

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
**Технічне обслуговування та ремонт  
повітряних суден і авіадвигунів**

**за темою – Плоске згинання**

**Харків 2022**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2022 № 8

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 22.08.2022 № 1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від  
10.08.2022 № 1

**Розробник:** доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.т.н., доцент,  
спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Долударєва Я.С.

**Рецензенти:**

1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.
2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

### План лекції:

1. Прямий згин.
2. Згинальний момент і поперечна сила.
3. Епюри згинальних моментів і поперечних сил.
4. Нормальні напруження при поперечному згині балки.
5. Розрахунок на міцність при згинанні. Рациональна форма поперечного перерізу балки.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишин та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

#### Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д.

Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

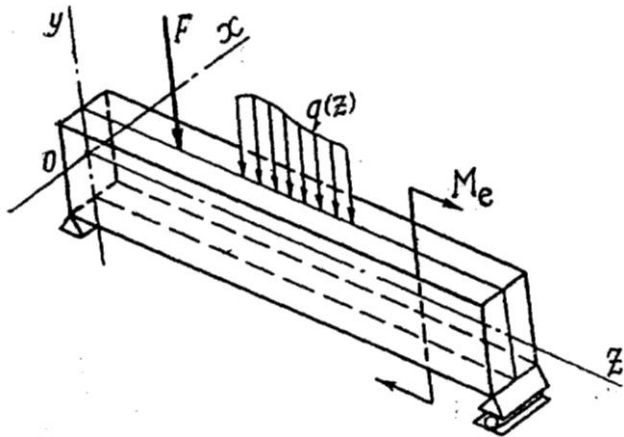
## Текст лекції

### 1. Прямий згин.

Стержень з прямою віссю, що працює на згин, прийнято називати **балкою**. Ознакою деформації згину балки є зміна кривизни її осі. Згин, при якому скривлення осі балки відбувається у її головній площині, тобто у площині, утвореній віссю балки і однією з головних центральних осей її поперечного перерізу, будемо називати **прямим згином**.

Коли ж скривлення осі балки не відбувається у її головній площині, то згин називається **косим**.

Обмежимося розглядом прямого згину балки сталого поперечного перерізу, який має принаймні одну вісь симетрії. Сумістимо вісь  $z$  прямокутної системи координат з віссю балки, осі  $x$  і  $y$  – з головними центральними осями її поперечного перерізу, причому будемо вважати, що вертикальна вісь  $y$  є віссю симетрії перерізу (рис.1).



Якщо навантаження діє на балку у її площині симетрії  $oyz$  то, очевидно, вісь балки буде скривлятися у цій же площині і згин буде прямим. Щоб забезпечити нерухомість балки під впливом прикладеного до неї навантаження, слід закріпити її принаймні трьома опорними стержнями, напрямки яких не перетинаються в одній точці.

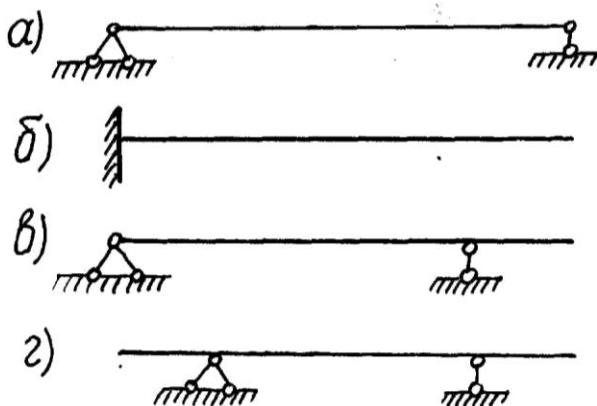


Рис. 2

В опорних стержнях балки виникають опорні реакції. Коли ці реакції можна знайти з умов рівноваги сил, прикладених до балки, балка статично визначна. Найпростіші статично визначені балки: 1) проста балка, якою будемо називати балку, вільно обіперту на двох шарнірних опорах (рис.2,а); 2) консоль, тобто балка з одним закріпленням і другим вільним кінцями (рис.2,б); 3) консольна балка, тобто балка на двох опорах,

що має одну або дві консолі (рис.2,в,г).

У загальному випадку навантаження простої балки на її опорах можуть виникати такі складові опорних реакцій: на шарнірно-нерухомій опорі - вертикальна  $R$  та горизонтальна  $H$  (рис.3,а); на рухомій – лише вертикальне  $R$  (рис.3,б). У загальному випадку навантаження консолі у її опорному перерізі

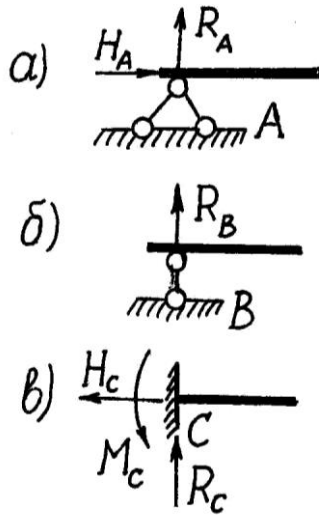


Рис. 3

можуть виникнути вертикальна  $R$  і горизонтальна  $H$  складові опорної реакції та опорний момент. Якщо опори позначатимемо літерами  $A$  і  $B$ , то відповідно складові опорних реакцій та опорні моменти будуть мати індекси  $A$  або  $B$ :  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $M_A$  або  $M_B$ .

