МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 9: Невизначений та визначений інтеграли

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 16

План лекції

1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів.
2 Методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, інтегрування заміною змінної, інтегрування частинами).

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 16

1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Властивості інтеграла. Таблиця інтегралів.

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною* від функції $f(x)$ для $x \in [a, b]$, якщо в усіх точках $[a, b]$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.
Якщо в деякому інтервалі функція $F(x)$ є первісною від функції $f(x)$, то і функція $F(x)+C$, де C – будь-яка стала, також буде первісною для $f(x)$.

Визначення. *Невизначеним інтеґралом* від функції $f(x)$ називається множина всіх її первісних і позначається символом $\int f(x)\,dx$.
Отже, за визначенням, $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, якщо $F'(x) = f(x)$. При цьому функцію $f(x)$ називають *підінтеґральною функцією*, $f(x)\,dx$ – *підінтеґральним виразом*, символ $\int$ – *символом інтеґрала*.
Операція знаходження невизначеного інтеґрала називається *інтеґруванням*

функції.

Основна теорема інтегрального числення. Усяка неперервна функція має первісну.

Властивості невизначеного інтеґрала

1. Похідна від невизначеного інтеґрала дорівнює підінтеґральній функції: $\left(\int f(x)\,dx \right)' = \left(F(x) + C \right)' = f(x)$.

2. Диференціал від невизначеного інтеґрала дорівнює підінтеґральному виразу: $d\left(\int f(x)\,dx \right) = f(x)\,dx$.

3. Невизначений інтеґрал від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Невизначений інтеґрал від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтеґралів кожної з цих функцій окремо, тобто:

$$\int [\, f_1(x) + f_2(x) \,]\, dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

5. Сталий множник можна винести за знак інтеґрала: $\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$.

6. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Таблиця інтеґралів

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$

3. $\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$

16. $\int tg\,x\,dx = -\ln|\,\cos x\,| + C$

17. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

18. $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$

19. $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C$

20. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$ 21. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

2 Методи інтегрування

Безпосереднє інтеґрування

Метод безпосереднього інтеґрування базується на застосуванні табличних інтеґралів і основних властивостей невизначеного інтеґрала.

Приклад 1. Знайти $\int \left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx$.

Розв'язок. Запишемо інтеґрал у вигляді суми трьох інтеґралів. Всі інтеґрали табличні.

$$\int \left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx$.

Розв'язок. Запишемо підінтеґральний вираз у вигляді, зручному для інтеґрування.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx = \int \left(3x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{4}}\right)dx = \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C.$$

Приклад 3. Застосувавши властивість 6 невизначеного інтеґрала, знайти $\int \cos 7x\, dx$.

Розв'язок. $\int \cos 7x\, dx = \frac{1}{7}\sin 7x + C$.

Приклад 4. Обчислити $\int \frac{dx}{x+3}$.

Розв'язок. Скористаємося властивістю 6 невизначеного інтеґрала

$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|\, x+3 \,| + C$.

Приклад 5. Обчислити $\int \sin(2x-6)dx$.

Розв'язок. $\int \sin(2x-6)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-6) + C$.

Інтеґрування методом заміни змінної

У багатьох випадках введення нової змінної інтеґрування дає змогу звести відшукання даного інтеґрала до знаходження табличного інтеґрала. Цей спосіб називають *методом заміни змінної*, або *методом підстановки*.

Заміна змінної у невизначеному інтеґралі проводиться за допомогою підстановок двох видів:

1) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно диференційована функція нової змінної *t*. Тоді $dx = \varphi'(t)\, dt$. Формула заміни змінної в цьому випадку має вигляд:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt. \qquad (1)$$

2) $t=\psi(x)$, де $\psi(x)$ – частина підінтегральної функції.

Приклад 6. Знайти інтеґрал $\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$.

Розв'язок. Вводимо заміну $\sin x=t$. Тоді $\cos x\,dx=dt$.

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dx\end{vmatrix}=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

Приклад 7. Знайти інтеґрал $\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Розв'язок. $\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=\begin{vmatrix}1+x^2=t\\ 2x\,dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$.

