дисциплін, к.т.н., доцент, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Долударєва Я.С.

**Рецензенти:**
1. Старший викладач кафедри технології машинобудування Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Пєєва І.Е.
2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

**План лекції:**

1. Кінематика твердого тіла. Поступальний рух.
2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.
3. Траєкторії, швидкості і прискорення точок тіла при його обертанні.
4. Плоский рух твердого тіла.
5. Швидкість і прискорення точок плоскої фігури.

**Рекомендована література:**

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишинв та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матералів Підручкик/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зіньковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. ІІ, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

## Текст лекції
## 1. Кінематика твердого тіла. Поступальний рух.

Не у всіх задачах кінематики можна знехтувати розмірами тіла і прийняти його за точку. Для тих випадків, коли відстань між частинками тіла не змінюється, але за умовою задачі приходиться враховувати рух його різних частин, має місце розділ кінематики, що називається кінематикою твердого тіла.

Існує теорема про те, що проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки, завжди рівні між собою. Наведемо логічний доказ цієї теореми: проекції швидкостей двох точок $A$ і $B$ (рис. 1) абсолютно твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою, а інакше відстань $AB$ між ними змінювалось би, що у твердому тілі неможливо. Отже

$$V_A \cos(\vec{V}_A, AB) = V_B \cos(\vec{V}_B, AB).$$

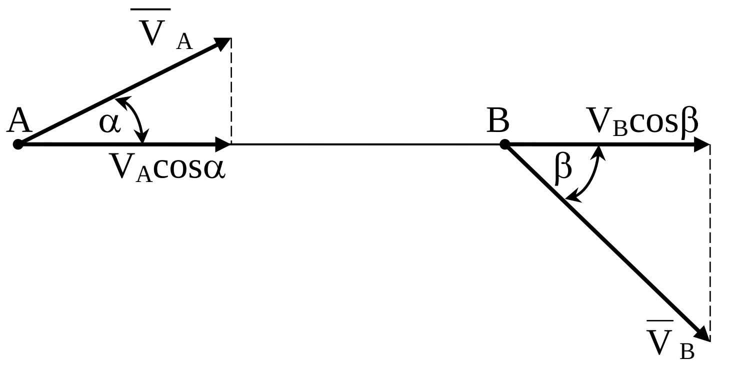


Рис. 1

Зрозуміло, що ця теорема відноситься не тільки до двох точок $A$ і $B$, а до всіх точок, які складають пряму і може бути сформульована так: проекції на будь-яку вісь, проведену у твердому тілі, швидкостей точок цієї осі рівні між собою.

Найбільш простим рухом тіла являється **поступальний**, при якому всяка проведена у тілі пряма не змінює свого положення. Щоб встановити чи є даний рух поступальним, не має необхідності проводити у тілі безліч прямих і перевіряти, чи не змінює будь-яка з них напрямку з часом під час руху. Рух тіла цілком визначається рухом трьох його точок, які не лежать на одній прямій. Отже, треба провести не менше двох прямих. Зрозуміло, що ці прямі повинні бути паралельними між собою.

З визначення видно, що поступально рухатися може тільки тіло. Одна точка не може рухатися поступально. Разом з тим поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом будь-якої з його точок. Доведемо це.

Нехай тіло (рис. 1) рухається поступально відносно системи відліку. Відмітимо у тілі три точки $A, B$ і $C$, вибравши їх довільно, не на одній прямій. Будуємо кінематичну модель тіла – трикутник $ABC$. Через деякий час $\Delta t$ тіло переміститься і займе нове положення $A_1B_1C_1$. З'єднавши векторами початкові і кінцеві положення точок за час $\Delta t$, визначимо їх переміщення:

$$\Delta\vec{r}_A = \overline{AA_1};\ \Delta\vec{r}_B = \overline{BB_1};\ \Delta\vec{r}_c = \overline{CC_1}.$$

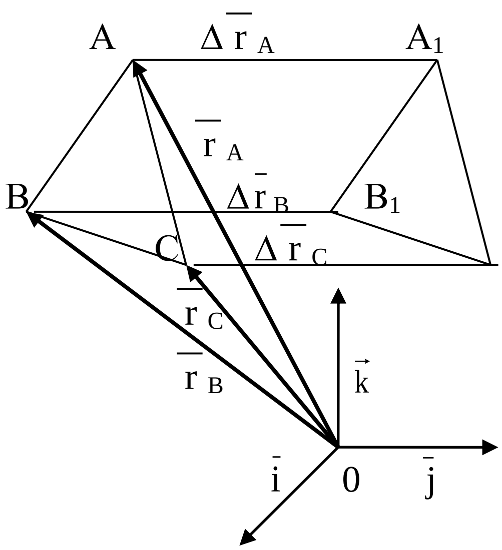

Рис. 2

При поступальному рухові тіла сторони трикутника не змінюють напрямів, а тому утворена на рисунку поверхня є трикутною призмою, і переміщення точок $A, B$ і $C$ рівні між собою як протилежні сторони паралелограмів. Точки $A, B$ і $C$ вибрані довільно, а тому доведення справедливе для усіх точок тіла:

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_c = \Delta\vec{r}.$$

Вектори переміщення усіх точок при поступальному русі тіла рівні між собою. Звідси витікає, що траєкторії усіх точок однакові. Саме тому поступальний рух іноді розрізняють за траєкторіями, які описують точки тіла. Так, наприклад, розрізняють круговий поступальний рух (ланка $AB$ шарнірного паралелограма, рис. 3, а), рух прямолінійний обернено-поступальний (товкач кулачкового механізму, рис. 3, б).