Відстань між центрами шарнірів простої балки та вільну довжину консолі називають їх прольотом.

Внаслідок скривлення осі балки при згині довжина її прольоту, а також відстані між прикладеними до балки вертикальними силами зменшується. Однак до балок, деформації яких невеликі порівняно з довжиною прольоту можна застосувати принцип “початкових розмірів” і нехтувати впливом зміни відстані між силами на величину опорних реакцій і внутрішніх сил у балці.

## 2. Згинальний момент і поперечна сила.

З метою вивчення внутрішніх сил, що виникають у поперечних перерізах балки при її прямому згині, розглянемо просту балку, яка працює на прямий згин у вертикальній площині (рис.4,а).

Опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$ , викликані прикладеним до балки навантаженням, можна визначити з умов рівноваги, використовуючи рівняння статички абсолютно твердого тіла.

Для з'ясування, які внутрішні сили виникають у довільному поперечному перерізі балки і для визначення їх величини застосуємо метод перерізів: уявно розрізаємо балку січною площиною, перпендикулярно до її осі, на віддалі  $z$  від лівої опори. Січна площина розділяє балку на дві частини, кожна з яких урівноважується прикладеними до неї зовнішніми і внутрішніми силами.

Відкидаємо одну з частин балки, наприклад, ліву, і поміщаємо у центрі ваги  $C$  перерізу тієї частини балки, що залишається, початок координат, осі  $x$  і  $y$  якої збігаються з головними центральними осями перерізу. Дію відкинутої лівої частини балки на праву частину треба замінити внутрішніми силами, що чисельно дорівнюють відповідним зовнішнім силам, прикладеним також зліва від перерізу. Ці зовнішні сили можна за правилами механіки звести до сили, направленої вздовж осі  $y$ , і пари сил, що обертає навколо осі  $x$  перерізу. Тому внутрішні сили мусять утворювати також силу і пару сил. Ці внутрішні сили, позначені на рис.4,б відповідно через  $Q(z)$  і  $M(z)$ , називаються поперечною силою і згинальним моментом.

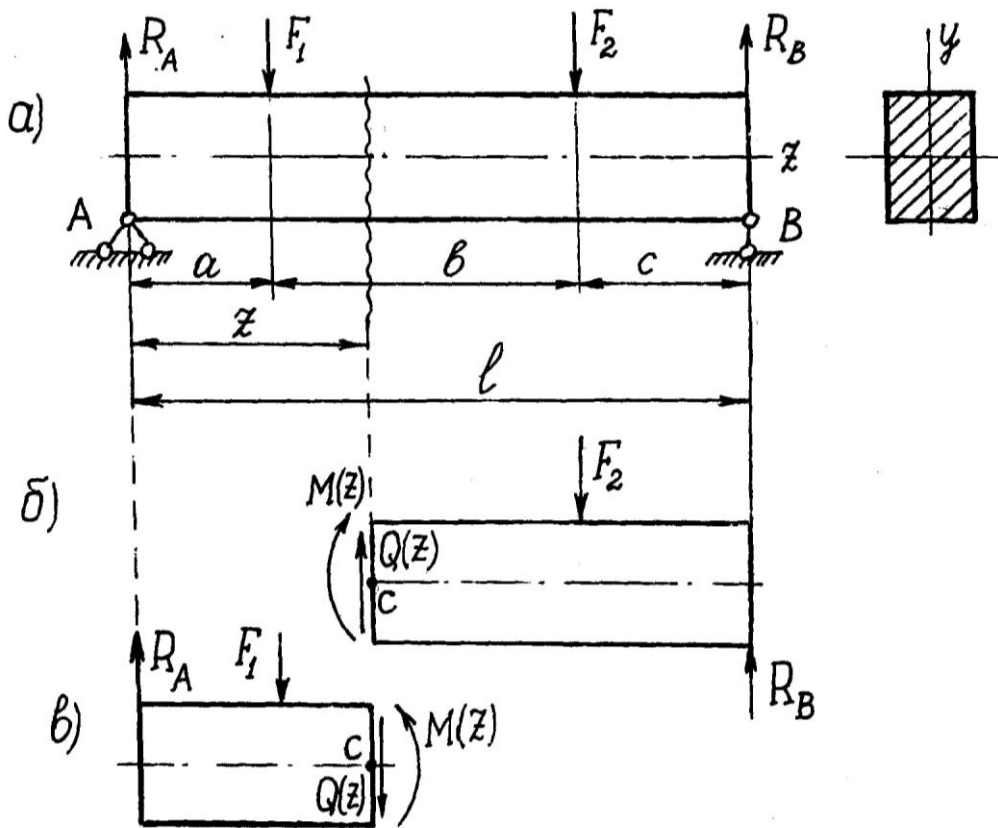


Рис. 4

При відкиданні правої частини балки її дію на ліву частину треба замінити на основі третього закону Ньютона зусиллями такої ж величини і зворотно напрямленими (рис.4, в).

Поперечна сила  $Q(z)$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вертикальну вісь  $y$  зовнішніх сил, що розміщені з однієї сторони (ліворуч або праворуч) від даного перерізу. Причому додатними вважаються ті сили, які намагаються повернути розглядувану частину балки за годинниковою стрілкою, і від'ємними – які намагаються ту ж саму частину балки повернути проти годинникової стрілки (рис.5, а).

