МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія пророднича дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 12: Подвійні та потрійні інтеграли,
властивості, обчислення

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 24

План лекції

1. Подвійний інтеграл, його геометричний зміст. Властивості. Обчислення подвійних інтегралів.
2. Потрійний інтеграл і його обчислення.
3. Застосування подвійних та потрійних інтегралів.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 24

1. Подвійний інтеграл, його геометричний зміст. Властивості. Обчислення подвійних інтегралів

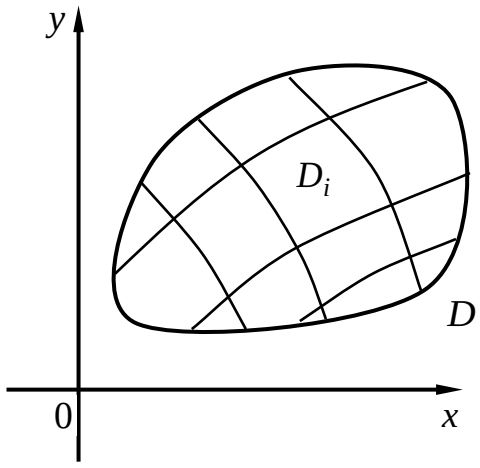


Рис. 1

Кратні інтеграли дозволяють розглядати кількісні характеристики просторових об'єктів, наприклад, площу криволінійної поверхні, об'єм тіла або його масу, площу плоских фігур, які є функціями від двох або трьох незалежних змінних. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області D площини $x0y$. Розіб'ємо область D довільними лініями на n елементарних областей D_i, що мають площі $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_n$, а діаметри (найбільша відстань між точками області) –

через d_i (рис.1).

У кожній елементарній області виберемо довільну точку $P_i(x_i, y_i)$, помножимо значення функції $f(P_i)$ у кожній із цих точок на площу відповідної елементарної області $\Delta\sigma_i$ і складемо суму всіх таких добутків. Ця сума називається *двовимірною інтегральною сумою* функції $f(x,y)$ по області D.

$$f(x_1,y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2,y_2)\Delta\sigma_2 + ... + f(x_n,y_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

Визначення. Границя двовимірної інтегральної суми функції $z = f(x,y)$ по області D, яка не залежить ні від способу розбиття області D на елементарні області $\Delta\sigma_i$, ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i)$ усередині них, якщо найбільший з діаметрів d_i елементарних областей прямує до нуля, називається *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x,y)$ по області D і позначається

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i, \qquad (2)$$

де D – область інтегрування – частина площини $x0y$, $z = f(x,y)$ – функція двох незалежних змінних, а під подвійним інтегралом розуміється число.

Якщо область D розбивати на елементарні області прямими, паралельними осям координат, то площа однієї елементарної області знаходиться як площа прямокутника зі сторонами dx і dy: $d\sigma = dxdy$. Тому подвійний інтеграл у декартовій системі координат записують у вигляді

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (3)$$

Геометричний зміст подвійного інтеграла

Нехай дана поверхня $z = f(x,y)$, де $f(x,y)$– неперервна в деякій області D функція. Тіло, обмежене частиною поверхні $z = f(x,y)$, площиною $x0y$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі $0z$, а напрямною слугує межа області D у площині $x0y$, називається *циліндроїдом* (рис. 2).

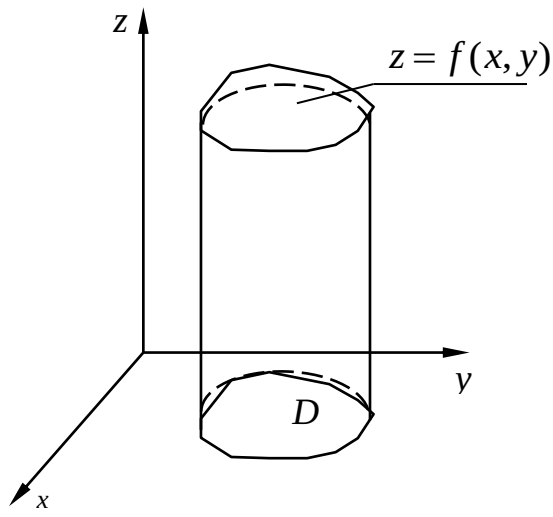


Рис. 2

Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ у такому разі визначає об'єм циліндроїда.

$$V = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma, \qquad (4)$$

де D – проекція поверхні $z = f(x,y)$ або її частини на площину $x0y$, а $z = f(x,y)$– рівняння поверхні, що обмежує тіло.

