МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
Циклова природничих дисциплін

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 11: Числові та функціональні ряди, розкладання функцій у степеневі ряди, ряди Фур'є

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 21

План лекції

1. Поняття числового ряду. Збіжні та розбіжні ряди. Необхідна умова збіжності ряду.
2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.
3. Знакозмінні та знакопочережні ряди. Ознака Лейбниця. Абсолютно та умовно збіжні ряди.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 21

1. Поняття числового ряду. Збіжні та розбіжні ряди. Необхідна умова збіжності ряду

Визначення. Нехай дана нескінченна послідовність чисел $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n, ...$

Вираз
$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називають *числовим рядом*. При цьому числа $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n, ...$ називають *членами ряду*, a_n *- загальний член ряду*.

Визначення. Сума скінченого числа n перших членів ряду називається *n-ою частинною сумою ряду*:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Розглянемо суми $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, ... Частинні суми ряду утворюють числову послідовність (S_n).

Визначення. Якщо існує скінчена границя $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то її називають *сумою ряду* (1) і говорять, що ряд *збіжний*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, або дорівнює нескінченності, то говорять, що ряд (1) *розбіжний* і суми не має.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (2)$$

Розв'язок. Це *геометрична проґресія* з першим членом a і знаменником q $(a \neq 0)$.

Сума n перших членів геометричної проґресії дорівнює (при $q \neq 1$):

$S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$, знаходимо границю цієї суми:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1; \\ \infty, & |q|>1. \end{cases}$$

Якщо $q=1$, то ряд (2) має вигляд $a+a+a+\ldots$ У цьому випадку $S_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, ряд розбіжний.

Якщо $q=-1$, то ряд (12.2) має вигляд $a - a + a - \ldots$ У цьому випадку

$$S = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ a, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Отже, S_n границі не має – ряд розбіжний.

Отже, остаточно маємо, що ряд – геометрична проґресія збіжний і його сумою є число $S = \dfrac{a}{1-q}$, якщо $|q|<1$ і розбіжний, якщо $|q| \geq 1$.

Необхідна умова збіжності ряду

Теорема. Якщо ряд збіжний, то його n-й член прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (3)$$

Висновок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, але якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Це означає, що невиконання умови (.3) є достатньою умовою розбіжності ряду.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + \ldots + \dfrac{n}{2n+1} + \ldots$.

Розв'язок. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, то заданий ряд розбіжний.

2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Ознака порівняння. Нехай дано два ряди з невід'ємними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, і нехай, починаючи з деякого $n > N$, виконується умова $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тоді:

1) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Для порівняння часто використовують ряди геометрична прогресія та узагальнений гармонічний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{\,n-1}, \ |q| < 1 \text{ - збіжний}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \alpha > 1, & \text{збіжний,} \\ \alpha \le 1, & \text{розбіжний.} \end{cases}$$

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \ldots + \dfrac{\ln n}{n} + \ldots$

Розв'язок. Члени даного ряду більші відповідних членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. $\left(\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n} \right)$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, складений із менших членів, є розбіжним, то і вихідний ряд також є розбіжним.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \ldots$$

Розв'язок. Порівняємо даний ряд із рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$. Оскільки $\dfrac{1}{n \cdot 3^{n-1}} < \dfrac{1}{3^{n-1}}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$ збіжний, як нескінченно спадна геометрична проґресія, то і даний ряд також збіжний.

Гранична форма ознаки порівняння. Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряди з невід'ємними членами й існує відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k > 0$, то розглянуті ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$.

Розв'язок. Порівняємо даний ряд із гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+5}=\frac{1}{3}\neq 0$. Отже, даний ряд розбіжний.

Ознака Даламбера. Нехай маємо ряд із додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Якщо існує границя відношення наступного члена ряда до попереднього

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k, \qquad (4)$$

то при $k<1$ ряд збіжний, при $k>1$ ряд розбіжний, при $k=1$ потрібні додаткові дослідження – ознака відповіді не дає.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв'язок. Скористаємося ознакою Даламбера: маємо $a_n=\frac{n}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

Отже, підставивши в (4), маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1.$$

Даний ряд збіжний.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує

границя $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k, \qquad (5)$$

то при $k<1$ ряд збіжний, при $k>1$ ряд розбіжний, при $k=1$ потрібні додаткові дослідження – ознака відповіді не дає.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

Розв'язок. Тут зручно застосувати ознаку Коші, оскільки $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\ln(n+1)}$, а границя останнього дробу знаходиться просто:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1.$$

Даний ряд збіжний.

