МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 5: Площина та пряма в просторі

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 6

План лекції

1. Різні види рівнянь площини. Взаємне розміщення двох площин.
2. Кут між площинами. Відстань від точки до площини.
3. Різні види рівнянь прямої у просторі.
4. Взаємне розміщення прямої і площини.

Рекомендована література:

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.:Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 6

Визначення. Рівнянням поверхні в *ДПСК OXYZ* називається рівняння з трьома змінними:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

якому задовольняють координати будь-якої точки поверхні і не задовольняють координати точок, які їй не належать.

1. Різні види рівнянь площини. Взаємне розміщення двох площин.

Складемо рівняння площини π у *ДПСК OXYZ*. Будь-яку площину в просторі можна задати за допомогою ненульового вектора $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$, перпендикулярного до цієї площини, та точки $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$, що належить даній площині. Нехай $\vec{r}$ та $\vec{r_0}$ радіус-вектори точок $M(x,y,z)\in\pi$ та $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$.

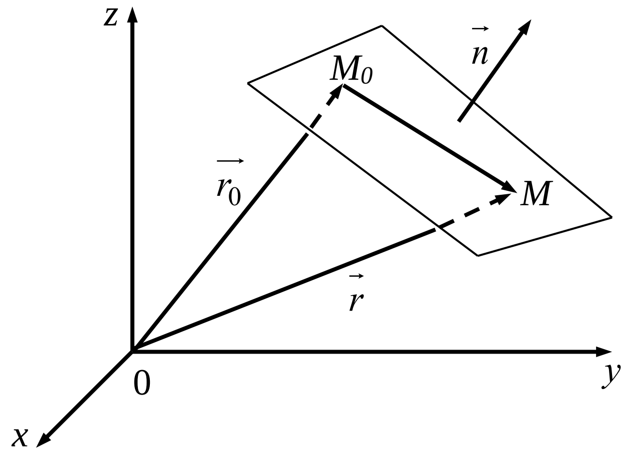

Рис. 1

Визначення. *Нормальним вектором* площини називається будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний до даної площини.

Векторне й загальне рівняння площини. Для довільної точки $M(x,y,z)\in\pi$ площини, і тільки для точок цієї площини вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}$ ортогональний вектору $\vec{n}$, а, як відомо із векторної алгебри, скалярний добуток таких векторів дорівнює нулю. Отже,

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})=0. \tag{2}$$

Рівняння (2) називається *векторним рівнянням площини*.

Запишемо рівняння (1) в координатній формі. Якщо $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$, $\vec{r_0}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{r}=(x,\ y,\ z)$,то скалярний добуток векторів $(\vec{n},\ \vec{r}-\vec{r_0})=0$ запишемо у вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{3}$$

Це рівняння *в'язки площин*, що проходять через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Оскільки вектор $\vec{n}$ ненульовий ($|A|+|B|+|C|\neq 0$), то позначивши $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, отримаємо *загальне рівняння площини* в просторі

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4}$$

Розглянемо деякі окремі випадки рівняння площини.

$D=0$: $Ax+By+Cz=0$ – площина проходить через початок координат.

$C=0$: $Ax+By+D=0$ – площина проходить паралельно осі $0z$.

$B=0$: $Ax+Cz+D=0$ – площина проходить паралельно осі $0y$.

$A=0$: $By+Cz+D=0$ – площина проходить паралельно осі $0x$.

$B=C=0$: $Ax+D=0$ – площина проходить паралельно координатній площині $0yz$.

$A=C=0$: $By+D=0$ – площина проходить паралельно координатній площині $0xz$.

$A=B=0$: $Cz+D=0$ – площина проходить паралельно координатній площині $0xy$.

Рівняння площини у «відрізках» . Розглянемо загальне рівняння площини (4) за умови, що всі його коефіцієнти та вільний член відмінні від нуля. Перенесемо вільний член D у праву частину рівняння $Ax+By+Cz=-D$ та виконаємо наступні перетворення. Поділимо обидві частини рівняння на $-D$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1, \quad \text{або} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Позначимо $-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c$. Тоді будемо мати

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{5}$$

Це рівняння називається *рівнянням площини у відрізках на осях*; a, b, c – величини відрізків, які площина відтинає на координатних осях (рахуючи кожен від початку координат).

Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Рівняння площини можна задати, якщо відомі три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)\in\pi$, $M_2(x_2, y_2, z_2)\in\pi$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)\in\pi$ цієї площини, що не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Розкривши визначник та звівши подібні, отримаємо рівняння площини у загальному вигляді.