Задати рух тіла – це значить дати положення його точок у кожну мить. Точки поступально рухомого тіла рухаються однаково, і поступальний рух усього тіла цілком характеризується рухом будь-якої однієї з його точок. Отже, рівняння руху будь-якої однієї точки є разом з тим рівнянням поступального руху тіла. Так, якщо вибрати у тілі деяку точку $E$, то рівняння поступального руху тіла у векторній формі має вигляд

$$\vec{r}_E = \vec{r}_E(t),$$

а у прямокутних координатах

$$x_E = x_E(t); \quad y_E = y_E(t); \quad z_E = z_E(t).$$

Визначимо швидкість точок поступально рухомого тіла з рівняння

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt};$$

перша похідна за часом від радіуса-вектора виражає швидкість точки. Отже

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}.$$

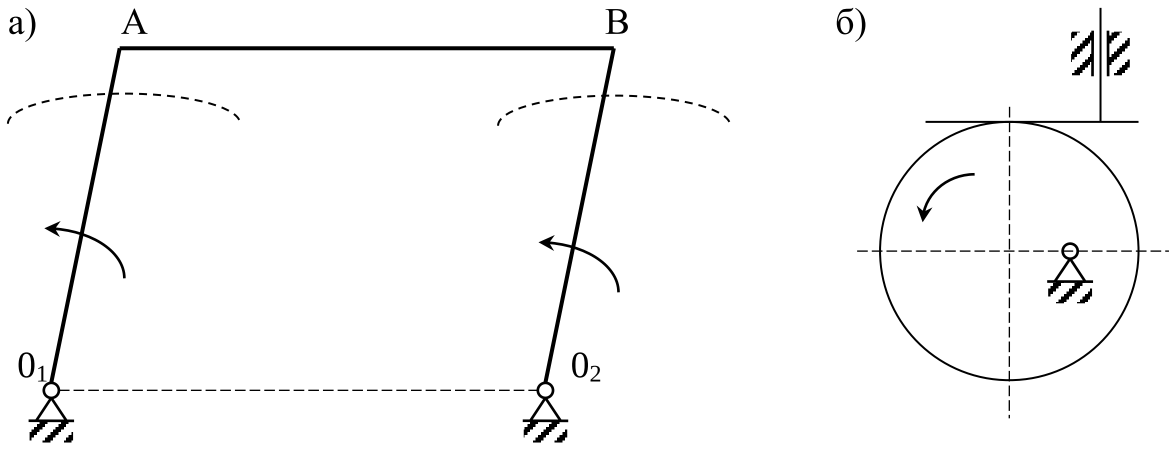


Рис. 3

Упевнимося, що швидкість точок $A, B$ і $C$ однакова. Ці точки взяті довільно, отже, швидкість усіх точок тіла буде однакова.

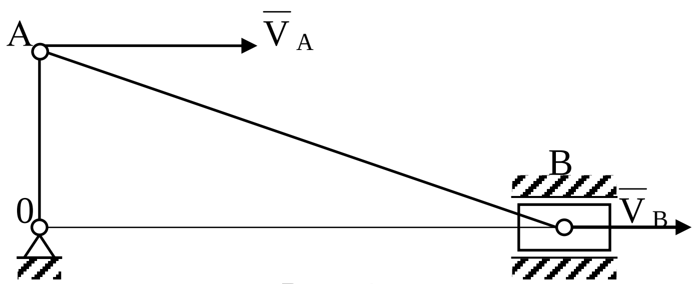


Рис. 4

Однаковість швидкостей не слід розуміти як їх сталість, як їх незмінність за часом. Якщо тіло рухається поступально, то у дану мить швидкість усіх точок тіла однакова, з часом швидкість може змінюватися. Але якщо зміниться швидкість однієї точки, то на стільки ж зміниться і швидкість усіх інших точок тіла, і вона все-таки зостанеться однаковою для усіх точок тіла. Однаковість швидкостей усіх точок тіла – необхідний, але недостатній признак поступального руху тіла. Може так бути, що в якусь мить швидкість усіх точок тіла буде однаковою, але у наступну мить порушиться ця рівність. Так, наприклад, рух шатуна $AB$ кривошипно-повзунного механізму не являється поступальним, але при деяких положеннях механізму (рис. 4) швидкість усіх точок шатуна буде однаковою: $V_A = V_B = V_K$, де $V_K$ - швидкість будь-якої точки шатуна.

При поступальному русі тіла швидкість його точок у кожну мить не тільки однакова, але й однаково змінюється. Продиференцюємо за часом попереднє рівняння:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a} .$$

При поступальному русі тіла вектор прискорення точки $A$ дорівнює вектору прискорення деякої іншої точки тіла.

Таким чином, при поступальному русі тіла його точки описують однакові траєкторії, у кожну мить мають одинакові вектори швидкостей і однакові вектори прискорень. Звідси витікає, що у будь-яку дану мить рівні між собою модулі швидкостей усіх точок, модулі прискорень, відповідні направляючі косинуси, а також нормальні і тангенціальні прискорення усіх точок. Внаслідок повної тотожності руху усіх точок більшість задач кінематики поступального руху розв'язуються методами кінематики точки.

## 2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Як було вже показано, для визначення руху твердого тіла достатньо визначити рух трьох його точок, які не лежать на одній прямій. Хай під час руху тіла будь-які дві його точки, наприклад $O$ і $O_1$ залишаються нерухомими. Тоді рух тіла можна визначити рухом будь-якої третьої точки, яка належить тілу і не лежить на одній прямій з точками $O$ і $O_1$. Виберемо цю точку довільно і, з'єднавши усі три точки прямолінійними відрізками, одержимо трикутник. Так як точки $O$ і $O_1$ нерухомі, то нерухома і сторона $OO_1$ цього трикутника, і рух трикутника, а також і всього тіла визначити поворотом площини трикутника навколо його сторони $OO_1$. Третя точка вибрана довільно, значить, обертається навколо прямої $OO_1$ будь-яка площина, яка буде проведена у тілі через цю пряму. Такий рух тіла називають обертальним рухом, або, коротко, обертанням, а нерухому пряму $OO_1$, навколо якої обертається тіло, - віссю обертання.

Якщо рух тіла визначити рухом його точок, то обертання навколо осі можна визначити як рух твердого тіла, при якому усі точки тіла описують кола з центрами на одній і тій же нерухомій прямій, що перпендикулярна площинам цих кіл, а вісь обертання можна визначити як нерухому пряму, на якій розташовані центри кіл, описаних точками обертаючого тіла.

Побудуємо систему координат $x0yz$, спрямовуючи вісь $0z$ по осі обертання тіла (рис. 5). Ця система нерухома і не зв'язана з обертовим тілом. Будемо називати такі системи координат основними. Побудуємо тепер другу, рухому, систему координат $x'0y'z'$, спрямовуючи вісь $0z'$ також по осі $OO_1$ обертання тіла, а вісь $0x'$ - на будь-яку точку $K_1$ тіла. Ця система координат незмінно зв'язана з тілом і обертається разом з ним відносно основної системи $x0yz$.

