

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
**Технічне обслуговування та ремонт
повітряних суден і авіадвигунів**

за темою – Закони динаміки

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 № 8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол
від 10.08.2022 № 1

Розробник: доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.т.н., доцент,
спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Долударєва Я.С.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.
2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

План лекції:

1. Теорема про зміну кількості руху.
2. Теорема про зміну кінетичної енергії.
3. Закон зберігання механічної енергії.
4. Теорема про моменти інерції тіла відносно паралельних осей.
5. Теорема про зміну кінетичної енергії системи.
6. Кінетична енергія твердого тіла.

Рекомендована література:

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишин та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д.

Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

Текст лекції

1. Теорема про зміну кількості руху

Кількістю руху $m\vec{V}$ матеріальної точки називається вектор, рівний добутку маси точки на її швидкість і маючий напрям швидкості. Кількість руху є динамічною мірою руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху

$$[mV] = [m][V] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

Імпульсом постійної сили $\vec{F}t$ називається вектор, рівний добутку сили на час її дії. Імпульс сили є міра її дії за часом.

Одиниця імпульса сили

$$[Ft] = [F][t] = [m][a][t] = (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}$$

Кількість руху і імпульс сили виражаються в однакових одиницях, зв'язок між ними встановлює теорема про зміну кількості руху.

Теорема. Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той же проміжок часу.

Доведення. Розглянемо випадок, коли матеріальна точка рухається під дією постійної сили \vec{F} . Рух буде рівноперемінним, формула швидкості якого записується, як відомо, так:

$$V = V_0 + at.$$

Перенесемо V_0 в ліву частину і помножимо обидві частини рівняння на масу m матеріальної точки:

$$mV - mV_0 = mat.$$

Але ж добуток маси точки на її прискорення є сила, під дією якої точка рухається. Таким чином,

$$mV - mV_0 = Ft. \quad (1)$$

У лівій частині рівняння (4.1) маємо зміну кількості руху на час t , а в правій – імпульс сили за той же проміжок часу, що і вимагалось довести.

Якщо рух уповільнений ($V < V_0$), то вектор сили спрямований в ту ж сторону, протилежну вектору швидкості, і, отже, формулу (1) силу треба підставляти з від'ємним знаком.

У випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили увесь проміжок часу t можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати постійним, а шлях – прямолінійним, тоді імпульс сили за кінцевий проміжок часу t буде дорівнювати сумі елементарних імпульсів. У цьому випадку вираз теореми про зміну кількості руху:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (2)$$

Якщо до матеріальної точки прикладено декілька постійних сил, то зміна кількості руху буде дорівнювати сумі (алгебраїчній, якщо сили діють

по одній прямій, або векторній, якщо сили діють під кутом одна до одної) імпульсів даних сил:

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum (\bar{F}_i t) \quad (3)$$

2. Теорема про зміну кінетичної енергії

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічна енергія буває двох видів: кінетична і потенціальна.

Кінетичною енергією або енергією руху називається енергія, якою володіє будь-яка матеріальна точка при русі. Кінетична енергія є динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$K = mV^2 / 2 \quad (4)$$

Кінетична енергія – величина скалярна і завжди додатна.

Одиниця кінетичної енергії:

$$[K] = [m][V^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює теорема про зміну кінетичної енергії.

Теорема. Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому ж шляху.

Доведення. Розглянемо загальний випадок руху матеріальної точки, тобто на випадок криволінійного руху під дією змінної сили (рис. 1). Напишемо для цієї точки (M) основне рівняння динаміки:

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

де \bar{F} - діюча на точку M сила, \bar{a} - повне прискорення точки M , m - маса точки.

Спроекуємо це векторне рівняння на напрям швидкості V точки:

$$ma \cos \alpha = F_t = F \cos \alpha.$$

Як відомо з кінематики

$$a \cos \alpha = a_t = \frac{dV}{dt};$$

отже

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos \alpha$$

Помноживши обидві частини останнього рівняння на нескінченно мале прирощення ds , одержимо

$$m \frac{dV}{dt} ds = F \cos \alpha ds. \quad (5)$$

Вираз, що стоїть у лівій частині (4.5), перетворимо таким чином:

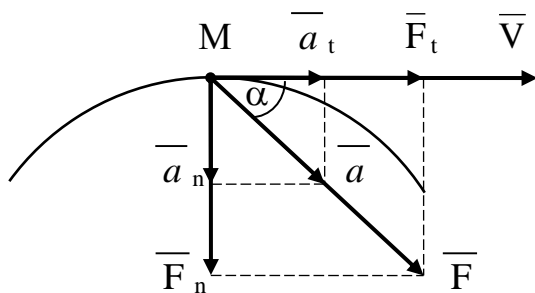


Рис. 1

$$m \frac{dV}{dt} ds = m dV \frac{ds}{dt} = m V dV,$$

отже

$$m V dV = F \cos \alpha ds \quad (6)$$

Інтегруючи обидві частини рівняння (6) в межах для швидкості від V_0 до V і для шляху від 0 до s

$$m \int_{V_0}^V V dV = \int_0^s F \cos \alpha ds,$$

одержуємо

$$m V^2 / 2 - m V_0^2 / 2 = W, \quad (7)$$

де W - робота сили \vec{F} на шляху S .

Теорема доведена.

При уповільненому русі ($V < V_0$) складова \vec{F}_t , визиваюча дотичне прискорення \vec{a}_t , буде спрямована в бік, протилежний напрямку вектора швидкості \vec{V} , і робота сили \vec{F} буде від'ємною.

Складова \vec{F}_n , визиваюча нормальне прискорення \vec{a}_n , роботи не виконує, тому що ця складова у кожному мить перпендикулярна елементарному переміщенню точки прикладення сили \vec{F} .

Якщо до матеріальної точки прикладена декілька сил, то зміна кінетичної енергії буде дорівнювати алгебраїчній сумі робіт цих сил:

$$m V^2 / 2 - m V_0^2 / 2 = \sum W_{F_i} \quad (8)$$

3. Закон зберігання механічної енергії

Енергію взаємодії між тілами називають потенціальною. Потенціальною енергією володіють, наприклад, натягнутий лук із стрілою або стиснута пружина.

Всяка матеріальна точка, піднята на певну висоту h , також володіє деякою енергією, яка називається енергією положення і являється потенціальною енергією. Мірою потенціальної енергії у цьому випадку служить робота, яку виконає точка при вільному падінні.

Вважаючи величину h невеликою в порівнянні з розмірами Землі, а тому вважаючи постійною силу тяжіння G , одержимо вираз для потенціальної енергії Π :

$$\Pi = Gh \quad (9)$$

Потенціальна енергія тіла, піднятого на певну висоту, є величина відносна. Вона залежить від системи відліку, по відношенню до якої визначається ця енергія.

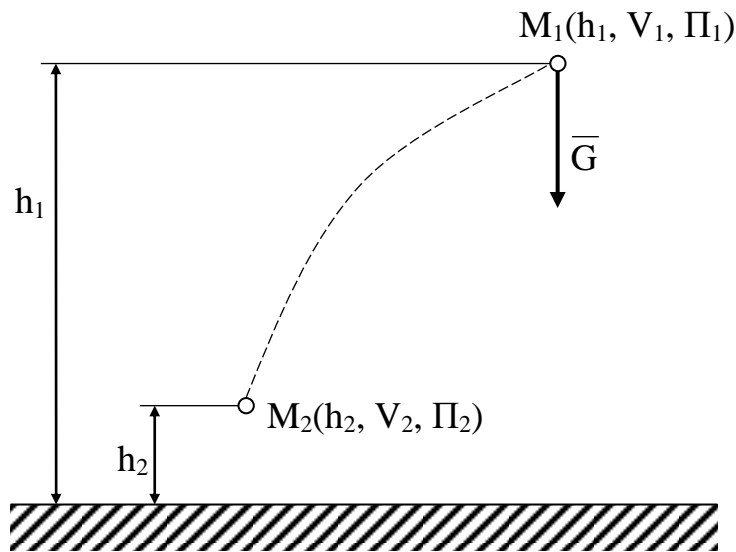


Рис. 2

Нехай матеріальна точка масою m , падаючи під дією однієї лише сили тяжіння G , у положенні M_1 знаходилася на висоті h_1 , мала швидкість V_1 і володіла потенціальною енергією Π_1 (рис. 2). У положенні M_2 точка виявилася на висоті h_2 , причому її швидкість стала V_2 , а потенціальна енергія Π_2 .

При паданні точки під дією однієї лише сили

тяжіння виконується робота

$W = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2$ У відповідності з теоремою, доведеною у попередньому параграфі, ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$W = mV_2^2 / 2 - mV_1^2 / 2 = K_2 - K_1,$$

або

$$\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1,$$

отже

$$\Pi_1 + K_1 = \Pi_2 + K_2,$$

або

$$\Pi + K = \text{const.} \quad (10)$$

Рівняння (4.10) є математичним виразом закону зберігання механічної енергії: при русі матеріальної точки під дією однієї лише сили тяжіння сума потенціальної і кінетичної енергії є величиною сталою.