2. Кут між двома площинами. Відстань від точки до площини

Нехай дві площини π_1 та π_2 задано своїми рівняннями

$$(\pi_1):\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\ , \quad \overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1) \ \text{ і}$$
$$(\pi_2):\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \quad \overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2).$$

Визначення. Двогранний кут φ між двома площинами визначається лінійним кутом φ між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ та $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$ цих площин. Кут φ між площинами можна обчислити за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{7}$$

З цієї формули випливає, що:

а) для того, щоб площини π_1 та π_2 були паралельними, необхідно й достатньо, щоб їх нормальні вектори були колінеарними, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \tag{8}$$

б) для того, щоб площини π_1 та π_2 були перпендикулярними, необхідно й достатньо, щоб їх нормальні вектори були ортогональними, тобто

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{9}$$

Відстань від точки до площини вимірюється довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину за формулою:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{10}$$

3. Різні види рівняння прямої у просторі

Загальне рівняння прямої. Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) називається *загальним рівнянням прямої* у просторі.

Канонічні й параметричні рівняння прямої у просторі. Пряму l у просторі можна задати, якщо відома точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0) \in l$ та напрямний вектор $\vec{s}(m, n, p)$ цієї прямої. Нехай $M(x,\ y,\ z)$ – довільна точка прямої l. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ колінеарний вектору $\vec{s} = (m, n, p)$. Отже, координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$ пропорційні координатам вектора $\vec{s}$ (Рис. 2):

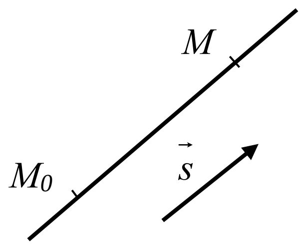

Рис. 2

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{12}$$

Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями прямої.*

Із канонічних рівнянь (12) можна отримати параметричні рівняння прямої у просторі. Для цього відношення у формулі (12) прирівняємо до параметру t

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t. \tag{13}$$

Звідси, перейшовши до системи, маємо

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{14}$$

Це *параметричні рівняння прямої*, що проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ у напрямку вектору $\vec{s} = (m, n, p)$. Параметричний запис рівняння прямої зручно застосовувати у випадках, коли потрібно знайти точку перетину прямої та площини.

Від загального рівняння (11) можна перейти до канонічних наступним чином.

Необхідно знайти координати $x_0,\ y_0,\ z_0$ деякої точки M_0 даної прямої, і напрямний вектор $\vec{s}=(m,n,p)$. В якості напрямного вектора $\vec{s}$ можна взяти будь-який вектор, перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$, наприклад, векторний добуток $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ нормальних векторів площин $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ та $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$.

Приклад 1. Знайти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x+y+2z-6=0,\\ 2x+2y-3z+2=0.\end{cases}$

Розв'язання. Щоб скласти канонічні рівняння прямої, необхідно знайти координати будь-якої точки M_0, що належить прямій, і напрямний вектор $\vec{s}$ цієї прямої. Координати точки можна знайти так: покладемо в системі рівнянь довільне значення однієї змінної, наприклад, $x_0=1$. Отримаємо систему рівнянь з двома невідомими. Розв'язавши її, знаходимо $y_0=1$, $z_0=2$. Таким чином, $M_0(1,1,2)$ – одна з точок, що належать прямій. Знайдемо напрямний вектор прямої. Оскільки нормальні вектори площин $\overrightarrow{n_1}=(1,1,2)$ та $\overrightarrow{n_2}=(2,2,-3)$, то

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+7\vec{j}.$$

Отже, канонічне рівняння даної прямої має вигляд $\dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-2}{0}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Якщо на прямій l відомо дві точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$,то це означає, що відомий напрямний вектор прямої $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ у *ДПСК.*
Складемо канонічні рівняння прямої, що проходить через ці точки.
Поклавши в канонічному рівнянні (13) прямої $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$, $x_0=x_1$, $y_0=y_1$, $z_0=z_1$, дістанемо *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ . \tag{15}$$

Кут між двома прямими. Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ ; \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\,.$$

Визначення. *Кутом між двома прямими* l_1 та l_2 називається кут між напрямними векторами цих прямих $\overrightarrow{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$ і $\overrightarrow{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$.
Якщо один із кутів φ_1, то другий кут $\varphi_2=\pi-\varphi_1$. Скориставшись формулою скалярного добутку двох векторів , можна обчислити косинус кута між

прямими за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (16)$$

З цієї формули випливає:

а) для того, щоб дані прямі були паралельними, необхідно і достатньо, щоб їх напрямні вектори були колінеарними, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \qquad (17)$$

б) для того, щоб дані прямі були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб їх напрямні вектори були ортогональними, тобто виконувалась умова

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (18)$$

4. Взаємне розташування прямої та площини

Нехай в *ДПСК* задано площину загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ й пряму канонічними рівняннями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Визначення. К*утом між прямою* l *та площиною* π називається гострий кут між прямою та проекцією цієї прямої на площину.