Згинальний момент  $M(z)$  у будь-якому поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил і пар сил, що діють по один бік від розглядуваного перерізу, відносно осі  $x$ , що проходить через центр ваги цього перерізу.

Правило знаків для згинального моменту можна пов'язати з характером деформації балки. Згинальний момент вважають додатнім, якщо балка згинається опуклістю донизу ("дощ збирається") і від'ємним – при згині балки опуклістю догори ("вода виливається") (рис.5, б). Отже, при додатному згинальному моменті розтягнуті волокна розміщуються знизу, а при від'ємному – вгорі.

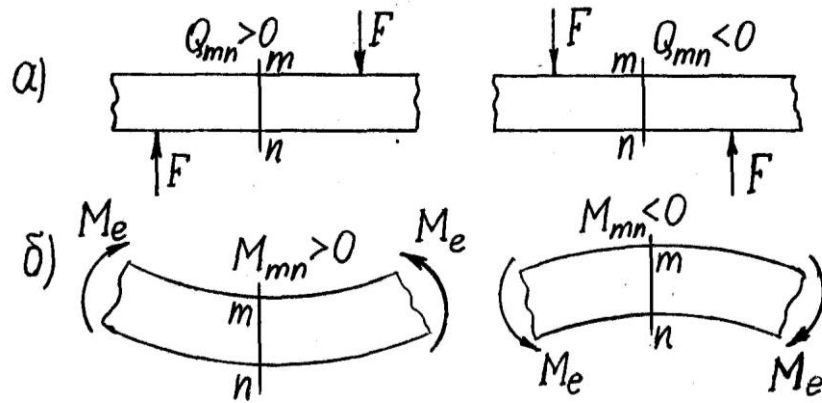


Рис. 5

На основі аналітичних виразів для  $Q(z)$  і  $M(z)$  будуть графіки зміни цих величин довжиною балки, що називаються епюрами поперечних сил  $Q(z)$  і згинальних моментів  $M(z)$ .

### 3. Епюри згинальних моментів і поперечних сил.

Розглянемо кілька найпростіших прикладів побудови епюр згинальних моментів і поперечних сил. При цьому треба користуватися поданими вище правилами для визначення  $Q(z)$  і  $M(z)$  через зовнішні сили і мати на увазі диференціальні залежності між ними. Зокрема, коли до балки не прикладено розподілених навантажень, як уже вказувалось, епюри згинальних моментів і поперечних сил будуть утворюватися відрізками прямих ліній. Тому для їх побудови досить знайти характерні значення ординат епюр і з'єднати їх прямими відрізками. Це значно спрощує процес побудови і попереджає можливі помилки.

1. Проста балка, навантажена у довільній точці прольоту (рис.6,а). Застосовуємо принцип звільнення від зв'язів, замінюючи їх реакціями (рис.6,б). Складаємо рівняння рівноваги і знаходимо реакції опор:

$$\sum z=0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: R_B(a+b) - Fa = 0, R_B = \frac{F \cdot a}{(a+b)} = \frac{10 \cdot 3}{(3+2)} = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A(a+b) - Fb = 0, R_A = \frac{F \cdot b}{(a+b)} = \frac{10 \cdot 2}{(3+2)} = 4 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку правильності визначення реакцій опор:

$$\sum Y = R_A + R_B - F = 6 + 4 - 10 = 0.$$

Будуємо епюру поперечних сил  $Q$ . На ділянці  $a$  довільно проводимо переріз балки (рис.6,б). Розглянемо ліву частину балки  $z_a$  (рис.6,в). Як ми вже знаємо, у перерізі будуть діяти поперечна сила  $Q(z_a)$  та згинальний момент  $M(z_a)$ . Складаємо вирази для  $Q$  і  $M$  на ділянці  $a$ :  $Q(z_a) = R_A = 4 \text{ кН} = \text{const}$  (сила  $R_A$  взята додатньою, тому що вона намагається повернути розглядовану частину балки відносно перерізу за годинниковою стрілкою);  $M(z_a) = R_A \cdot z_a, z_a \in [0; a]$

(момент сили  $R_A$  взятий додатним, тому що вона деформує розглядувану частину балки опуклістю вниз (рис.6, в), тобто “вода затримується”).  $M(z_a)$  змінюється за лінійним законом, тому достатньо буде вирахувати два значення згинального моменту:  $M(z_a=0)=0$  і  $M(z_a=3)=4 \cdot 3=12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . За одержаними розрахунками будуюмо епюри  $Q(z_a)$  та  $M(z_a)$  - епюри поперечних сил і згинальних моментів на ділянці а (рис.6,г,д).