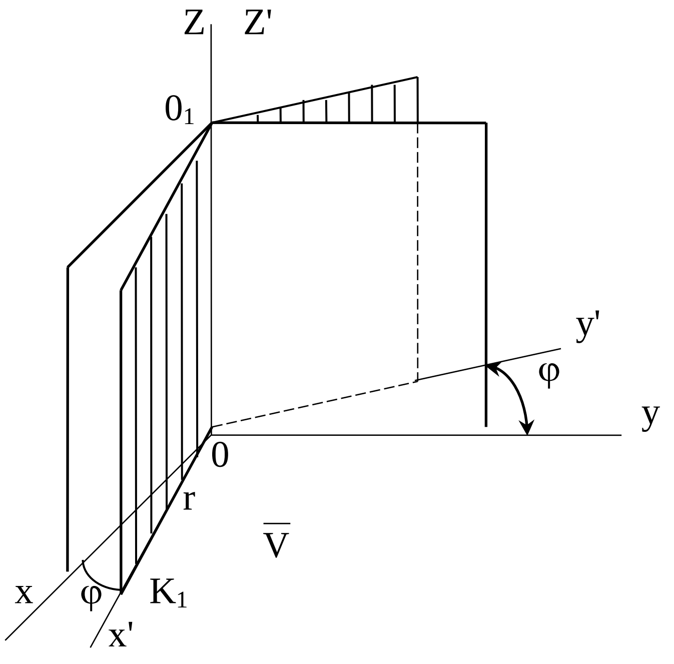


Рис. 5

Кут, на який повертається площина, що проходить через вісь обертання і яку-небудь точку обертаючого тіла називають кутом повороту і позначають буквою $\varphi$. Так, якщо у початкову мить осі $0x'$ і $0x$ співпадали, то кутом повороту буде двогранний кут між нерухомою площиною $x0z$ і рухомою площиною $x'0z'$, вимірюваний лінійним кутом $x0x'$. Кут $\varphi$ можна розглядати як кутову координату тіла, тому що він визначає положення всього тіла, що обертається. Вимірюється кут $\varphi$ у радіанах.

Кут $\varphi$ вважається додатним, якщо він відрахований проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі $0z$. При відрахуванні в іншу сторону кут вважається від'ємним.

Щоб визначити обертання тіла треба знати кут повороту як деяку неперервну однозначну функцію часу:

$$\varphi = \varphi(t) \ .$$

Рівняння є рівнянням обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Усяка площина $OO_1K$, проведена через вісь обертання і будь-яку точку тіла, повертається за даний час на такий кут, на який за цей же час повернулася площина $x'0z'$. Це витікає з умови незмінності твердого тіла.

Кут повороту характеризує обертання тіла тільки з геометричної сторони. Щоб охарактеризувати обертання тіла не тільки у просторі, а й за часом візьмемо відношення зміни $\Delta\varphi$ кута до часу $\Delta t$, за який ця зміна відбувалася:

$$\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t \, .$$

Відношення називається середньою кутовою швидкістю тіла.

Границею відношення при $\Delta t \to 0$, є перша похідна від кута повороту за часом. Вона характеризує зміну кута повороту в дану мить, тобто характеризує обертання тіла не тільки по відношенню до оточуючого простору, а і за часом. Ця алгебраїчна величина прийнята через часову просторову міру обертання твердого тіла навколо осі і її називають кутовою швидкістю тіла:

$$\omega = d\varphi / dt \ .$$

Знак похідної (3.9) вказує, в яку сторону повертається тіло навколо осі $0z$. Якщо похідна додатна, то спостерігач з додатного боку осі $0z$ буде бачити тіло, яке обертається проти годинникової стрілки. При від'ємній похідній обертання тіла відбувається у протилежному напрямі.

Розмірність кутової швидкості дорівнює відношенню розмірності кута повороту до розмірності часу. Але кут повороту є абстрактною величиною, розмірність якої – одиниця або радіан, а час найчастіше всього виміряється у секундах. Отже розмірністю кутової швидкості тіла буде $C^{-1}$, або рад/с.

Рівномірне обертання іноді характеризують числом $n$ обертів, здійснюваних тілом за одиницю часу (як правило за хвилину). Цю величину $n$ називають частотою обертання.

Якщо тіло робить $n$ об/хв., то воно повертається за кожну хвилину на $2\pi n$ радіан, а за секунду – в 60 разів менше, отже

$$\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30, \text{ рад/сек.}$$

За один і той же час усі частини твердого тіла повертаються навколо осі на один і той же кут. Значить, кутова швидкість є загальною мірою обертання для всього тіла, і кожну мить тверде тіло, що крутиться навколо нерухомої осі, має тільки одну кутову швидкість.

При обертанні тіла навколо нерухомої осі його кутову швидкість зручніше розглядати як алгебраїчну величину, умовно вважаючи її додатною при обертанні тіла проти руху стрілок годинника.

Зміна кутової швидкості відбувається із зміною часу і, взагалі, буває різною у різні моменти часу. Просторово-часову міру, що характеризує зміну кутової швидкості у дану мить, називають кутовим прискоренням тіла.

Хай алгебраїчна величина кутової швидкості змінилася на $\Delta\omega$ за проміжок часу $\Delta t$. Границя відношення $\Delta\omega / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ виражає кутове прискорення тіла і позначається грецькою буквою $\varepsilon$ (епсілон):

$$\varepsilon = d\omega / dt,$$

або беручи до уваги

$$\varepsilon = d^2\varphi / dt^2,$$

Найчастіше час вимірюється у секундах, тоді розмірність кутового прискорення буде $C^{-2}$, або рад/с$^2$.

Якщо з часом кутова швидкість тіла збільшується, то похідна $d\omega / dt$ має той же знак, що і $\omega$, - обертання тіла прискорене. Якщо ж кутова швидкість з часом зменшується, то похідна $d\omega / dt$ і кутова швидкість мають різні знаки, - обертання тіла сповільнене. Кожне таке обертання, і прискорене і сповільнене, називається перемінним обертанням.

У задачах кінематики часто зустрічається **рівнозмінне** обертання, тобто таке обертання твердого тіла навколо осі, коли кутове прискорення залишається сталим.

$$\varepsilon = d\omega / dt = const.$$

Помножимо на $dt$ і проінтегруємо це рівняння

$$\omega = \varepsilon t + C_1$$

Щоб визначити $C_1$ - сталу інтегрування, необхідно підставити у це рівняння замість $\omega$ і $t$ які-небудь їх поодинокі відповідні значення. Наприклад, якщо при $\Delta t = 0$ кутова швидкість була $\omega_0$, то, підставляючи ці поодинокі значення аргументу $t$ і функції $\omega$, визначаємо сталу $C_1 = \omega_0$.