На підставі закону зберігання механічної енергії неважко довести, що якщо тіло кинути з поверхні Землі вертикально угору, то його кінетична енергія в нижньому положенні буде дорівнювати потенціальній енергії у найвищому положенні.

Закон зберігання механічної енергії є окремим випадком загального закону зберігання матерії і енергії.

Раніше ми згадували про теорію відносності, створену А. Ейнштейном і в наш час набувши широке використання у науці і техніці. Одним з найважливіших висновків теорії відносності є закон пропорційності енергії і маси тіла. Математичний вираз цього закону має такий вигляд:

$$E = mc^2, \quad (11)$$

де E - повний запас енергії тіла (включаючи в себе механічну, теплову, хімічну, електромагнітну, ядерну енергію, а також енергію частинок, що входять до складу атома), m - маса тіла, c - швидкість світла.

На підставі рівняння (11), яке називається формулою Ейнштейна, неважко вирахувати, що одному граму маси відповідає $25 \cdot 10^6$ кВт·г енергії, ($1 \text{ кВт} \cdot \text{г} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$).

Формула Ейнштейна має саме безпосереднє відношення до відкриття і використання ядерної (атомної) енергії. Саме на підставі цієї формули було встановлення існування величезних запасів нових видів енергії і знайдені шляхи її використання.

4. Теорема про моменти інерції тіла відносно паралельних осей.

Уведемо поняття центра мас. Центром мас системи називається геометрична точка C , положення якої визначається координатами

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{m}, \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{m} \quad (12)$$

В цих формулах m_k - маса однієї довільної точки системи, x_k, y_k, z_k - координати цієї точки, $\sum m_k x_k, \sum m_k y_k, \sum m_k z_k$ - алгебраїчні суми, складені з добутків маси кожної точки даної системи на відповідні її координати, m - маса всієї системи.

Теорема. Момент I_z , інерції тіла відносно якої-небудь осі z' дорівнює моменту I_z інерції цього тіла відносно осі z , яка проходить через центр мас тіла і паралельна даній осі z' , складеному з добутком маси m тіла на квадрат відстані d між цими осями.

Доведення. Прийнемо центр мас C тіла за початок системи координатних осей $Cxyz$. Вісь Sy проведемо так, щоб вона перетинала вісь z' у деякій точці O , яку прийнемо за початок нової системи координатних осей $0x'y'z'$ (рис. 3.). Відстань між осями Cz і $0z'$ позначимо d . Візьнемо тепер довільну точку A_k тіла маси m_k . Координати цієї точки в системі координатних осей $Cxyz$ позначимо x_k, y_k, z_k . Координати тієї ж точки в системі координатних осей $0x'y'z'$ позначимо x'_k, y'_k, z'_k . Відстань точки A_k до осі z позначимо r_k і відстань тієї ж точки до осі z' - через r'_k .

Момент інерції тіла відносно осі z' , згідно з визначенням,

$$I_{z'} = \sum m_k (r'_k)^2 \quad (13)$$

Але, як це видно на рис. 5.6,

$$(r'_k)^2 = (x'_k)^2 + (y'_k)^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = (x_k^2 + y_k^2) - 2dy_k + d^2 = r_k^2 - 2dy_k + d^2.$$

