МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Циклова комісія природничих наук

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 2: Системи лінійних алгебраїчних
рівнянь (СЛАР)

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 2

План лекції

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, загальні поняття.
2. Метод Крамера розв'язування СЛАР.
3. Метод Жордана - Гауса

Рекомендована література:

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 2

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, загальні поняття

Визначення. *Системою m лінійних рівнянь* з *n невідомими* $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система, що має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij}, b_i $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ – дійсні числа, названі відповідно *коефіцієнтами при невідомих* і *вільними членами* рівнянь.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{– \textit{основна матриця системи.}}$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \text{– \textit{розширена матриця системи.}}$$

Визначення. Впорядкована система чисел $(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n)$ називається *розв'язком системи*, якщо кожне з рівнянь системи перетворюється на тотожність після підстановки замість $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ відповідно чисел $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$.

Визначення. Якщо в правій частині системи всі вільні члени дорівнюють нулю, то система називається *однорідною*, якщо ж принаймні одне $b_i \neq 0,\ \ i=\overline{1,m}$, то система називається *неоднорідною*.

Визначення. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Визначення. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

Розв'язати систему – означає з'ясувати, сумісна вона чи ні, та у випадку сумісності знайти множину всіх її розв'язків.

Визначення. Дві системи рівнянь називають *рівносильними*, або *еквівалентними*, якщо вони мають однакові розв'язки.

Над системами лінійних рівнянь можна виконувати наступні елементарні перетворення:

1) множити обидві частин будь-якого рівняння системи на дійсне число $\alpha \neq 0$;

2) додавати до обох частин будь-якого рівняння відповідні частини іншого рівняння, помножені на деяке число α;

3) перестановляти місцями рівняння у системі.

Елементарні перетворення приводять до систем, еквівалентних даній.

2. Метод Крамера розв'язання СЛАР

Розглянемо систему n лінійних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Визначник основної матриці системи Δ, називається головним *визначником* *системи*. Якщо $\Delta \neq 0$, то єдиний розв'язок системи можна знайти за *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$– допоміжні визначники *n*-ого порядку, утворені із головного визначника системи Δ заміною 1, 2,…, *n*-ого стовпців відповідно стовпцем вільних членів $b_1,\ b_2, \ldots, b_n$.

Якщо визначник системи $\Delta = 0$ й хоча б один із визначників $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ відмінний від нуля, то система розв'язків не має.

Якщо $\Delta = 0$ і при цьому $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$, то система може не мати розв'язків; але якщо за цих умов система має хоча б один розв'язок, то вона має безліч розв'язків.

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь й у випадку сумісності розв'язати її за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0, \text{ тобто система сумісна.}$$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера. Для цього знайдемо допоміжні визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -464, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -232, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -116.$$

Підставляючи знайдені значення визначників до формул Крамера, одержуємо розв'язок системи

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2.$$

3. Метод Жордана-Гауса

Метод Жордана-Гаусса полягає у тому, що невідомі послідовно виключаються як з наступних рівнянь, так і з попередніх. Розглянемо систему лінійних рівнянь. Із цією системою пов'язана таблиця жорданових перетворень, що має вигляд