Аналогічно діємо при побудові епюри  $Q(z_b)$  і  $M(z_b)$ , тобто при побудові епюри поперечних сил та згинальних моментів на ділянці в:  $Q(z_b)=-R_B=-6 \text{ кН}=\text{const}$  (величина  $R_B$  від'ємна, тому що намагається розглядовану частину балки довжиною  $z_b$  повернути проти годинникової стрілки (див.рис.7.8,в));  $M(z_b)=R_B \cdot z_b$ ,  $z_b \in [0; 2]$  (добуток  $R_B \cdot z_b$  додатний, тому що  $R_B$  як і  $R_A$  у попередньому випадку деформує відрізок балки  $z_b$  опуклістю вниз):  $M(z_b=0)=0$ ,  $M(z_b=2)=6 \cdot 2=12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

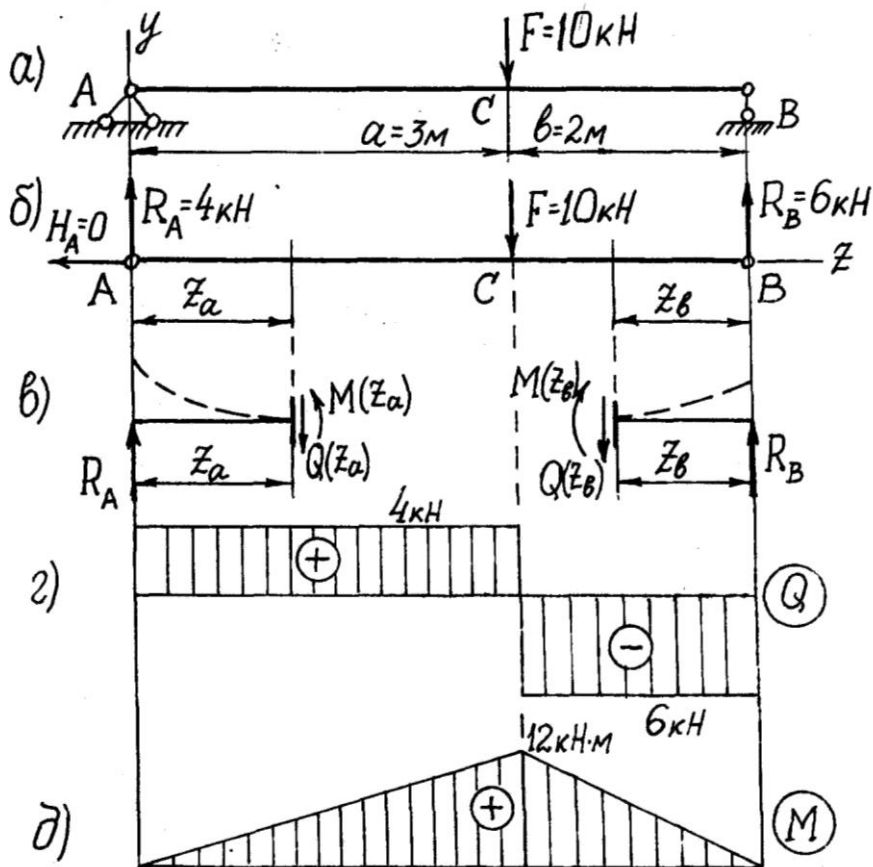


Рис. 6

Крім використаних при побудові епюр висновків з диференціальних залежностей підтверджується на даному прикладі й інші висновки: коли рухатися зліва направо, то на ділянці з додатною поперечною силою згинальний момент зростає, на ділянці з від'ємних значень через нульову точку, згинальний момент набуває максимального значення.

Зауважимо ще, що у точках прикладання зосереджених сил (точки А, С і В) поперечна сила змінюється стрибками, рівними величині прикладеної зовнішньої сили. На епюри  $M(z)$  цим точкам відповідають точкам перелому,



оскільки раптовій зміні величини відповідає раптова зміна величини тангенса кута нахилу дотичної до кривої  $M(z)$ .

2. Проста балка (рис.7,а) навантажена зосередженою парою сил з моментом  $M_e$  (індекс  $e$  від external (англ.)- зовнішній).

У цьому прикладі докладні пояснення, щоб не повторюватися, не приводяться.

Реакції опор балки покажемо прямо на заданій схемі, умовно відкинувши опори (див.рис.7,а). Напрями  $R_A$  та  $R_B$  довільні; зрозуміло, що горизонтальна складова реакції шарнірно-нерухомої опори  $A$   $H_A=0$ , тому її не показано.

$$\sum M_A = 0: R_B(a+b) + M_e = 0, R_B = \frac{-M_e}{(a+b)} = \frac{-10}{(3+2)} = -2\kappa H;$$

$$\sum M_B = 0: -R_A(a+b) + M_e = 0, R_A = \frac{M_e}{(a+b)} = \frac{10}{(3+2)} = 2\kappa H.$$

У зв'язку з тим, що реакція  $R_B$  одержана з від'ємним знаком, попередній її напрямок треба змінити на протилежний. Розрахункова схема набуває вигляду, показаного на рис.7,б.

Будуємо епюри  $M(z)$  і  $Q(z)$ .

На ділянці **a**:

$$Q(z_a) = R_A = 2\kappa H = \text{const};$$

$$M(z_a) = R_A z_a, z_a \in [0, a]: M(z_a=0) = 0, M(z_a=a) = R_A \cdot a = 2 \cdot 3 = 6\kappa H\text{м}.$$

На ділянці **b**:

$$Q(z_b) = R_B = 2\kappa H = \text{const}$$

$$M(z_b) = -R_B z_b, z_b \in [0, b]: M(z_b=0) = 0, M(z_b=b) = -R_B \cdot b = -2 \cdot 2 = -4\kappa H\text{м}.$$

За одержаними даними на рис.7,в,г побудовані відповідні епюри.