Приклад 8. Знайти інтеґрал $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Розв'язок. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\begin{vmatrix}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{vmatrix}=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

Приклад 9. Знайти інтеґрал $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$

Розв'язок. $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}\begin{vmatrix}x=\sqrt{t}\\ x^2=t\\ 2x\,dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{1}{2}arctg\,t+C=\frac{1}{2}arctg\,x^2+C$.

Інтеґрування частинами

До досить ефективних методів інтеґрування належить метод інтеґрування частинами. Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – дві неперервно диференційовані функції змінної *x*. Тоді скориставшись правилом знаходження диференціалу добутку функцій $u\,v$, маємо $d\,(u\,v)=u\,dv+v\,du$.

Взявши невизначений інтеґрал від обох частин цієї рівності і врахувавши, що $\int d(uv)=uv+C$, дістанемо: $u\,v=\int u\,dv+\int v\,du$ або

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du. \tag{2}$$

Ця формула називається *формулою інтеґрування частинами*. За її допомогою знаходження інтеґрала $\int u\,dv$ зводиться до знаходження іншого інтеґрала $\int v\,du$, який, звичайно, обчислюється легше.

При цьому за *u* береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за *dv* – та частина підінтеґрального виразу, інтеґрал від якої відомий або може бути легко знайдений.

Основні класи функцій, що інтеґруються частинами: $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P(x)\,\cos\alpha x\,dx$, де $P(x)$ - многочлен. Тут за *u* треба взяти $P(x)$, а за *dv* – відповідно вирази $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x\,dx$, $\cos\alpha x\,dx$. Для інтеґралів виду $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin\alpha x\,dx$, $\int P(x)\ \arccos\alpha x\,dx$, $\int P(x)\ arctg\,\alpha x\,dx$, $\int P(x)\ arcctg\alpha x\,dx$ за u беремо відповідно функції $\ln x$, $\arcsin\alpha x$, $\arccos\alpha x$, $arctg\,\alpha x$, $arcctg\alpha x$, а за dv – вираз $P(x)\,dx$.

Приклад 10. $\int(x+1)\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -(x+1)\cos x +$
$+\int\cos x\,dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C$.

Приклад 11. $\int x^2 e^x\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Приклад 12. $\int e^{ax}\sin bx\,dx \begin{vmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\,dx \\ dv = \sin bx\,dx & v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Проінтеґрувавши частинами вдруге, маємо:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Після двократного інтеґрування частинами ми в правій частині знову одержали початковий інтеґрал. Отже, приходимо до рівняння відносно невідомого інтеґрала. З цього рівняння знаходимо:

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx \quad \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{b^2}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx\right) + C.$$

ЛЕКЦІЯ 17

План лекції

1. Поняття визначеного інтеграла Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.
2. Методи обчислення визначених інтегралів.
3. Застосування визначеного інтеграла в геометрії та фізиці.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 17

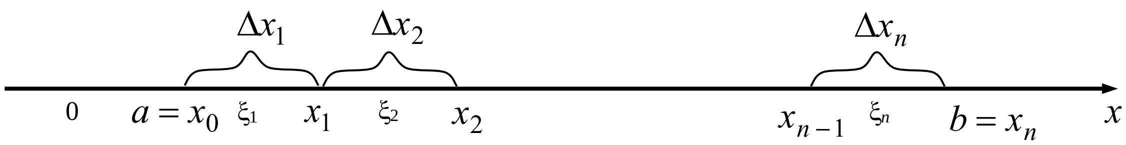
1. Поняття визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла.

Формула Ньютона - Лейбниця

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана функція $y = f(x)$. Виконаємо такі дії.

1. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n відрізків: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, де $x_0 = a$, $x_n = b$.

2. У кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, …, n) виберемо довільну точку ξ_i,



$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, і помножимо значення функції $f(x)$ в точці ξ_i на довжину

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ відповідного відрізка: $f(\xi_i)\Delta x_i$.

3. Складемо суму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Ця сума називається *інтеґральною сумою Дарбу*.

4. Назвемо найбільшу з довжин відрізків $\max \Delta x_i$ *кроком розбиття*. Нехай число n відріз-ків розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ необмежено росте, тоді $\max \Delta x_i \to 0$. Якщо при цьому інтеґральна сума σ_n (9.1) має скінчену границю *I*, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на малі відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, ні від вибору точок ξ_i у кожному з них, то це число *I* називають *визначеним інтеґралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Числа a і b відповідно називають *нижньою і верхньою границями інтеґрування*, а відрізок $[a, b]$ –*проміжком інтеґрування*.