Інтеґральна ознака Коші. Нехай дано знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, члени якого є значеннями функції натурального аргументу n $f(n)$ такі що

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \ldots,\ a_n = f(n), \ldots$$

і нехай $f(x)$ монотонно спадна функція на інтервалі $[1; +\infty)$. Тоді ряд і невласний інтеґрал $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ одночасно збіжні або розбіжні.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (*узагальнений гармонічний ряд*).

Розв'язок. Скористуємося інтеґральною ознакою Коші. Зробивши заміну n на x у загальному члені $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$, будемо мати $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^{A} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} \Bigg|_1^A = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} A^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{-1+\alpha}, & \alpha > 1 \text{ збіжний}, \\ \infty, & \alpha < 1 \text{ розбіжний}. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$: $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_1^{A} \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \lim\limits_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = \infty$. Ряд розбіжний.

Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.
2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.
3. Інтегральна ознака Коші використовується тоді, коли функція загального члена ряду легко інтегрується.
4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії або узагальнений гармонічний ряд.
5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.
6. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх

ознак збіжності.

3. Знакозмінні та знакопочережні ряди. Ознака Лейбниця. Абсолютно та умовно збіжні ряди.

Визначення. Ряд, члени якого мають різні знаки, називаються знакозмінними.

Визначення. Ряд виду $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, (6)

називається *знакопочережним рядом*.

Теорема Лейбниця. Якщо у знакопочережному ряді (6)

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

члени такі, що $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд збіжний, його сума S додатна і не перевершує першого члена ($S < a_1$).

Зауваження. Теорема Лейбниця справедлива, якщо нерівності $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$ виконуються, починаючи з деякого N.

Визначення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збіжний ряд, складений з абсолютних величин його членів: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, складений з абсолютних величин його членів, розбіжний, то даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним* рядом.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Розв'язок. Перша умова ознаки Лейбніца виконується: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$ Так як $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то виконана і друга умова. Отже, даний ряд збіжний. Складемо ряд з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Отримали гармонічний ряд, який розбіжний. Отже, даний ряд умовно збіжний.

ЛЕКЦІЯ 22

План лекції

1. Функціональні ряди. Область збіжності.
2. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.
3. Розкладання функції у степеневі ряди Тейлора та Маклорена.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 22

1. Функціональні ряди. Область збіжності

Визначення. Ряд $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$, члени якого – функції змінної x, називається *функціональним*.

Надаючи змінній x певні числові значення, ми одержуємо різні числові ряди, які можуть виявитися збіжними або розбіжними.

Визначення. Множина значень x, для яких функціональний ряд збіжний, нази-вають *областю збіжності* цього ряду.

2. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду

Визначення. Функціональний ряд, що має вигляд

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - коефіцієнти ряду, а x_0- деяке фіксоване число, називається *степеневим*.

Якщо в ряді (1) прийняти $x_0=0$, то отримаємо більш простий ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (2)$$

Для рядів (1), (2), аналогічно з числовими рядами при дослідженні збіжності можна застосовувати узагальнені ознаки збіжності Даламбера та радикальну ознаку Коші . Але відмінністю степеневих рядів від числових є те, що один і той самий степеневий ряд може бути збіжним, або розбіжним залежно від точки x.При дослідженні збіжності степеневого ряду застосовується теорема Абеля.

Теорема. Якщо ряд (1) є збіжним у деякій точці $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх $|\, x \,| < x_0$, а якщо ряд (1) є розбіжним у точці $x = x_1 \neq 0$, то він розбіжний для всіх $|\, x \,| > |\, x_1 \,|$.

Для дослідження збіжності степеневих рядів вводять поняття радіуса, інтервалу та області збіжності.

Визначення. *Інтервалом збіжності степеневого ряду* (1), (2) називається інтервал $x \in (a, b)$, в якому цей ряд є збіжним.

Щоб знайти інтервал збіжності степеневого ряду (1), спершу необхідно знайти границю

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| , \qquad (3)$$

де $u_n = a_n (x - x_0)^n$, а $u_{n+1} = a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}$, $a_n > 0$.

Підставивши значення для u_n і u_{n+1} у формулу (3), маємо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} |\, x - x_0 \,| = |\, x - x_0 \,| \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < \infty$, тоді знаходження інтервалу збіжності зводиться до розв'язання нерівності

$$l\, |\, x - x_0 \,| < 1 \quad \Rightarrow \quad |\, x - x_0 \,| < \frac{1}{l} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{l} + x_0 < x < \frac{1}{l} + x_0 . \qquad (4)$$

Це і буде інтервал збіжності степеневого ряду (1).