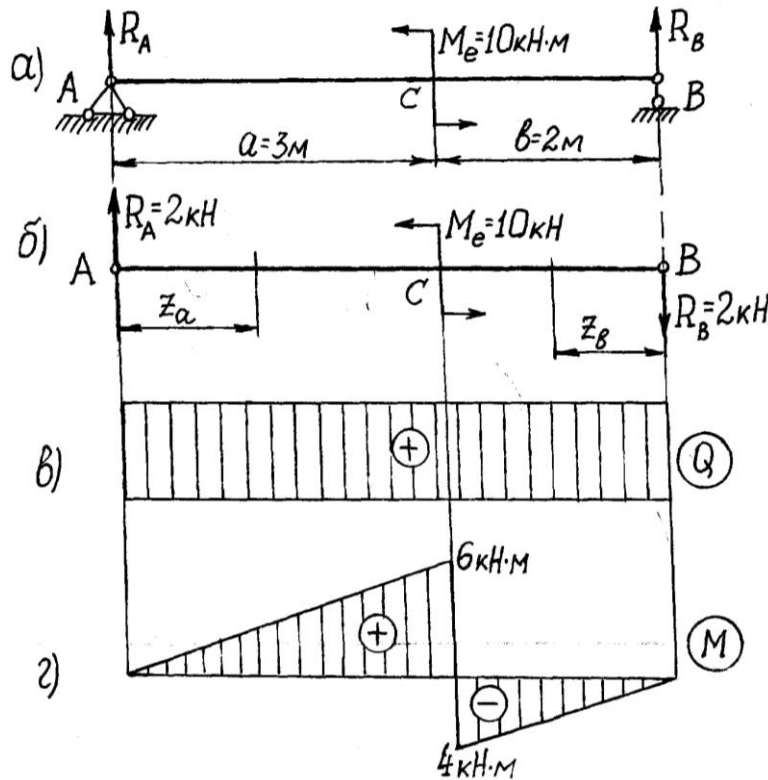


Рис. 7

Зауважимо, що на епюрі  $M(z)$  у перерізі С, де прикладена зосереджена пара сил, виступає стрибок на величину моменту цієї пари.

3. Проста балка з рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  (рис. 8, а).

а) звільняємося від зв'язків, замінивши їх реакціями (рис. 8, б). Внаслідок симетричного навантаження  $R_A = R_B = ql/2 = 4 \cdot 5/2 = 10 \text{ кН}$ . Проводимо переріз у будь-якому місці балки, відкидаємо праву частину і розглядаємо ліву.

Для складання виразів для  $Q(z)$  та  $M(z)$  розподілене навантаження замінюємо рівнодійною на довжині  $z$ :  $qz$  (рис. 7.10, в). Тоді  $Q(z) = R_A - qz$ , а  $M(z) = R_A \cdot z - qz^2/2$ , де  $z \in [0; l]$ .

Поперечна сила змінюється за законом прямої, а згинальний момент – за законом квадратної параболи.

Для побудови епюри  $Q$  достатньо мати два значення:  $Q(z=0) = 10 \text{ кН}$  і  $Q(z=5) = -10 \text{ кН}$  (рис. 8, г).

Для побудови епюри  $M$  потрібно принаймні мати три значення функції  $M(z)$ . Тоді, беручи до уваги, що епюра  $Q(z)$  перетинає базову лінію ( $Q = dM(z)/dz = 0$ ), знайдемо:  $M(z=0) = 0$ ,  $M(z=5) = 0$  і  $M(z=z_0) = 10 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2,5^2/2 = 12,5 \text{ кНм}$ .

Значення  $z_0$  легко знаходиться, якщо  $Q(z=z_0) = R_A - qz_0 = 0$ , звідки  $z_0 = R_A/q = 10/4 = 2,5 \text{ м}$ .