Якщо в (4) підінтегральна функція $f(x,y) = 1$, то подвійний

інтеґрал визначає площу області інтегрування D у площині $x0y$.

Властивості подвійного інтеґрала

1. Сталий множник виноситься за знак подвійного інтеґрала

$$\iint\limits_D Cf(x,y)\,d\sigma = C\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma. \qquad (6)$$

2. Подвійний інтеґрал від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтеґралів цих функцій

$$\iint\limits_D \left[f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right]d\sigma = \iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x,y)d\sigma. \qquad (7)$$

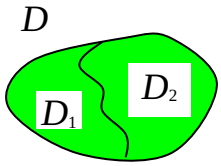


Рис. 3

3. Якщо область інтеґрування розбити на частини, то подвійний інтеґрал по всій області дорівнює сумі подвійних інтеґралів від усіх її частин (рис.3).

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma \qquad (8)$$

Обчислення подвійних інтегралів

Нехай маємо інтеґрал по довільній плоскій фігурі (рис.4). Якщо область інтеґрування D обмежена кривою, яку кожна пряма, паралельна осі $0y$, перетинає не більш ніж у двох точках, то подвійний інтеґрал, поширений на цю область, обчислюється за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (9)$$

Інтеґрал у правій частині формули (9) також називається *повторним* або *двократним*. При обчисленні внутрішнього інтеґралу в підінтеґральній функції $f(x,y)$ змінну x також потрібно розглядати як сталу величину.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеґрал $\iint\limits_D xy^2dxdy$ по області D, обмеженій лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{8x}$ (рис. 5).

Розв'язок. Визначимо межі інтеґрування по змінній x. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{8x} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{8x} \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow$$

$$x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x\left(x^3 - 8\right) = 0;\ \ x_1 = 0;\quad x_2 = 2$$

$$a = 0;\qquad b = 2$$

$$\varphi_1(x) = x^2;\quad \varphi_2(x) = \sqrt{8x}$$

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{8x}} y^2dy$$

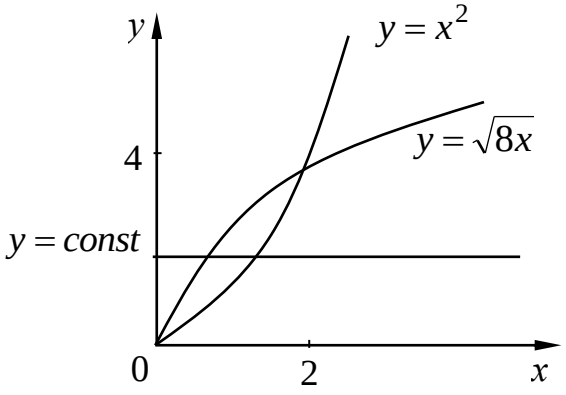


Рис. 5

Спочатку обчислюємо внутрішній інтеґрал

1) $\int\limits_{x^2}^{\sqrt{8x}} y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^{\sqrt{8x}} = \frac{1}{3}\left(16\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - x^6\right).$

Після його обчислення ми отримали функцію змінної *x*. Обчислюємо зовнішній інтеґрал

2) $\frac{1}{3}\int\limits_0^2 \left(16\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}} - x^7\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{32}{7}\sqrt{2}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^8}{8}\right)\Bigg|_0^2 = 13\frac{5}{7}.$

2. Потрійний інтеграл і його обчислення

Нехай неперервна функція $f(M) = f(x, y, z)$ задана в обмеженій замкненій області *V*. Розіб'ємо цю область довільними поверхнями на n елементарних областей V_1, V_2, ..., V_n. У кожній частині виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і обчислимо значення функції в цій точці $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$. Об'єм кожної частини позначимо ΔV_i. Складемо інтеґральну суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$.