Щоб знайти інтервал збіжності ряду (2) необхідно покласти в нерівності (4) $x_0 = 0$. Ми отримаємо симетричний відносно початку координат інтервал

$$-\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l} . \qquad (5)$$

Для знаходження області збіжності необхідно перевірити збіжність числових рядів на кінцях інтервалу збіжності в точках $x_1 = x_0 - \frac{1}{l}$ та $x_2 = x_0 + \frac{1}{l}$. Якщо в одній із цих точок, або в обох ряд буде збіжним, то їх необхідно включити до області збіжності. Отже, область збіжності степеневого ряду може бути наступною:

1.Збігатися з інтервалом збіжності $\left(-\frac{1}{l}+x_0,\ x_0+\frac{1}{l}\right)$. (6)

2. Включати одну з граничних точок інтервалу, тобто мати вигляд $\left[-\frac{1}{l}+x_0,\ x_0+\frac{1}{l}\right)$, або $\left(-\frac{1}{l}+x_0,\ x_0+\frac{1}{l}\right]$. (7)

3. Включати обидві граничні точки інтервалу $\left[-\frac{1}{l}+x_0,\ x_0+\frac{1}{l}\right]$. (8)

Зауваження. Інтервал і область збіжності можна знайти, використавши узагальнену радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\,u_n\,|}, \tag{9}$$

провівши ті самі міркування, що і при застосуванні узагальненої ознаки збіжності Даламбера.

Визначення. *Радіусом збіжності степеневого ряду* (2) називається число

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R. \tag{10}$$

Якщо $R=0$, то ряд (2) збіжний лише при $x=0$.

Для ряду (2) за допомогою радіуса збіжності можна записати інтервал збіжності у вигляді $(-R,\ R)$. Зваживши на (5), можемо записати

$$(-R,\ R)=\left(-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right) \tag{11}$$

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$.

Розв'язок. Тут $u_n=\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$, $u_{n+1}=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$. Тоді скориставшись формулою (3), маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|(x-3)^{n+1}\right|n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\left|(x-3)^n\right|}=$

$=|x-3|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)3}=\frac{1}{3}|x-3|$. Отже, інтервал збіжності визначається із нерівності $\frac{1}{3}|x-3|<1,\quad |x-3|<3\ \Rightarrow\ 0<x<6$.

Інтервал збіжності $x\in(0,\ 6)$.

Дослідимо збіжність числових рядів на кінцях інтервалу.

1. При $x=0$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. За ознакою Лейбніца даний ряд є збіжним, точніше, умовно збіжним, тому точка $x=0$ входить до області збіжності.

2. При $x=6$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Це гармонічний ряд. Ми знаємо, що він розбіжний. Звідси область збіжності $x\in[0;6)$.

3. Розкладання функції у степеневі ряди Тейлора та Маклорена

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+... \quad , \qquad (12)$$

який збігається в інтервалі (x_0-R, x_0+R). В цьому випадку кажуть, що функция $f(x)$ розкладається в степеневий ряд в околі точки x_0 або за степенями $x-x_0$. Можна довести, що коефіцієнти $a_0, a_1, a_2,..., a_n,...$ цього ряду обчислюються за формулами:

$$a_0=f(x_0),\, a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\, a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots \qquad (13)$$

Підставляючи ці коефіцієнти у формулу (12), дістанемо степеневий ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (14)$$

який називається рядом *Тейлора* для функції $f(x)$. Окремий випадок ряда Тейлора при $x_0=0$ називається рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (15)$$

Розклад в ряд Маклорена деяких функцій:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Інтервалом збіжності для перших трьох рядів є вся дійсна вісь, а для четвертого ряду – інтервал (-1,1). Степеневі ряди застосовують для обчислення з довільною точністю значень функцій і значень визначених інтегралів, для яких відповідний невизначений інтеграл „не береться".

Приклад 2. Знайти sin1 з точністю до 0,001.

Розв'язок. Запишемо $\sin 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$. Ряд, що стоїть у правій частині абсолютно збіжний. Оскільки $\frac{1}{5!}\approx 0{,}008>0{,}001$, то для знаходження sin1 з точністю до 0,001 досить перших трьох доданків: $\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}=0{,}842$. Помилка, що припускається при цьому, менша, ніж перший відкинутий член (тобто менша, ніж 0,0002). Обчислене мікрокалькулятором значення $\sin 1$ наближено дорівнює 0,84147.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язок: Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, замінюючи x на $-x^2$ відповідній формулі: $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$. Інтегруючи цей степеневий ряд на відрізку, що належить інтервалу збіжності, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{10 \cdot 4^5} - \frac{1}{42 \cdot 4^7} + \ldots$ Одержали ряд лейбницівського типу.