Представимо $\omega$ як $d\varphi / dt$, розділимо перемінні, проінтегруємо і визначимо постійну інтегрування з початкових даних, одержимо формулу кута повороту при рівномірному обертанні тіла.

Отже, рівнозмінне обертання тіла описується трьома співвідношеннями

$$\varepsilon = const; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2.$$

При рівномірному обертанні кутова швидкість стала і, підставляючи у $\varepsilon = 0$, одержимо формули, придатні тільки для рівномірного обертання:

$$\varepsilon = 0; \quad \omega = const; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \ .$$

## 3. Траєкторії, швидкості і прискорення точок тіла при його обертанні.

Якщо тіло обертається, то його точки описують кола, центри яких лежать на осі обертання тіла. Умовно перетнемо тіло, яке обертається якою-небудь площиною, перпендикулярною до осі обертання. У цій площині будуть знаходитися колові траєкторії усіх розташований у ній точок тіла і усі точки тіла, що лежать у цій площині, зостануться у ній за увесь час обертання тіла. Траєкторії других точок тіла розташовані у паралельних площинах.

Побудуємо дві системи координат: основну (нерухому) $x0yz$ і рухому $x_1 0 y_1 z_1$ (рис. 6). Хай осі $0z$ і $0z_1$ співпадають і направлені по осі обертання. Координати $x_1, y_1, z_1$ довільної точки $K$ тіла при його обертанні відносно рухомої системи не змінюються при рухові тіла, так як осі рухомої системи незмінно зв'язані з тілом і обертаються разом з ним. Координати $x, y, z$ тієї ж точки відносно основної системи зв'язані з координатами $x_1, y_1, z_1$ формулами, які уперше дав Ейлер:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi;\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi;\ z = z_1$$

і зрозумілими з рис. 6, на якому показані точка $K$ і обидві координатні системи. Вісь аплікат на рисунку не показана, тому що вона перпендикулярна площині креслення.

Аналогічно можна визначити рухомі координати по нерухомим і куту $\varphi$:

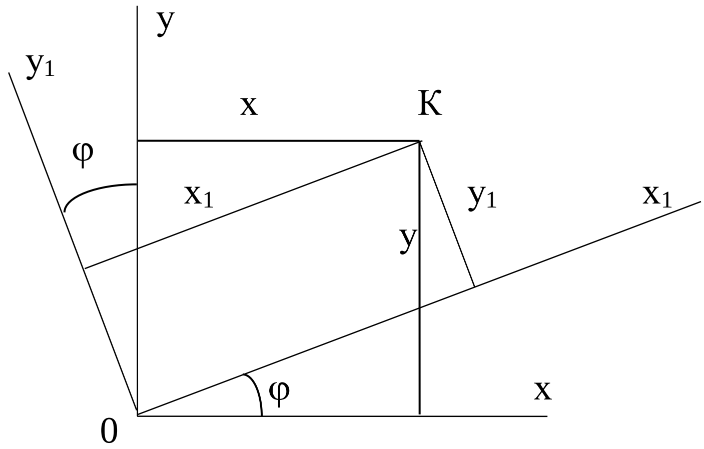

Рис. 6

$$x_1 = x\cos\varphi + y_1 \sin\varphi;\ y_1 = y\ \cos\varphi - x\sin\varphi;\ z_1 = z$$

Для одержання проекцій швидкості на нерухомі осі координат продиференцюємо за часом рівняння, розглядаючи $\varphi$ як функцію часу. Одержимо

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -(x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = (x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt},$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = 0$$

Але вираз, який маємо у дужках в першому рівнянні, є $y$, а у другому $x$, а тому

$$V_x = -y\omega, \quad V_y = x\omega, \quad V_z = 0$$

Підводячи ці рівняння до квадрату і складаючи їх, знайдемо

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = (x^2 + y^2)\omega^2$$

У лівій частині цього рівняння – квадрат повної швидкості точки, а у дужках правої частини – квадрат відстані точки від осі. Таким чином, одержана одна з найважливіших формул кінематики

$$V = \omega r$$

- швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань її від осі.

Якщо заданим є число $n$ обертів за хвилину, то, підставляючи замість $\omega$ вираз, знаходимо

$$V = \pi r n / 30$$

Швидкість точок на поверхні циліндра (шківа, барабана, вала і т.п.), який обертається навколо своєї осі, називають коловою швидкістю тіла. Колова швидкість дорівнює добутку $\omega$ на радіус $R$ тіла: $V_{колов} = \omega R$.

Якщо у виразах замість швидкості $V$ підставимо вираз, то одержимо дотичне і нормальне прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Дотичне прискорення

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r, \text{ або } a_t = \varepsilon r$$

Дотичне прискорення точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добуткові кутового прискорення тіла на відстань цієї точки до осі.

Кожна точка тіла, що обертається навколо осі, описує коло, а тому радіус кривизни $\rho$ траєкторії точки дорівнює відстані $r$ цієї точки від осі обертання тіла. Маємо

$$a_n = V^2 / \rho = (\omega r)^2 / r, \text{ або } a_n = \omega^2 r$$

Нормальне прискорення точка тіла, що обертається навколо деякої осі, звичайно називають доцентровим прискоренням. Воно дорівнює добутку квадрата кутової швидкості на відстань точки від осі обертання тіла.

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2}\text{ , або } a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Іноді буває необхідним визначити проекції прискорення тіла, що обертається. Продиференцюємо рівняння (3.17) за часом:

$$a_x = -y\varepsilon - x\omega^2, \quad a_y = x\varepsilon - y\omega^2, \quad a_z = 0$$

Отже,

$$a_{\tau x} = -y\varepsilon, \quad a_{\tau y} = x\varepsilon, \quad a_{nx} = -x\omega^2, \quad a_{ny} = -y\omega^2$$

## 4. Плоский рух твердого тіла.

Вивчивши кінематику твердого тіла, яке здійснює найпростіший рух (поступальний і обертовий навколо нерухомої осі), перейдемо до вивчення плоского руху, який часто розглядається як комбінація двох цих найпростіших рухів тіла.

При плоскому рухові тіла кожна його частинка описує плоску траєкторію. Траєкторії всіх точок тіла лежать в паралельних площинах. Кожну з цих площин можна назвати площиною руху тіла.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі є поодиноким випадком плоского руху, так як всі точки тіла, що обертається, рухаються в площинах, перпендикулярних до осі обертання, а отже, в площинах, паралельних між собою.