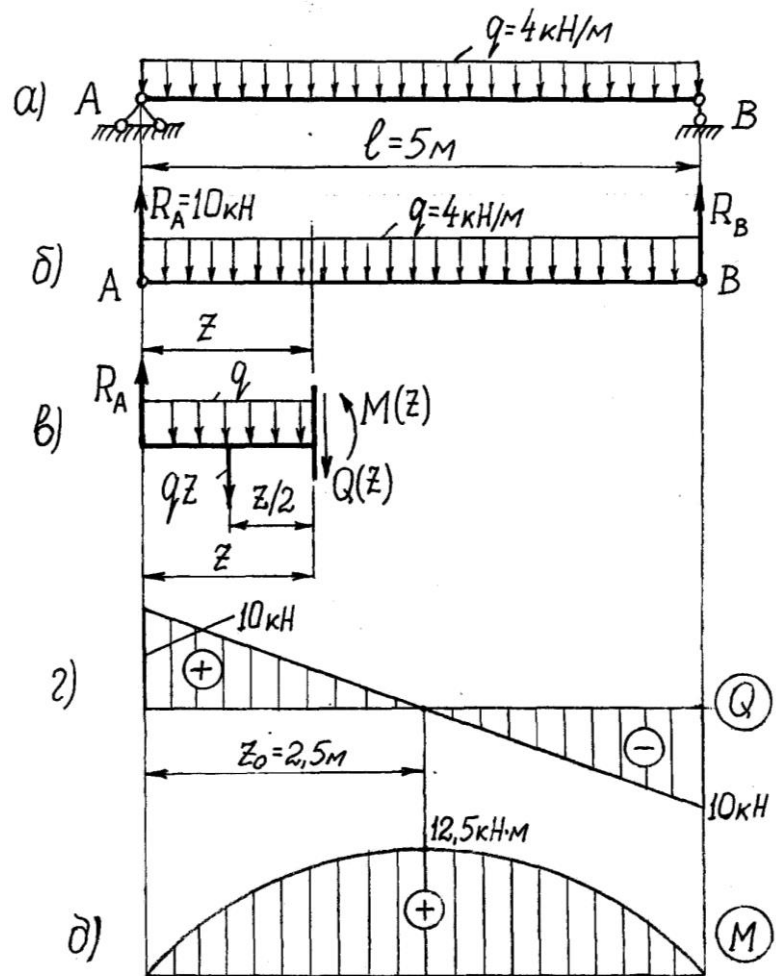


Рис. 8

4. Консоль з рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності  $q$  (рис.9,а). При побудові епюр  $Q$  та  $M$  для консолі можна не визначати опорних реакцій, коли при складанні виразів для внутрішніх сил брати до уваги сили, прикладені зі сторони вільного кінця консолі.

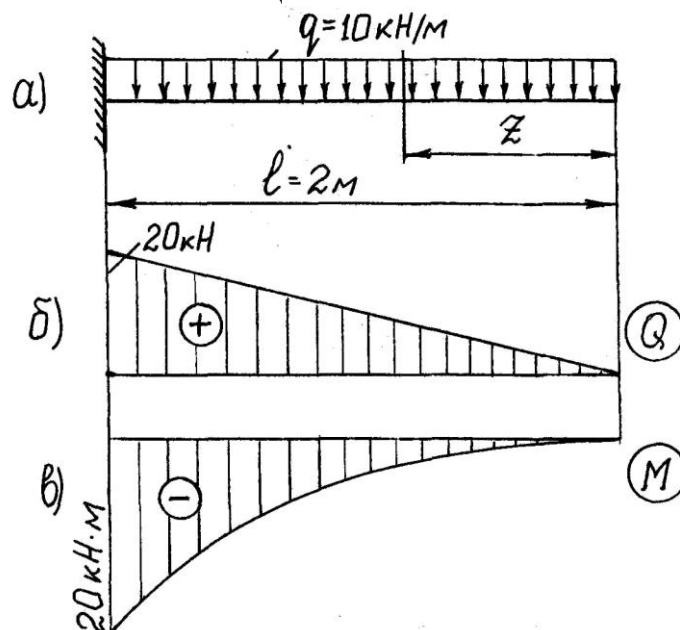


Рис. 9

Прийнявши початок осі  $z$  на вільному кінці консолі, для  $z \in [0; l]$  будемо мати:  $Q(z) = qz$ ;  $M(z) = -qz^2/2$ .

Як видно, епюра  $Q(z)$  буде прямою, а  $M(z)$  – квадратною параболою. Характерні значення поперечної сили і згинального моменту:  $Q(z=0)=0$ ,  $Q(z=l)=ql=10 \cdot 2=20 \text{ кН}$ ;  $M(z=0)=0$ ,  $M(z=l)=-ql^2/2=-10 \cdot 2^2=-20 \text{ кНм}$ .

Характер епюри  $Q(z)$  вказує на те, що крива згинальних моментів повинна бути дотичною до осі  $z$  у вільному кінці консолі.

Значення поперечної сили і згинального моменту в опорному перерізі консолі дорівнюють відповідним реакціям:  $R_A=20 \text{ кН}$ ,  $M_A=20 \text{ кНм}$ .

За одержаними даними будуємо епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$  рис.9,б,в.

Побудова епюр для більш складних випадків навантаження балки принципово нічим не відрізняється від розглянутих нами побудов для простих навантажень. На ділянках балки, де немає розподілених навантажень, досить знаходити характерні значення ординат епюр і сполучати їх відрізками прямих. Для спрощення запису загальних виразів  $Q(z)$  і  $M(z)$  можна початок відліку і його напрям обирати для окремих ділянок балки по-різному залежно від конкретних умов, тобто використовувати ковзну систему координат. Покажемо це на прикладі консольної балки (рис.10,а).

Визначимо реакції опор:

$$\sum M_A = 0: -R_B(a+b) + M_e + \frac{qa^2}{2} = 0, \quad R_B = \frac{M_e + \frac{qa^2}{2}}{(a+b)} = \frac{20 + \frac{8 \cdot 4^2}{2}}{(4+2)} = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: R_A(a+b) + M_e - qa\left(\frac{a}{2} + b\right) = 0, \quad R_A = \frac{qa\left(\frac{a}{2} + b\right) - M_e}{(a+b)} = \frac{8 \cdot 4\left(\frac{4}{2} + 2\right) - 20}{(4+2)} = 18 \text{ кН};$$

Перевірка:  $\sum Y = R_A + R_B - qa = 18 + 14 - 8 \cdot 4 = 0$ .

Для будь-якого перерізу ділянки  $a$ :

$$Q(z_a) = R_A - qz_a; \quad M(z_a) = R_A z_a - \frac{qz_a^2}{2}, \quad z_a \in [0; a].$$

$Q(z_a)$  - пряма лінія. Отже достатньо знайти її значення при  $z_a=0$  і  $z_a=4$ :

$$Q(z_a=0)=18 \text{ кН}, \quad Q(z_a=4)=-14 \text{ кН}.$$

епюра  $Q(z_a)$  перетинає нульову лінію на відстані  $z_a^0$ ;  $Q(z_a=z_a^0)=0=R_A-qz_a^0$ , звідки  $z_a^0=R_A/q=18/8=2,25 \text{ м}$ .