Цей кут φ визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\left|A m + B n + C p\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (19)$$

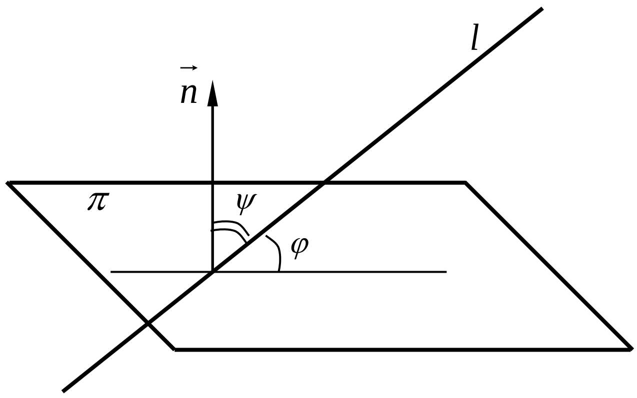

Рис. 3

Для того, щоб пряма і площина були перпендикулярними, необхідно й достатньо, щоб вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ були колінеарними, тобто $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Для того, щоб пряма і площина були паралельними, необхідно й достатньо, щоб вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ були ортогональними, тобто $Am + Bn + Cp = 0$.

Приклад 2. Дано чотири точки $A_1(1, -2, 1)$, $A_2(3, -1, -1)$, $A_3(2, 0, 1)$, $A_4(2, -1, 4)$. Скласти рівняння: а) площини $A_1A_2A_3$; б) прямої A_1A_2. Обчислити: в) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. а) Скориставшись формулою (6), складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$, що проходить через три точки A_1, A_2, A_3.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник, отримаємо загальне рівняння площини

$$4x + 2y - 3z + 3 = 0.$$

б) Складемо рівняння прямої A_1A_2 як прямої, що проходить через дві точки A_1 і A_2, скориставшись формулою (15):

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{-1+2} = \frac{z-1}{-1-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

в) Синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$ обчислимо, використовуючи формулу (19) . Складемо рівняння прямої A_1A_4:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+2}{-1+2} = \frac{z-1}{4-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Рівняння площини $A_1A_2A_3$: $4x + 2y - 3z + 3 = 0.$

Тоді $m = 1$, $n = 1$, $p = 3$, $A = 4$, $B = 2$, $C = -3$ і дістаємо шуканий кут:

$$\sin\varphi = \frac{|1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 3\cdot(-3)|}{\sqrt{1+1+9}\sqrt{16+4+9}} = \frac{3}{\sqrt{319}} \approx 0{,}168.$$

Нехай задано загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ й

параметричні рівняння прямої $\begin{cases} x = x_0 + m\,t, \\ y = y_0 + n\,t, \\ z = z_0 + p\,t. \end{cases}$ Потрібно визначити їх взаємне розташування. Можливі наступні випадки взаємного розташування прямої й площини: 1) пряма перетинає площину в одній точці; 2) пряма паралельна площині й не лежить у ній; 3) пряма належить площині. Умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти прямої та площини:

1) $Am + Bn + Cp \neq 0$ – є умова того, що пряма перетинає площину в одній точці;

2) $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ – є умова того, що пряма паралельна площині й не лежить у ній;

3) $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ – є умова того, що пряма належить площині.

Приклад 3. Визначити взаємне розташування прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5}$ та площини $x + y - 2z - 4 = 0$.

Розв'язання. Скориставшись формулами (13), (14) визначимо невідомі x, y, z із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5} = t, \\ x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 - t, \\ z = 2 + 5t, \\ x + y - 2z - 4 = 0. \end{cases}.$$

Підставляючи ці значення невідомих у останнє рівняння системи, ми приходимо до рівняння з одним невідомим $1 + 3t - 1 - t - 2(2 + 5t) - 4 = 0$. Розв'язавши його, знаходимо: $t = -1$. Отже, пряма перетинає площину в одній точці.