Наведемо інший приклад плоского руху. Уявімо собі, що на столі лежить закрита книжка. Не розкриваючи, будемо її переміщувати поверхнею столу, але так, щоб контакт книжки зі столом ні в одній точці не був би порушений, в решті рух книжки довільний. При цій умові частинки книжки опишуть траєкторії, які будуть лежати в паралельних до столу площинах і кожна сторінка буде рухатися у тій площині, в якій вона знаходилася до початку руху.

Плоский рух часто зустрічається в техніці. Більшість сучасних механізмів мають ланцюги, які здійснюють тільки плоский рух. Такі механізми називаються плоскими.

Якщо тіло, яке знаходиться у стані плоского руху, перетнути площиною, в якій лежить траєкторія будь-якої з точок, то утворена цим перетином плоска фігура буде рухатися тільки у цій площині. Рух точок тіла, лежачих на перпендикулярі до площини фігури в будь-якій його точці, цілком однакові і рівні рухові основи цього перпендикуляра, а тому рух тіла може бути охарактеризований рухом фігури в її площині. Для дослідження плоского руху тіла достатньо дослідити рух плоскої фігури, одержаної при перетині тіла однією з цих площин. Так, в наведеному прикладі рух книжки цілком визначається рухом будь-якої з її сторінок у площині, паралельній площині стола.

Ця обставина дозволяє замінити вивчення плоского руху тіла вивченням руху плоскої фігури в її площині.

На рис. 7, а представлена система декартових координат $x0y$, яку будемо вважати нерухомою і назвемо її основною системою відліку. Нехай деяка фігура, розташована у площині $x0y$, рухається в ній. Нанесемо на цій фігурі іншу систему координат $x_1Ey_1$ з початком у довільній точці $E$. Цю систему назвемо рухомою, тому що вона рухається разом з фігурою, а початок координат - точку $E$ назвемо полюсом. Щоб визначити положення фігури на площині $x0y$, достатньо знати положення системи рухомих координат $x_1Ey_1$ відносно основних $x0y$, тобто знати координати $x_E, y_E$ полюса $E$ і кут, на який повернулася фігура, наприклад, кут $\varphi$ між додатними напрямками осей $0x$ і $Ex_1$. По мірі руху фігури положення рухомої системи координат $x_1Ey_1$ відносно нерухомої системи $x0y$ міняється, і щоб визначити рух фігури, необхідно знати ці величини (координати полюса $x_E, y_E$ і кут повороту $\varphi$) як деякі неперервні однозначні функції часу

$$x_E = x_E(t); \quad y_E = y_E(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

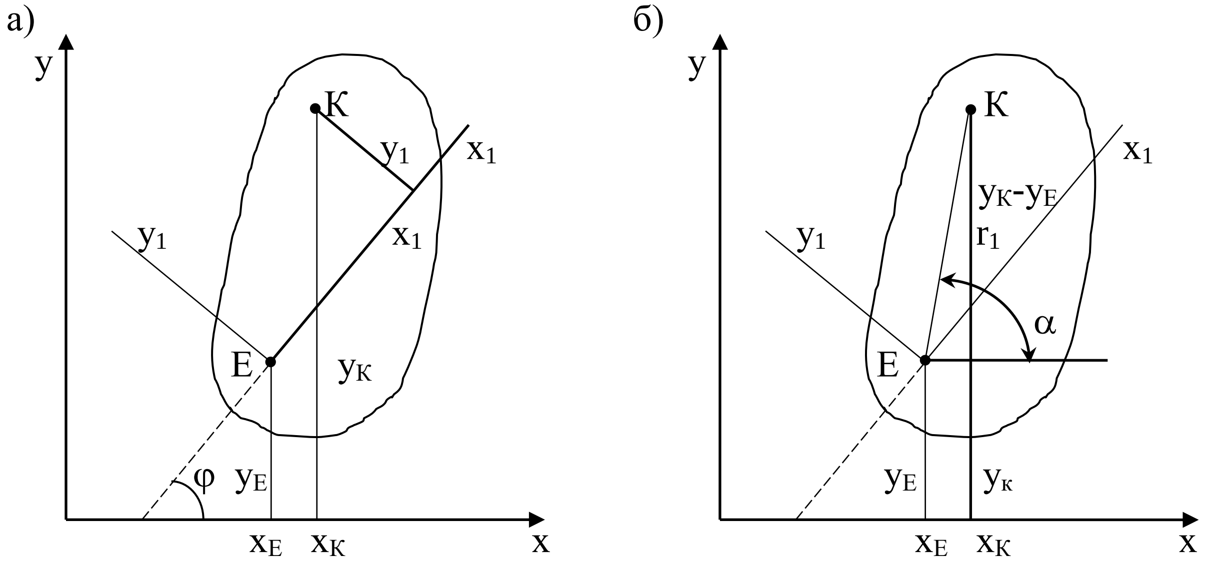


Рис. 7

Ці рівняння є рівняннями руху плоскої фігури в її площині, вони визначають плоский рух тіла.

Дійсно, визначити рух механічної системи (у нашому випадку плоскої фігури) – означає дати положення кожної її точки в заданий момент часу. Написані три рівняння дозволяють визначити місце знаходження будь-якої точки фігури в дану мить. Визначимо, наприклад, де на площині $x0y$ знаходиться точка $K$ (рис. 7, а), координати якої в рухомій системі позначаються через $x_1$ і $y_1$. Рухомі осі координат $x_1Ey_1$ і точка $K$ незмінно зв'язані з фігурою, тому координати $x_1$ і $y_1$ точки $K$ у рухомій системі постійні. Для визначення координат $x$ і $y$ точки $K$ в основній системі $x0y$ скористаємося формулою перетворення координат відомою з курсу аналітичної геометрії і очевидною з рис. 7, б.

$$x = x_E + x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi; \; y = y_E + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi$$

Звернемо увагу на те, що два перших рівняння тотожні рівнянням руху точки на площині або рівнянням плоского поступального руху, третє рівняння в тотожне рівнянню обертання навколо нерухомої осі. На цій підставі ще Ейлер запропонував рух плоскої фігури як складний рух, який складається з двох рухів: переносного (поступального), що визначається рухом полюсу $E$ , і відносного обертального навколо полюса, точніше, навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно площині фігури.