Визначення. *Потрійним інтеґралом* від функції $f(x, y, z)$ по області *V* називається границя інтеґральної суми за умови, що найбільший із діаметрів d_i елементарних областей прямує до нуля:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(M_i)\Delta V_i . \qquad (10)$$

Ця границя не залежить ні від способів розбиття області *V* на елементарні області, ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i, z_i)$ усередині них. Якщо така границя існує, то функція $f(x, y, z)$ називається інтеґрованою по області *V*.

У декартовій системі координат область *V* зручно розбивати на елементарні області площинами, паралельними площинам координат. У цьому випадку елементарні області – паралелепіпеди. Отже, елемент об'єму $dV = dxdydz$, тому потрійний інтеграл у декартовій системі координат має вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz. \qquad (11)$$

Якщо область *V* обмежена зверху поверхнею $z = \psi_2(x, y)$, знизу поверхнею $z = \psi_1(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі $0z$. Тоді

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \qquad (12)$$

де D_{xy} – проекція області *V* на площину $x0y$ (рис. 6).

Тоді обчислення потрійного інтеґрала зводиться до послідовного обчислення визначеного інтеґрала від підінтеґральної функції по одній із змінних при

довільних фіксованих значеннях двох інших і обчисленню подвійного інтеґрала від отриманої функції.

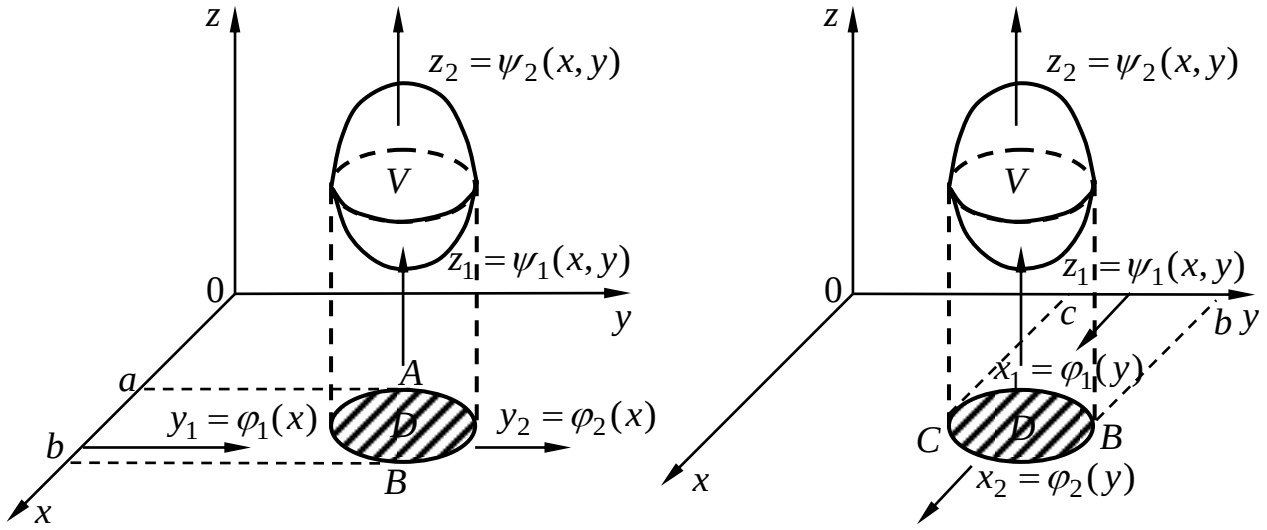


Рис. 6

Подвійний інтеґрал у правій частині рівності (12) зводиться до обчислення повторних інтеґралів.

Замінюючи в (11) $dv = dxdydz$, отримаємо ще одну формулу для обчислення потрійного інтеґрала за допомогою повторних інтегралів

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (13)$$

Приклад 2. Звести потрійний інтеґрал $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ до повторного, якщо область V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 7).