Визначений інтеґрал має ті самі властивості, що й невизначений. Крім того, має власні:

1°. Якщо відрізок інтеґрування $[a, b]$ розбито на дві частини $[a, c]$ і $[c, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

2°. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3°. $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$, якщо $f(x)$ – непарна функція.

4°. $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$, якщо $f(x)$ – парна функція.

5°. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Для обчислення визначеного інтеґрала застосовуємо ***формулу Ньютона-Лейбниця***

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (2)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. Тобто, визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ дорівнює приросту первісної на цьому відрізку. Це основна формула інтеґрального числення.

Приклад 5. Обчислити визначені інтеґрали: а) $\int\limits_1^2 xdx$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язок. Знаходимо первісну, а потім застосовуємо формулу (2).

$$\text{а) } \int\limits_1^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{б) } \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

2. Методи обчислення визначених інтегралів

Заміна змінних під знаком визначеного інтеграла

Нехай $f(x)$ – будь-яка функція, неперервна в проміжку $[a,b]$ і нехай $\varphi(t)$ – деяка функція, що задовольняє такі умови:

1) $\varphi(t)$ – визначена і неперервна в деякому проміжку $[\alpha,\beta]$, а її значення не виходять за межі проміжку $[a,b]$, коли t змінюється в проміжку $[\alpha,\beta]$;

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) у проміжку $[\alpha,\beta]$ існує неперервна похідна $\varphi'(t)$.

Тоді маємо таку формулу заміни змінної у визначеному інтеґралі:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Приклад 6. Обчислити інтеґрал: $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Розв'язок.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x=\sin t & x=0 & t=0 \\ dx=\cos t dt & x=1 & t=\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Зауваження. При застосуванні формули (3) необхідно після заміни змінної замінити і межі інтеґрування. Якщо визначити межі інтеґрування не вдається, то потрібно спочатку знайти невизначений інтеґрал, а потім повернутись до старої змінної та обчислити визначений інтеґрал.

Інтеґрування частинами у визначеному інтеґралі

Застосувавши формулу Ньютона-Лейбниця до формули інтеґрування частинами, маємо:

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (4)$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Розв'язок.

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{vmatrix}=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx=cosx\Big|_0^{\pi}=-2.$$

3. Застосування визначеного інтеграла в геометрії та фізиці

Визначення. *Криволінійною трапецією* називається фігура, обмежена частиною графіка функції $y=f(x)$, віссю $0x$ та двома прямими $x=a$ та $x=b$.

Площа такої криволінійної трапеції обчислюють за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

При цьому, звичайно, не виключаються випадки, коли одна або й обидві бічні сторони трапеції перетворюються в точку.

Кожну з плоских фігур, які зустрічаються при розв'язуванні задач практичного характеру, можна зобразити як сукупність кількох криволінійних трапецій.

Приклад 8. Знайти площу половини круга радіуса R.

Розв'язок. Як відомо, канонічне рівняння кола радіуса R, центром якого є початок системи координат, має вигляд $x^2+y^2=R^2$. Тому рівняння верхнього півкола можемо записати у вигляді $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Підставивши до формули (1), дістанемо

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx\begin{vmatrix} x=R\sin t & x=-R & t=-\pi/2 \\ dx=R\cos t dt & x=R & t=\pi/2 \end{vmatrix}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^2\cos^2 t dt=$$

$$=R^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi R^2}{2} \text{ (кв. од.)}$$

Якщо на $[a, b]$ функції $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ неперервні, то площа області, обме-женої знизу графіком функції

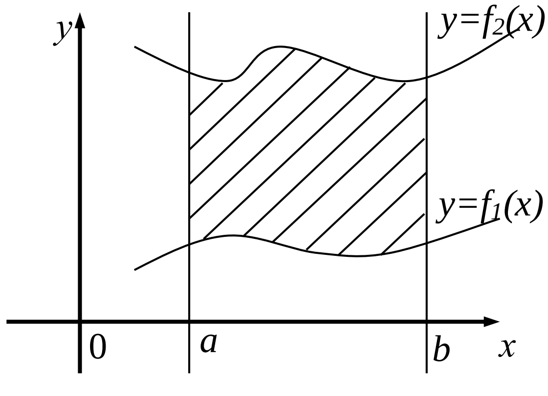


Рис. 1

$y=f_1(x)$, зверху – графіком функції $y=f_2(x)$, зліва – прямою $x=a$, справа – прямою $x=b$ (рис. 1), обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx. \qquad (2)$$

Приклад 9. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=-x^2$, $y=e^x$, віссю ординат і прямою $x=1$ (рис. 2).