Два перших рівняння являють собою поступальний рух плоскої фігури. Разом з тим вони виражають координати полюса $E$ у функції часу. Отже переносний (поступальний) рух фігури визначається рухом полюса. Якщо б за полюс була вибрана будь-яка інша точка фігури, то два рівняння були б іншими, а отже, змінився б і описуваний цими рівняннями рух плоскої фігури.

Навпаки, третє рівняння не зв'язане з полюсом $E$, тому обертання фігури (кут повороту $\varphi$ , кутова швидкість ω і кутове прискорення $\varepsilon$ ) не повинні залежати від вибору полюса.

Отже, переносний (поступальний) рух фігури в її площині залежить від вибору полюса, а обертовий – не залежить.

## 5. Швидкість і прискорення точок плоскої фігури.

Для одержання проекцій швидкості на нерухомій осі координат продиференціюємо за часом рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_E}{dt}-(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt};\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy_E}{dt}+(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Отже, маючи на увазі рівняння (3.15):

$$V_x=V_{Ex}-(y-y_E)\frac{d\varphi}{dt};\quad V_y=V_{Ey}+(x-x_E)\frac{d\varphi}{dt}$$

Останні члени правих частин виражають згідно з формулами Ейлера проекції швидкості точки $K$ при обертанні фігури навколо полюса $E$.

Проведемо радіус-вектор $\overline{EK}-\bar{r}_1$ (рис. 7, б) і позначимо через $\alpha$ кут, складений ним в дану мить з віссю абсцис. Тоді $\cos\alpha=(x_K-x_E)/r_1;\quad \sin\alpha=(y_K-y_E)/r_1$ і формула набуває такого вигляду:

$$V_x=V_{EX}-r_1\sin\alpha\omega;\quad V_y=V_{EY}+r_1\cos\alpha\omega$$

Отже, вектор швидкості будь-якої точки $K$ плоскої фігури можна розглядати як геометричну суму двох векторів: 1) $\overline{V}_E$ - швидкості у поступальному русі, яка дорівнює швидкості будь-якої точки $E$, незмінно зв’язаної з фігурою і прийнятої за полюс, і 2) швидкості в обертовому русі фігури навколо полюса $E$. Цю швидкість позначимо $\overline{V}_r$:

$$\overline{V}_K=\overline{V}_e+\overline{V}_r,$$

де $\overline{V}_e=\overline{V}_E$ і $V_r=\omega\cdot EK$.

Швидкість $\overline{V}_r$ точки $K$ відносно точки $E$ спрямована перпендикулярно $EK$ в бік обертання фігури.

Отже, швидкість будь-якої точки фігури, яка знаходиться у плоскому русі, дорівнює геометричній сумі швидкості цієї точки відносно полюса і швидкості полюса.

Ту точку фігури, яка знаходиться у плоскому русі, швидкість якої в дану мить дорівнює нулю, називають миттєвим центром швидкостей (МЦШ).

Якщо МЦШ прийняти за полюс $E_{мцш}$, то рівняння набуде такого вигляду:

$$V_K=\omega KE_{мцш},$$

де $\omega$ - кутова швидкість фігури, $KE_{мцш}$ - відстань точки $K$ від МЦШ.

Формула виражає швидкість будь-якої точки $K$ тіла, яке виконує обертовий рух. Розподіл швидкостей точок фігури такий, що немов би фігура обертається у дану мить навколо МЦШ. Одначе в наступний момент часу МЦШ зміститься в іншу точку площини (тому він і називається миттєвим), і картина розподілу швидкостей буде такою, немов би вся фігура обертається навколо нового центру. Проте в теорії плоского руху і в її практичному використанні, при дослідженні і конструюванні машин МЦШ грає важливу роль.

Познайомимося з деякими методами знаходження МЦШ.

Якщо відомий напрям швидкостей хоча б двох точок фігури, то МЦШ легко визначити, провівши з цих точок перпендикуляри до напрямів цих швидкостей. Точка перетину перпендикулярів буде МЦШ.

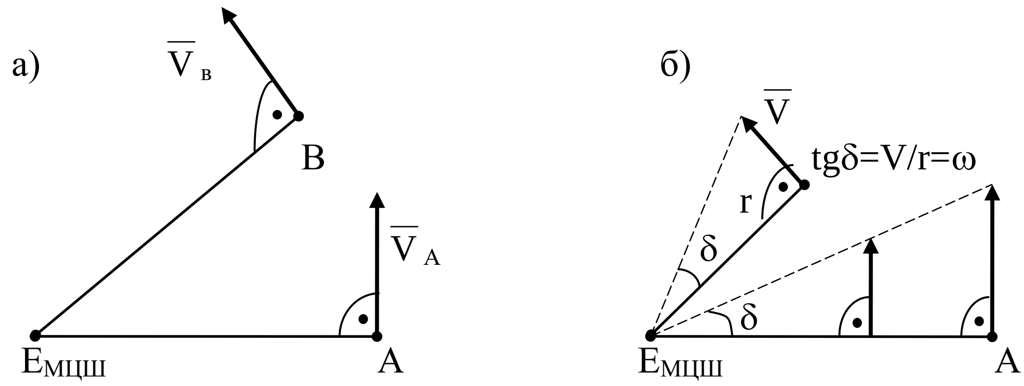


Рис. 8

Нехай відома швидкість якої-небудь точки $A$ (рис. 8, а) фігури, яка знаходиться в плоскому русі. Проведемо через точку $A$ пряму, перпендикулярну вектору швидкості цієї точки. Згідно з основною теоремою кінематики про швидкість точок твердого тіла проекції на цю пряму швидкостей її точок рівні між собою і, зокрема, дорівнюють проекції швидкості точки $A$. Але проекція швидкості точки $A$ на цю пряму дорівнює нулю, так як пряма проведена перпендикулярно швидкості. Отже, швидкості всіх точок цієї прямої перпендикулярні цій прямій.

Нехай відома швидкість або хоча б напрям швидкості якої-небудь точки $B$, і аналогічними міркуваннями покажемо, що швидкості всіх точок цієї прямої перпендикулярні до неї. Проекції швидкості точки $E$, яка лежить на перетині обох перпендикулярів, на кожній з цих перпендикулярів повинні дорівнювати нулю. Отже, швидкість точки $E$ дорівнює нулю, тому що ця швидкість не може бути перпендикулярною одночасно до двох перпендикулярів, які перетинаються. Але на всій площині має місце лише один МЦШ. Значить, він знаходиться в точці $E$ перетину двох перпендикулярів, поставлених до відомих швидкостей двох точок. У цій же точці повинні перетинатися перпендикуляри, поставлені до швидкостей усіх точок фігури. Швидкість є вектор прикріплений, а тому перпендикуляр до вектора швидкості точки треба ставити у цій точці.