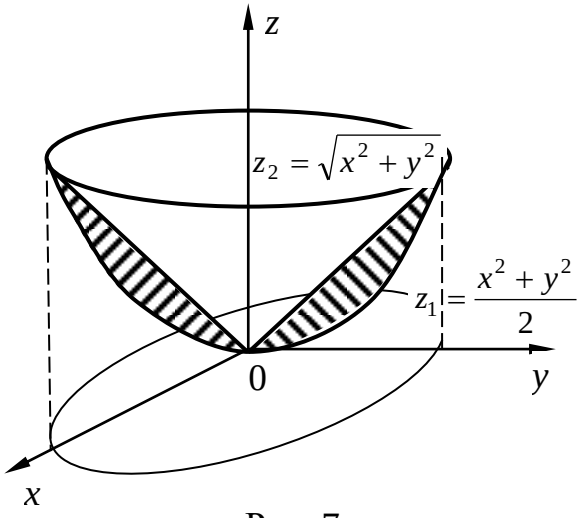


Рис. 7

Розв'язок. Знаходимо межі інтеґрування в області D. Для цього розв'яжемо систему рівнянь параболоїда і конуса: $z^2 - 2z = 0$, $z = 0$, $z = 2$. Тоді рівняння межі області D має вигляд $x^2 + y^2 = 4$. Це круг, радіус якого $r = 2$.

Таким чином, потрійний інтеграл зводиться до повторного за формулами (12) і (13):

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D d\sigma \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz = = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dz.$$

3. Застосування подвійних та потрійних інтегралів

Площа плоскої фігури за допомогою подвійного інтеґрала визначається за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy\,.$$

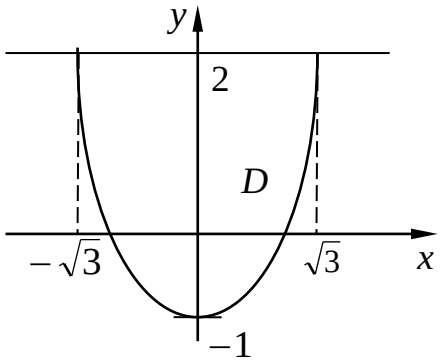


Рис. 8

Приклад 3. Обчислити площу області, обмеженої прямою $y = 2$ і параболою $y = x^2 - 1$ (рис.8).

Розв'язок. Визначимо межі інтеґрування за змінною x.

$$x^2 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{x^2-1}^{2} dy = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)dx = 4\sqrt{3}$$

Застосування подвійного інтеграла до задач механіки

Якщо D – частина площини $x0y$, зайнята матеріальною фігурою з щільністю $\gamma(x, y)$, то:

1) *маса фігури D* обчислюється за формулою

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy; \tag{14}$$

2) *статичні моменти* M_x і M_y фігури D щодо координатних осей $0x$ і $0y$ – за формулами

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)dxdy; \tag{15}$$

3) *координати центра тяжіння* – за формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}; \tag{16}$$

Приклад 4. Знайти координати центра тяжіння пластинки, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$, якщо щільність розподілу маси у кожній точці дорівнює ординаті цієї точки (рис. 9).

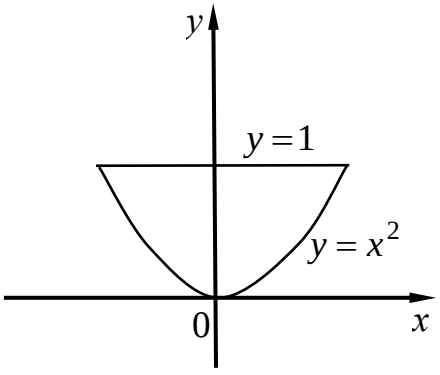


Рис. 9

Розв'язок. Знайдемо спочатку масу пластинки.

Оскільки $\gamma(x, y) = y$, то з формули (14),

$$m = \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} ydy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{1} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Використовуючи формули (15), обчислимо статичні моменти пластинки відносно всіх осей:

$$M_x=\iint_D y\cdot ydxdy=\iint_D y^2dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}y^2dy=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-x^6\right)dx=\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{7};$$

$$M_y=\iint_D xydxdy=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}ydy=\int_{-1}^{1}\left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x-x^5)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=0.$$

Тепер за формулами (16) знаходимо координати центра тяжіння: $\bar{x}=0$, $\bar{y}=5/7$.