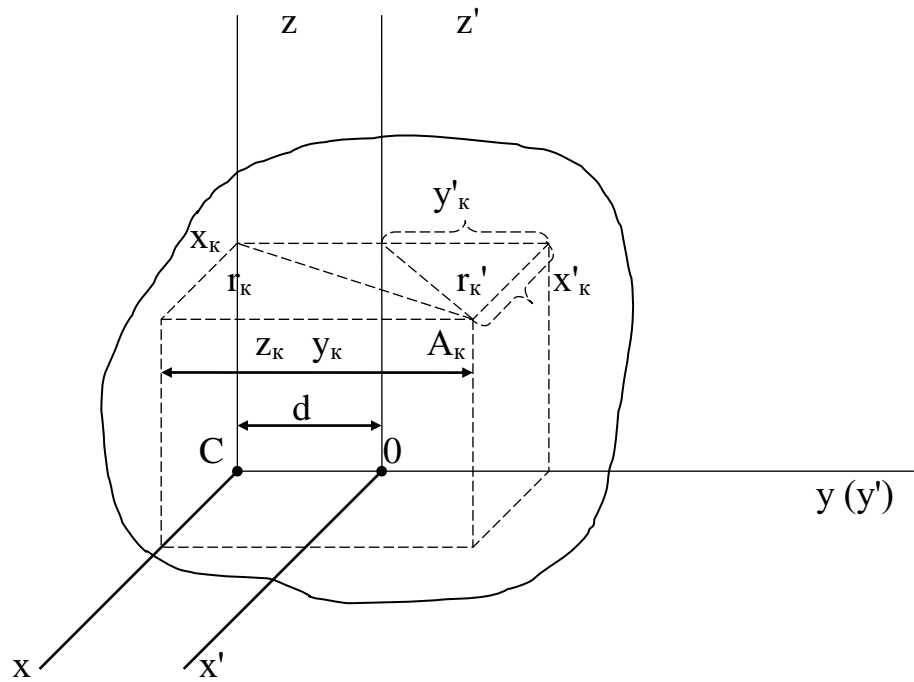


Рис. 3

Підставляючи це значення у (5.8) маємо

$$I_{z'} = \sum m_k (r'_k)^2 = \sum m_k r_k^2 - 2d \sum m_k y_k + d^2 \sum m_k \quad (14)$$

Тут $\sum m_k r_k'^2$ - момент інерції тіла відносно центральної осі z .

З формули ж (5.7), яка визначає ординату y_c центра мас, знаходимо

$$\sum m_k y_k = m y_c,$$

де m - маса тіла так як уданому випадку $y_c = 0$, то і $\sum m_k y_k = 0$. Підставляючи одержане значення у праву частину (14), маємо

$$I_{z'} = I_z m d^2 \quad (15)$$

Теорема доведена.

Знаючи момент інерції тіла відносно будь-якої осі, що проходить через його центр мас, можна, користуючись формулою (15), знайти момент інерції цього тіла відносно якої завгодно іншої осі, паралельній даній.

Як це виходить з цієї ж формули (15), момент інерції тілі відносно осі, яка проходить через центр мас тіла, менший ніж момент інерції даного тіла відносно будь-якої іншої осі, їй паралельній.

5. Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Кінетичною енергією системи називається сума кінетичних енергій всіх матеріальних точок системи.

Позначивши кінетичну енергією системи K , будемо мати

$$K = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} \quad (16)$$

Таким чином, щоб визначити кінетичну енергію системи в який-небудь момент, треба масу кожної точки системи помножити на половину квадрата її швидкості і одержані добутки скласти.

З врахуванням вище сказаного запишемо

$$\sum \frac{m_k V_k^2}{2} - \sum \frac{m_k V_{ok}^2}{2} = \sum W_k$$

Позначимо кінетичну енергію системи $\sum \frac{m_k V_{ok}^2}{2}$ в її початковому положенні K_0 і кінетичну енергію системи $\sum \frac{m_k V_k^2}{2}$ в її кінцевому положенні K_1 , остаточно одержимо

$$K - K_0 = \sum W \quad (17)$$

Зміна кінетичної енергії при переміщенні системи із одного положення в інше дорівнює сумі робіт усіх сил (як зовнішніх, так і внутрішніх), діючих на систему при її переміщенні.

При визначенні суми робіт усіх сил, діючих на систему при її переміщенні, необхідно мати на увазі наступні обставини, які значно спрощують практичне використання теореми про зміну кінетичної енергії у багатьох випадках (обґрунтування їх вимагає деяких додаткових знань, але вони виходять за рамки програми, тому ми його не подаємо).

1. При всякому переміщенні твердого тіла (тобто системи, відстані між точками якої не змінюються) сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю.
2. Сума робіт реакцій ідеальних зв'язків, незмінних за часом при всякому переміщенні системи, яку допускають ці зв'язки, дорівнює нулю.

Остання обставина автоматично виключає з рівняння (17) реакції ідеальних зв'язків. Якщо ж зв'язки не ідеальні, тобто тертям в них знехтувати неможливо, то у суму робіт сил ,прикладених до системи, необхідно включити і роботу сил тертя.

6. Кінетична енергія твердого тіла

При використанні про зміну кінетичної енергії системи дуже часто приходится вираховувати кінетичну енергію рухомого твердого тіла. Знайдемо її вирази при найважливіших видах руху тіла.

1. Тіло рухається поступально. Як відомо, швидкість всіх точок тіла у цьому випадку буде однакою, і його кінетична енергія буде

$$K = \sum \frac{M_k V_k^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum M_k$$

Так як $\sum M = M$ - сума мас всіх точок тіла, тобто маса тіла,

$$K = \frac{mV^2}{2}. \quad (18)$$

Кінетична енергія K у поступальному русі твердого тіла дорівнює половині добутку маси m тіла на квадрат його швидкості V .