Швидкості точок фігури пропорційні їх відстані $r$ від миттєвого центра швидкостей. Тому, з’єднуючи з $E_{мцш}$ початок і кінець вектора швидкості будь-якої точки фігури, одержимо подібні прямокутні трикутники, в яких тангенс кута при вершині $E_{мцш}$ дорівнює кутовій швидкості $\omega$ (рис. 8., б).

Якщо перпендикуляри до швидкостей двох яких-небудь точок плоскої фігури паралельні між собою, то МЦШ буде нескінченно віддалений і вектори швидкостей цих точок фігури в даний момент часу рівні між собою.

Якщо перпендикуляри до швидкостей двох яких-небудь точок плоскої фігури співпадають (рис. 9), то МЦШ лежить на відрізкові прямої, що з'єднує ці точки, і ділить його на частини, пропорційні швидкостям цих точок ($V_A : V_B = AE_{мцш} : BE_{мцш}$) зовнішнім чином, якщо швидкості цих точок спрямовані в один бік (рис. 9., а), і внутрішнім, якщо у протилежні боки (рис. 9, б).

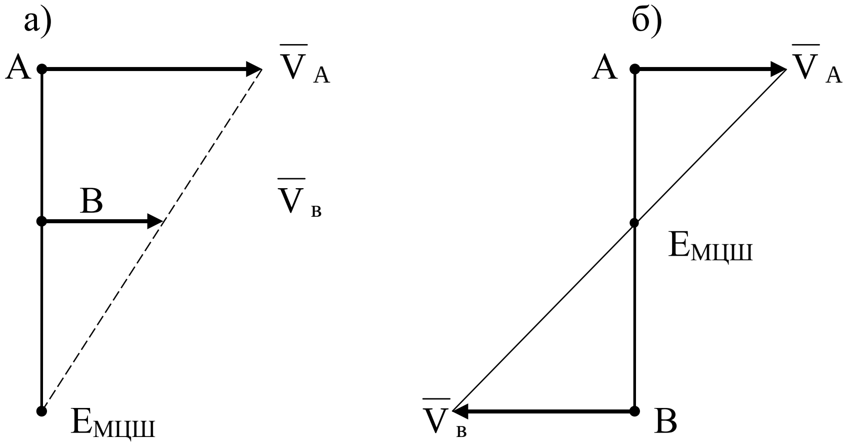


Рис. 9

Якщо яка-небудь плоска фігура котиться по іншій фігурі, яка лежить з нею в одній площині (наприклад, рухома шестерня котиться по нерухомій), то швидкість точки фігури, що котиться, повинна бути рівною нулю, якщо, звичайно, кочення не супроводжується явищем ковзання або буксування. Так як кожну мить на фігурі, що здійснює плоский рух, має місце тільки одна точка із швидкістю, рівною нулю (МЦШ), то він і знаходиться у точці дотику.

Нехай, наприклад, колесо котиться по прямолінійній рейці (рис. 10). Розглянемо рух колеса як складовий, який складається із поступального руху разом з віссю колеса $O$ і обертального руху навколо цієї осі. На рис. 10, а показані швидкості деяких точок колеса в поступальному русі, а на рис. 10, б швидкості тих же точок при обертанні колеса навколо його центра. У випадку кочення без ковзання і без пробуксовування колова швидкість точок обода колеса по модулю дорівнює швидкості осі, так як при обертанні колеса на один повний оберт його вісь переміститься на $2\pi r$, а точки обода опишуть в їх відносному обертовому русі кола тієї ж довжини. Швидкість точок колеса по відношенню до нерухомої системи відліку зображена на рис. 10, в. Ці швидкості можна одержати як швидкості при обертанні колеса навколо миттєвого центра швидкостей, співпадаючого з точкою дотику колеса і рейки (рис. 10, г). Швидкість кожної точки спрямована по дотичній до траєкторії цієї точки.