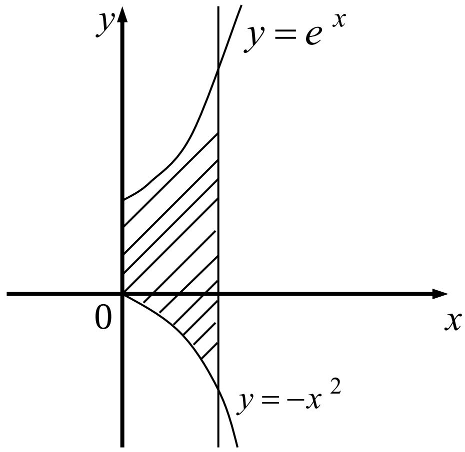


Рис. 2

Розв'язок.

$$S=\int_0^1\left[e^x-(-x^2)\right]dx=\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

Об'єм тіла обертання

Нехай крива AB задана рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція змінної x, обертається навколо осі абсцис, описуючи деяку поверхню. Визначимо об'єм тіла обертання, утвореного цією поверхнею та двома площинами $x=a$ і $x=b$, що проходять перпендикулярно осі обертання $0x$. Об'єм тіла обертання визначається формулою:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (6)$$

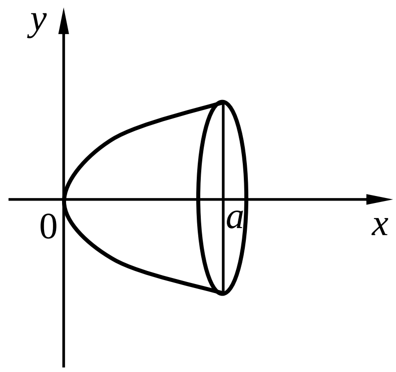


Рис. 3

Приклад 10. Знайти об'єм сегмента параболоїда, утво-реного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=2px$ і $x=a$, навколо осі $0x$ (рис.3).

Розв'язок. Оскільки x змінюється від 0 до a, то

$$V_x=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_a^a 2pxdx=\pi px^2\Big|_0^a=\pi pa^2 \text{ (куб. од.)}$$

Фізині застосування інтеграла

Задача на роботу

Приклад 11. Гвинтова пружина стискається на *x (м)* пропорційно діючій силі *F (Н).* Обчислити роботу, що виконує сила *F*, яка стискає пружину на 0,04 *м*. Для стискання пружини на 0,01 *м* потрібна сила 10*Н.*

Розв'язок. За законом Гука абсолютне подовження x пружини (в *м*) прямо пропорційне силі F (в *Н*): $F = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності.
За умовою $F=10Н$, $x=0{,}01м$, тому

$$k = \frac{F}{x} = \frac{10}{0{,}01} = 1000\frac{Н}{м}\ ; \quad k = \frac{F}{x}\ \frac{10}{0{,}01} = 1000\ \ \frac{Н}{м}$$

Робота виконана силою $F = f(x)$ при зміщенні по осі OX матеріальної точки від $x=a$ до $x=b$, визначається за формулою

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

За умовою $f(x) = kx$, $(k=1000, f(x)=1000x)$, $a=0$, $b=0{,}04$ *м*

$$A = \int_0^{0{,}04} 1000xdx = 1000\int_0^{0{,}04} xdx = 1000\frac{x^2}{2}\int_0^{0{,}04} = 1000\frac{0{,}04^2}{2}$$

$$A = \int_0^{0{,}04} 1000xdx = 1000\int_0^{0{,}04} xdx = 1000\frac{x^2}{2}\int_0^{0{,}04} = 1000\frac{0{,}04^2}{2} = 0{,}8\ Дж$$