Вирахуємо значення  $M$  на ділянці  $a$ :

$$M(z_a=0)=0; \quad M(z_a=2,25)=20,25 \text{ кНм}; \quad M(z_a=4)=8 \text{ кНм}.$$

Проводимо переріз на ділянці  $b$  і будемо розглядати ту частину балки, яка лежить праворуч від цього перерізу, тобто частину балки довжиною  $z_b+c$ :

$$Q(z_b) = -R_B = -14 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M(z_b) = -M_e = R_B z_b, \quad z_b \in [0; b]: \quad M(z_b=0) = -20 \text{ кНм}, \quad M(z_b=2) = 8 \text{ кНм}.$$

На ділянці  $c$ :  $Q(z_c)=0$ ;  $M(z_c)-M_e=-20 \text{ кНм} = \text{const}$ .

За одержаними даними на рис.10,б,в побудовані відповідні епюри.

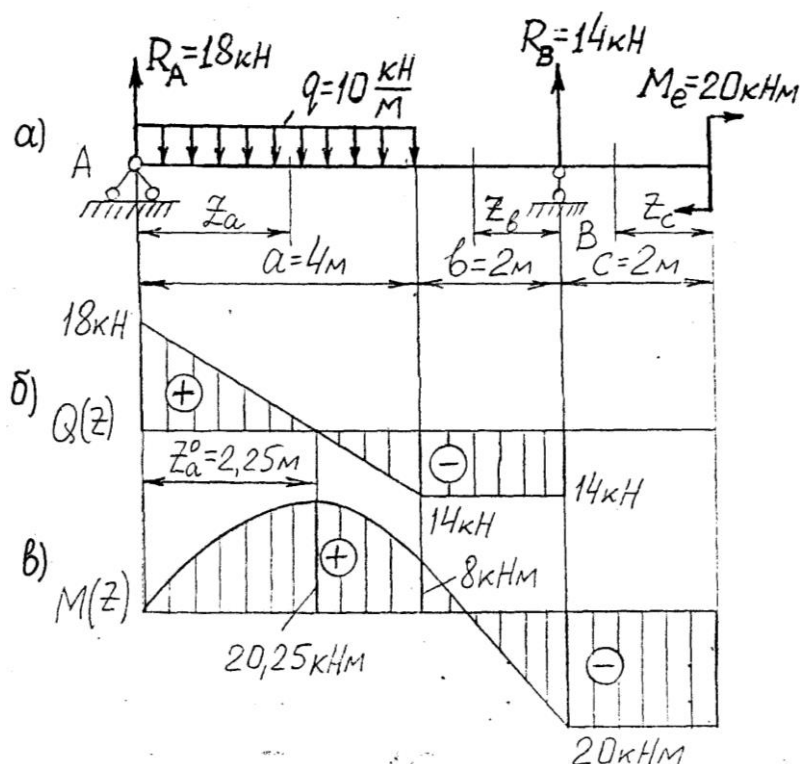


Рис. 10

Слід звернути увагу на те, що в перерізі  $C$  сходяться дві ділянки ( $a$  і  $b$ ). Тут мають місце однакові значення  $Q$ , тобто тангенси кута нахилу дотичної до  $M(z)$  і прямої на ділянці  $b$  однакові. Тому дотична в точці  $C$  до кривої  $M(z_a)$  і пряма співпадають. У відповідності з цим і потрібно будувати епюру  $M(z)$ .

#### 4. Нормальні напруження при поперечному згині балки.

При поперечному згині у поперечних перерізах балки, крім згинальних моментів, виникають ще й поперечні сили і зв'язані з ними дотичні напруження. При дії дотичних напружень з'являється деформація зсуву і поперечні перерізи балки скривлюються. Внаслідок цього гіпотеза плоских перерізів не відповідає дійсним деформаціям, і для визначення нормальних напружень у балці треба в кожному конкретному випадку розв'язувати складну задачу теорії пружності.

Як показують розв'язки таких задач, у деяких випадках поперечного згину нормальні напруження такі самі, як і при чистому згині. Це має місце тоді, коли поперечні сили не змінюються по довжині балки. При цьому скривлення поперечних перерізів є однаковими для всіх перерізів і тому не впливають на розподіл і величину нормальних напружень (наприклад, при згині консолі прямокутного перерізу зосередженою силою, прикладеною на її кінці). В інших випадках різниця між напруженнями, обчисленими за формулою для чистого згину і за формулами для напружень при поперечному згині, одержаними

методами теорії пружності, є тим меншою, чим більше відношення довжини прольоту  $l$  до висоти перерізу  $h$ .

Наприклад, при згині рівномірно розподіленим навантаженням простої балки прямокутного перерізу різниця ця для відношення  $l/h=2$  дорівнює 6,7%, а відношення  $l/h=4$  – менше 1,7%.

Крім того, при поперечному згині між поздовжніми волокнами балки виникають напруження стиску, яких зовсім немає при чистому згині. Ці напруження можуть досягти великих значень, зокрема у місцях прикладання до балки великих зосереджених сил. Однак, згідно з принципом Сен-Венана, величина цих напружень дуже швидко зменшується з віддаленням перерізу від точки прикладання навантаження, і тому ці напруження мають лише місцеві значення. Їх вплив тим менший, чим більше відношення  $l/h$ .