Таблиця 1

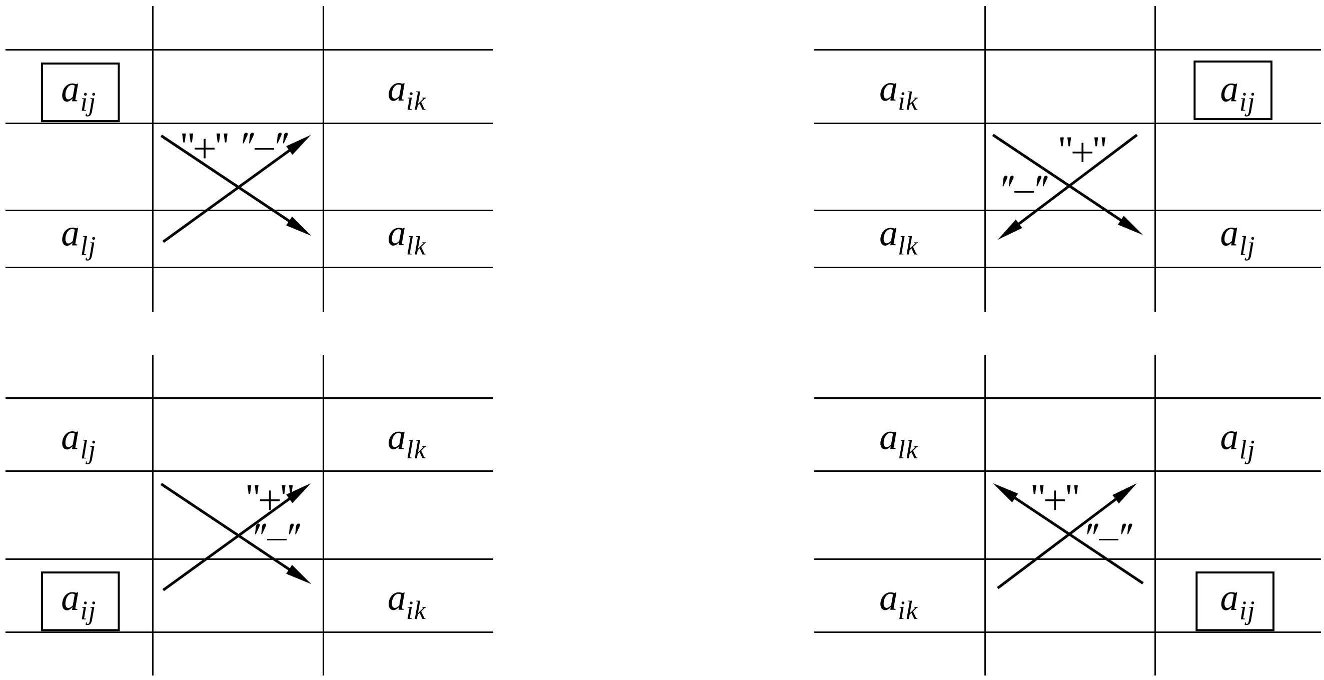
База	x_1	x_2	……	x_n	b_i

	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	b_1
	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	b_2
	…..	……	……	……	…..
	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

Розв'язок системи рівнянь зводиться до перетворення жорданових таблиць. Перехід від однієї таблиці до іншої відбувається за допомогою двох кроків:
1-й крок. Серед елементів таблиці $a_{ij} \neq 0$ вибирають розрахунковий елемент.
Рядок і стовпець, на перетині яких розташовано розрахунковий елемент, називаються відповідно *розрахунковим рядком* та *стовпцем*. На першому кроці всі елементи розрахункового рядка діляться на розрахунковий елемент. Далі всі елементи розрахункового стовпця, окрім розрахункового елемента, замінюють нулями.
2-й крок. Усі інші елементи жорданової таблиці обчислюють за правилом прямокутника. Нехай a_{ij} – розрахунковий елемент. Нам потрібно отримати на місці елемента a_{lk} новий a'_{lk}:

$$a'_{lk} = \frac{a_{ij} \cdot a_{lk} - a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}} = a_{lk} - \frac{a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}$$

Розрахунки зображено на схемі.



Після перетворень й отримання другої таблиці вибирають новий розрахунковий елемент і відбувається перехід до третьої таблиці й т.д. Жорданові перетворення закінчуються після визначення розрахункових елементів, кількість яких дорівнює рангу матриці системи.
Розв’язання системи в таблицях інколи називають методом жорданових виключень.
Примітка. Двічі в одному рядку вибирати розрахунковий елемент недоцільно.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2-3x_3=5, \\ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=4, \\ -\ x_1+4x_2-2x_3=9. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок системи будемо шукати методом Жордана-Гаусса. Запишемо систему у вигляді таблиці. Одночасно будемо визначати базисні й вільні невідомі. Базисною буде невідома, яка розташована лише в одному рівнянні системи.

Таблиця 2

База	x_1	x_2	x_3	b_0	
	–2	3	–3	5	У системі базисні змінні не визначені. Вводимо в базис x_1.
	$\boxed{1}$	1	1	4	
	–1	4	–2	9	
	0	$\boxed{5}$	–1	13	На другому кроці вводимо в базис x_2.
x_1	1	1	1	4	
	0	5	–1	13	
x_2	0	1	–1/5	13/5	
x_1	1	0	6/5	7/5	
	0	0	0	0	

У результаті двох кроків жорданових перетворень ми отримали систему з двома лінійно незалежними рівняннями:

$$\begin{cases} x_1+6/5\,x_3=7/5, \\ x_2-1/5\,x_3=13/5. \end{cases}$$

Тут базисні змінні – x_1, x_2, а вільні – x_3. Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x_1=7/5-6/5\,x_3, \\ x_2=13/5+1/5\,x_3. \end{cases}$$

Базисний розв'язок можна отримати, взявши $x_3=1$. Він має вигляд матриці – рядка $X_0=(1/5;14/5;1)$.