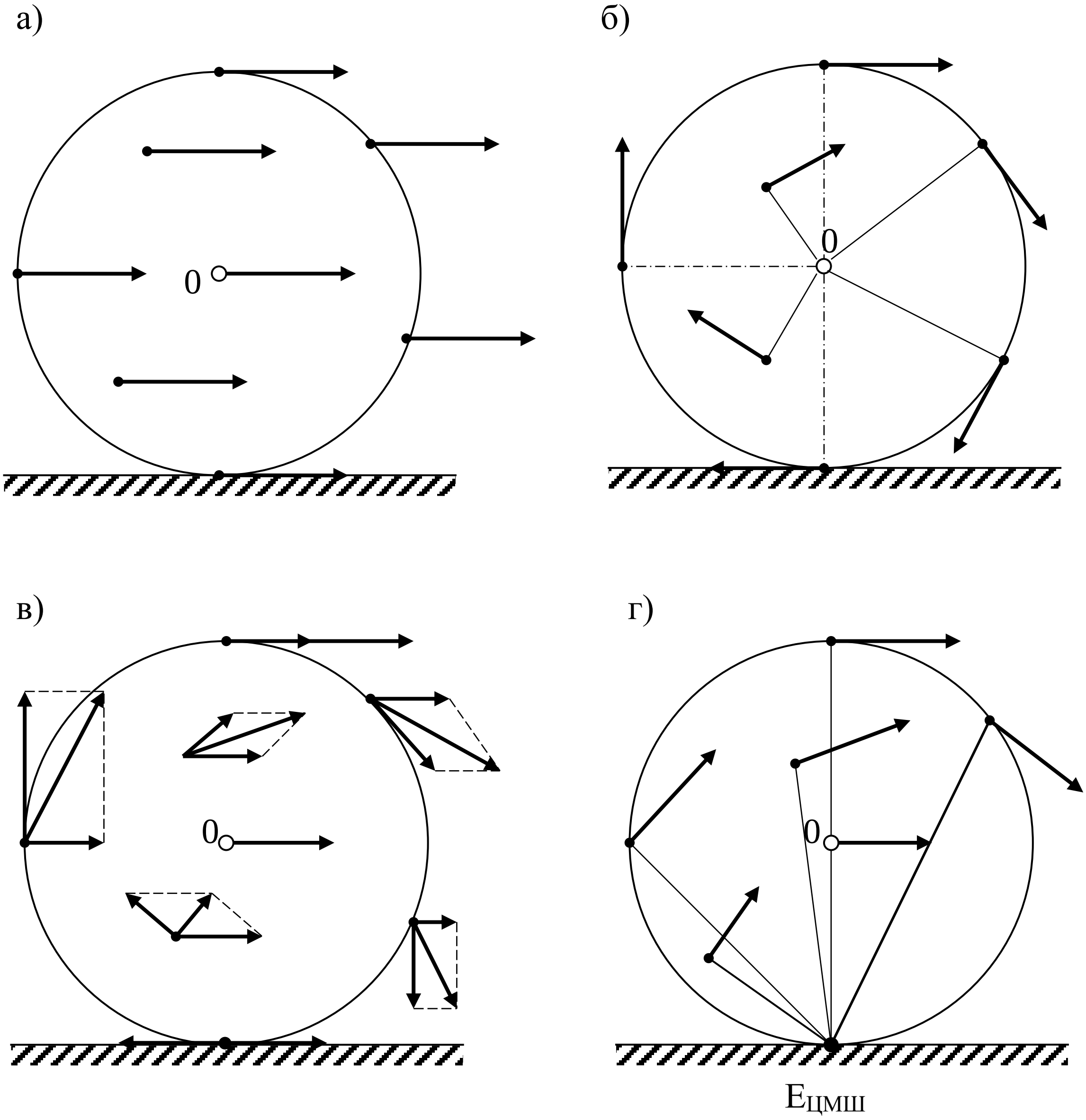


Рис. 10

МЦШ лежить на самій фігурі, яка котиться, або на незмінно з нею зв'язаною нерухомою площиною. Точку, співпадаючу з МЦШ, але лежачу на нерухомій площині, по якій рухається фігура, називають миттєвим центром обертання. У розглянутому прикладі миттєвий центр швидкостей лежить на ободі колеса, а миттєвий центр обертання – на рейці.

Перейдемо до прискорення точок фігури при плоскому рухові. Щоб визначити проекції прискорення точки $K$ плоскої фігури, треба про диференціювати рівняння (3.27), які визначають проекції швидкості цієї точки. Уведемо позначення $x_1 = x - x_E$ і $y_1 = y - y_E$ і перепишемо ці рівняння так:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_E}{dt} - y_1 \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_E}{dt} + x_1 \frac{d\varphi}{dt};$$

диференціюючи, одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x_E}{dt^2}-y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{dy_1}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y_E}{dt^2}+x_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

За формулами Ейлера

$$\frac{dx_1}{dt}=-y_1\frac{d\varphi}{dt}\quad i\quad \frac{dy_1}{dt}=x_1\frac{d\varphi}{dt};$$

і попередні рівняння набувають вигляду:

$$a_x=a_{EX}-y_1\varepsilon-x_1\omega^2;\quad a_y=a_{EY}+x_1\varepsilon-y_1w^2$$

У правих частинах цих рівнянь згідно з (3.24) другі члени виражають проекції дотичного, а треті – проекції доцентрового прискорення точки $K$ при обертанні фігури відносно полюса $E$. Вони відрізняються від відомих рівнянь тільки тим, що в даному випадку вісь обертання проходить не через початок координат $O$, а через полюс $E$ (рис. 11).

Ці рівняння показують, що проекції на яку-небудь нерухому вісь прискорення кожної точки $K$ фігури дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій на цю ж вісь трьох його складових: прискорення полюса $E$, дотичного прискорення точки $K$ при обертанні фігури навколо полюса $E$ і доцентрового прискорення точки $K$ у тому ж русі фігури.

Можна записати ці рівняння і в геометричній формі. Дійсно, якщо проекції вектора прискорення на всяку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на ту ж вісь трьох векторів, то вектор прискорення точки $K$ можна визначити як геометричну суму трьох векторів: прискорення полюса $E$, дотичного прискорення точки $K$ при його обертанні навколо полюса $E$ і доцентрового прискорення точки $K$ у тому ж рухові фігури:

$$\overline{a}=\overline{a}_E+\overline{a}_\tau+\overline{a}_n,$$

де, позначивши відстань від точки $K$ до полюса через $r_1$, одержимо:

$$a_\tau=\varepsilon r_1\quad i\quad a_n=\omega^2 r_1.$$

У кожну мить в площині фігури має місце одна точка (миттєвий центр прискорення), прискорення якої $a_{мцп}$ дорівнює нулю. Прискорення інших точок фігури в цю мить можна представити як прискорення при обертанні її навколо МЦП. МЦШ і МЦП не співпадають між собою.

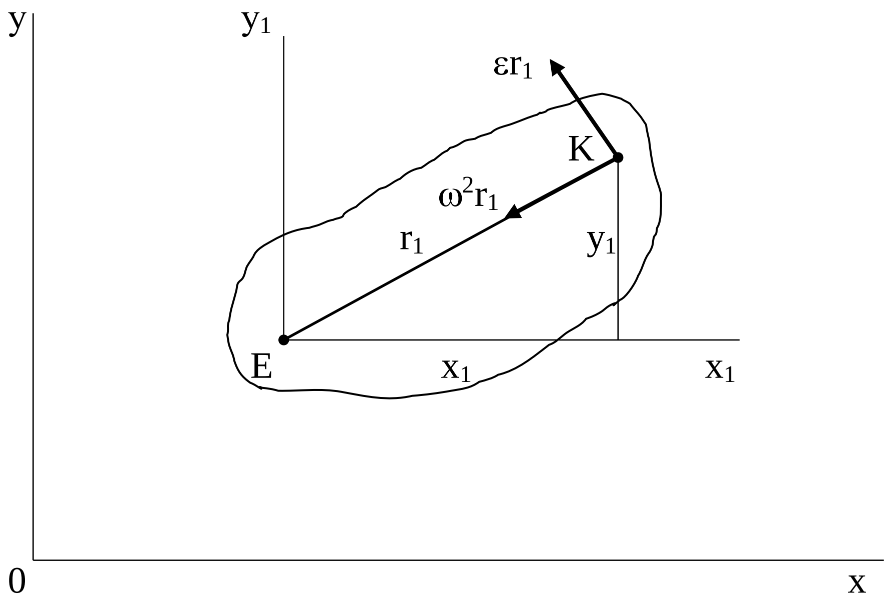


Рис. 11