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла у поступальному русі, як цього і треба було чекати, виражається цілковито однаковою з кінетичною енергією матеріальної точки.

2. Тіло обертається навколо нерухомої осі. У цьому випадку модуль \bar{V}_k швидкості k -ї точки твердого тіла дорівнює, як відомо, добутку кутової швидкості ω тіла на відстань r_k даної точки від осі обертання тіла: $V_k = \omega r_k$. Отже, при обертанні тіла кінетична енергія його дорівнює

$$K = \sum \frac{M_k V_k^2}{2} = \sum \frac{M_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum M_k r_k^2$$

Але $\sum m_k r_k^2$ - це момент інерції тіла відносно його осі обертання. Тоді

$$K = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (19)$$

Кінетична енергія K тіла при обертанні навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції I тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості ω .

3. Тіло виконує плоскопаралельний рух. Якщо тіло виконує плоскопаралельний рух, то усі його точки рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині. Уявимо собі переріз тіла (рис. 4) площиною, яка проходить через центр тяжіння C тіла і паралельна даній нерухомій площині. Припустимо, що нам відома кутова швидкість ω фігури і швидкість \bar{V}_C її центра тяжіння.

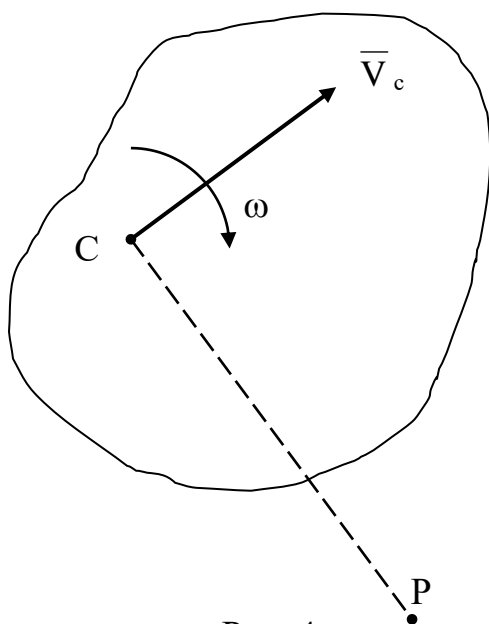


Рис. 4

Знаючи це, неважко знайти і положення миттєвого центра P швидкостей фігури. Він лежить, як відомо з кінематики, на перпендикулярі, проведеному з якої-небудь точки фігури до напрямку швидкості цієї точки на відстані, рівному відношенню лінійної швидкості даної точки до кутової швидкості фігури. Отже, $PC = V_C / \omega$.

Як було показано у кінематиці, при плоскопаралельному русі тіла швидкість його точок в кожному миті розподіляється так нібито тіло і обертається в цю мить навколо миттєвої осі, яка проходить через відповідальний даній миті миттєвий центр швидкостей фігури і перпендикулярна до її

площини.

Але кінетична енергія тіла $K = \sum mV^2 / 2$ залежить тільки від маси кожної його точки і її швидкості, і тому кінетичну енергію тіла при плоскопаралельному його рухові можна вирахувати за формулою (19):

$$K = I_p \omega^2 / 2, \quad (20)$$

де I_p - момент інерції тіла відносно його миттєвої осі обертання.

Користування формулою (5.15) для визначення кінетичної енергії тіла при його плоскопаралельному рухові утруднене тим, що вимагає для кожної миті часу знаходження положення миттєвої осі і вирахування відповідного їй моменту інерції тіла. Тому формулу (20) перетворимо, скориставшись теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей (15). Згідно з цією теоремою

$$I_p = I_c + m(PC)^2 = I_c + m \frac{V_c^2}{\omega^2}, \quad (21)$$

де I_c - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла і паралельна миттєвій осі, m - маса тіла, V_c - відстань між розглядуваними паралельними осями.

Підставивши вираз (21) в (20), матимемо

$$K = \frac{I_p \omega^2}{2} = (I_c + m \frac{V_c^2}{\omega^2}) \frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси

$$K = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (22)$$

Кінетична енергія тіла при його плоскопаралельному рухові дорівнює сумі тих кінетичних енергій, які б мало це тіло при його поступальному рухові із швидкістю центра мас тіла і при його обертанні навколо осі, що проходить через центр мас тіла і перпендикулярна до тієї нерухомої площини, паралельно якій рухається тіло.