Оскільки $\frac{1}{3 \cdot 4^3} = 0,0054 > 0,001$, а $\frac{1}{10 \cdot 4^5} < 0,001$, то з точністю до 0,001 маємо:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245.$$

ЛЕКЦІЯ 23

План лекції

1. Ряди Фур'є.
2. Розкладання функцій в ряди Фур'є.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 23

1. Ряди Фур'є

Розглянемо функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_1\sin nx+\ldots \qquad (1)$$

Цей ряд називається *тригонометричним*; числа $a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...$ називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Вільний член ряду записаний у вигляді $\frac{a_0}{2}$ для одноманітності подальших формул. Ряд (1) часто записують також наступним чином:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_1\sin nx \qquad (2)$$

Оскільки члені тригонометричного ряду (2) мають спільний період 2π, то й сума ряду, якщо він збігається, також є периодичною функцією з періодом 2π.

Припустимо, що функція $f(x)$ є сумою цього ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_1 \sin nx\,. \qquad (3)$$

В такому випадку кажуть, що функція $f(x)$ розкладається у тригонометричний ряд. Можна довести, що коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами:

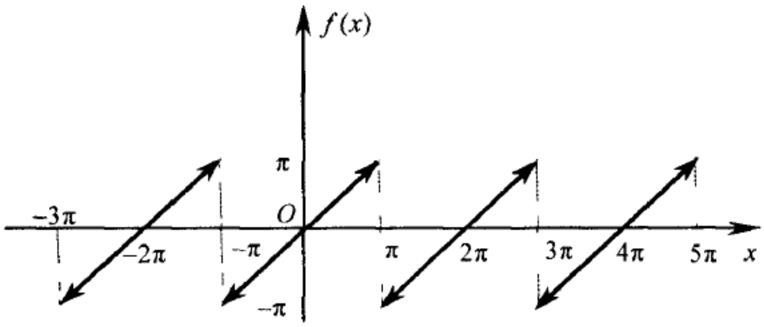
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (4)$$

Коефіцієнти ряда (2), визначені за цими формулами, називаються *коефіцієнтами Фур'є*. Тригонометричний ряд (2), коефіцієнти якого обчислені за формулами (4), називається рядом Фур'є для функції $f(x)$.

2. Розкладання функцій в ряди Фур'є.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, задану на інтервалі $-\pi \le x \le \pi$ формулою $f(x) = x$.

Розв'язок. Графік цієї функції та її продовження на всю числову вісь зображено на рисунку:



Для знаходження коефіцієнтів Фур'є застосуємо формули (4).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{1}{\pi n}\left(-2\pi\cos n\pi + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$= -\dfrac{2}{n}\cos n\pi = -\dfrac{2(-1)^n}{n}$; Таким чином, $a_0 = a_n = 0, b_n = -\dfrac{2(-1)^n}{n}$. Отже, ряд Фур'є нащої функції має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n}\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. У деяких випадках формули (4) для коефіцієнтів Фур'є можуть бути спрощені. Це справджується для парних і непарних функцій. Наведемо декілька очевидних властивостей парних і непарних функцій.

1^0. Добуток парної функції на парну або непарної на непарну є функція парна.

2^0. Добуток парної функції на непарну є функція непарна.

3^0. Якщо $f(x)$ - парна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

4^0. Якщо $f(x)$ - непарна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Припустимо тепер, що потрібно розкласти в ряд Фур'є парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ - парна функція, а $\sin nx -$ функція непарна, то добуток $f(x)\cos nx$ є фукцією парною, а $f(x)\sin nx -$ фукцією непарною (властивості 1^0 і 2^0). На основі властивостей 3^0 і 4^0 дістаємо:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Відповідно до цього ряд Фур'є для парної функції має винляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{6}$$

Якщо потрібно розкласти в ряд Фур'є непарну функцію $f(x)$, то внаслідок властивостей 1^0 і 2^0 добуток $f(x)\cos nx$ є фукцією непарною, а $f(x)\sin nx -$ фукцією парною, тому

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ряд Фур'є для непарної функції має винляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{8}$$

Таким чином, *парна функція розкладається в ряд тільки по косинусам, а непарна функція – тільки по синусам кратних дуг.*

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, задану на інтервалі $-\pi \le x \le \pi$ формулою $f(x) = |x|$.

Розв'язок. Функція $f(x) -$парна. Для знаходження коефіцієнтів Фур'є застосуємо формули (5).

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi\,;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$b_n = 0.$$

Ряд Фур'є, що відповідає функції $f(x)$, має вигляд:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{n^2} + \ldots\right).$$

Ряди Фур'є для функцій з періодом 2ℓ. Часто потрібно розкладати в ряд Фур'є функції, період яких відмінний від 2π. Нехай функція має період 2ℓ. Тоді її коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\,. \qquad (9)$$