Враховуючи наведені факти, при розрахунках на поперечний згин балок з відношенням довжини прольоту  $l$  до висоти перерізу  $h$  порядку  $l/h \geq 4 \dots 5$  нормальні напруження визначають за формулою (7.13), підставляючи в неї замість сталого згинального моменту змінний згинальний момент  $M(z)$ :

$$\sigma = \frac{M(z)}{I_x} y,$$

де  $I_x$  - момент інерції відносно нейтральної осі перерізу.

Внаслідок зміни згинального моменту по довжині прольоту балки нормальні напруження залежать як від положення точки у перерізі, так і від положення самого перерізу. Максимальні нормальні напруження виникають у так званому небезпечному перерізі, в якому виникає максимальний згинальний момент. Для балки з поперечним перерізом, симетричним відносно нейтральної осі, максимальне нормальне напруження у небезпечному перерізі дорівнює:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W},$$

де  $W_x$  - момент опору відносно нейтральної осі перерізу.

При розрахунках балок з відношенням  $l/h < 4$  треба користуватися більш точними формулами теорії пружності.

Елементарна теорія прямого згину балки розроблялась багатьма дослідниками, починаючи з Галілея, який вивчав згин консолю (1638р.). Основні положення теорії згину поступово уточнювались і перевірялись експериментально рядом вчених, у першу чергу Маріотом, Я.Бернуллі та Кулоном, який її остаточно завершив (1773р.). Вчені Нав'є (1824р.) та Сен-Венан (1856р.) застосували до вивчення згину методи теорії пружності і довели правильність основних результатів елементарної теорії.

## **5. Розрахунок на міцність при згинанні. Рациональна форма поперечного перерізу балки.**

У попередніх параграфах ми вивчили нормальні напруження при чистому та поперечному згині балки. Далі ми розглянемо дотичні напруження, які виникають лише при поперечному згині. Виявляється, що у переважній більшості випадків дотичні напруження грають другорядну роль і міцність балки залежить в першу чергу від величини максимальних нормальних напружень, що виникають у її небезпечному перерізі.

При розрахунку на міцність методом допустимих напружень вважають, що міцність балки буде забезпечена, коли задовольняється умова:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}.$$

Підставляючи  $\sigma_{\max}$  за формулою, одержимо умову міцності балки з перерізом, симетричним відносно нейтральної осі:

$$\frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm}.$$

З цієї умови випливає формула для підбору поперечного перерізу такої балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}}.$$

За одержаним значенням осевого моменту опору підбираємо відповідний стандартний профіль або, виражаючи момент опору через геометричні розміри перерізу, визначаємо з умови їх потрібну величину. Наприклад, для прямокутника з висотою  $h$  і шириною  $b$  осевий момент опору, обчислений за формулою, дорівнює:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}.$$

Для балки круглого перерізу діаметром  $d$  одержимо:

$$W_x = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

Для перерізів, несиметричних відносно нейтральної осі за формулою визначається менший з двох моментів опору перерізу. У випадку балок, виготовлених з матеріалів, що не однаково працюють на розтяг і стиск, перевірку міцності треба вести окремо для розтягнутих і стиснутих волокон.

З підбором поперечного перерізу балки пов'язане питання його раціональної форми. Оскільки основний вплив на міцність балки при згині мають нормальні напруження, які збільшуються із зростанням віддалі від нейтральної осі, найбільш раціональними є такі перерізи, в яких щонайбільше матеріалу розташовано далеко від нейтральної осі. Прикладом таких перерізів є перерізи типу двотавра.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск, раціональні несиметричні перерізи, у яких віддалі крайніх точок від нейтральної осі пропорціональні величині допустимих напружень для розтягу і стиску.

**Приклад 7.1.** Для консольної сталеві балки, яка розглянута в параграфі (рис.10) підібрати двотавровий, круглий та прямокутний переріз (приймаючи

для прямокутника  $h/b=2$ ) і порівняти масу одного метра довжини кожного перерізу. Допустиме напруження для сталі взяти  $\sigma_{adm}=160\text{МПа}$ .

**Розв'язання.** Максимальний згинальний момент  $M_{max}=20,25\text{кНм}$  (див.рис.10,в). Потрібний момент опору:

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{20,25 \cdot 10^2}{16} = 126,6 \text{см}^3,$$

де  $\sigma_{adm}=160\text{МПа}=16\text{кН/см}^2$ .

Підбираємо:

а) двотавр по ГОСТ 8239-72: № 18 ( $W_x=143\text{см}^3$ ;  $A=23,4\text{см}^2$ );

б) круглий переріз:  $0,1 d^3 \geq 126,6$ ;  $d \geq \sqrt[3]{126,6/0,1} = 10,8\text{см}$ ;

$$A = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 10,8^2 / 4 = 91,8\text{см}^2.$$

в) прямокутний переріз:  $b(2b)^2/6 \geq 126,6\text{см}^3$ ;

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{126,6 \cdot 6}{4}} = 5,75\text{см}; \quad A = bh = 2b^2 = 2 \cdot 5,75^2 = 66\text{см}^2.$$

Відношення площин поперечних перерізів підібраних балок, а тим самим і маси одного метра дорівнюють:

$$23,4: 66: 91,8 = 1: 2,8: 3,9.$$

Одержані числа вказують, наскільки двотавр легший від балок іншого перерізу.