МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 13: Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула Остроградського

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 25

План лекції

1. Криволінійні інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.
2. Поверхневі інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.
3. Формула Остроградського.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 25

1. Криволінійні інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення

Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в кожній точці $M(x,y)$ дуги AB плоскої гладкої або кусково-гладкої кривої L. Розітнемо дугу AB довільно на n частинних дуг так, щоб $A_0 = A_1, A_2, ..., A_n = B$. На кожній дузі A_iA_{i+1} виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$. Обчислимо в цій точці значення заданої на кривій функції $f(x,y)$ і помножимо його на довжину дуги $A_iA_{i+1} = \Delta l_i$. Склавши всі добутки, одержимо інтеґральну суму

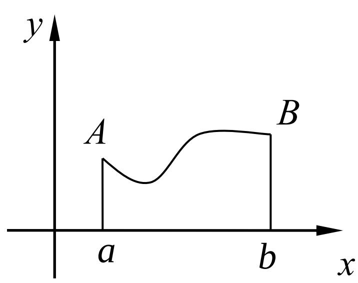

Рис. 1

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i \qquad (1)$$

Визначення. Границя скінченої інтеґральної суми (1), коли $\max \Delta l_i \to 0$, не залежить ні від способу розбиття кривої L, ні від вибору точок M_i на частинних дугах називається *криволінійним інтеґралом першого роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x,y)$ по дузі *AB*.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i . \qquad (2)$$

Якщо підінтеґральна функція $f(x,y) \geq 0$, то з геометричної точки зору криволінійний інтеґрал першого роду $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$ визначає площу частини циліндричної поверхні, поміщеної між поверхнями $z = f(x,y)$ і $z = 0$, при цьому напрямною слугує дуга кривої AB, а твірна паралельна осі $0z$, тобто $S = \int\limits_{AB} f(x,y)dl$.

З механічної точки зору формула криволінійний інтеґрал першого роду визначає масу кривої, коли $f(x,y)$ розглядається як густина речовини, зосередженої вздовж кривої *AB*, тобто $m = \int\limits_{AB} f\left(x,y\right)dl$.

Обчислення криволінійного інтеґрала першого роду

Якщо крива *AB* задана рівнянням $y = f_1(x)$ $(a \leq x \leq b)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, f_1(x))\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad (3)$$

Властивості. Має ті ж самі властивості, що й визначений інтеґрал, за винятком $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl.$

Криволінійний інтеґрал другого роду

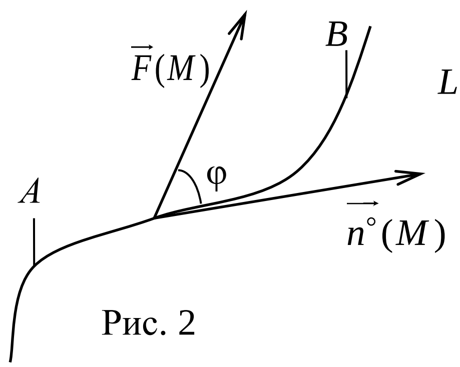

Рис. 2

Нехай у просторі задана неперервна лінія *L*, на якій вказано напрямок (рис. 2). Нехай у точці *A* її початок, а в *B* – кінець. Позначимо через $\overrightarrow{n^\circ}(M)$ одиничний вектор дотичної до цієї лінії в кожній точці $M(x,y,z)$ у напрямі кривої. Нехай на лінії *L* задана вектор-функція $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

Визначення. *Криволінійним інтеґралом другого роду* (або *криволінійним інтеґралом по координатах*) називається інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (4)$$

У випадку, коли дуга *AB* задана на площині, а на ній дві неперервні функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, то розглядають інтеґрал другого роду у вигляді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (5)$$

Властивості криволінійного інтеґралу 2-го роду

При обчисленні криволінійних інтеґралів другого роду важливе значення має напрям інтеґрування.

1. При зміні напряму інтеґрування криволінійний інтеґрал міняє знак на протилежний.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (6)$$

2. Якщо точка C знаходиться всередині дуги AB, то криволінійний інтеґрал 2-го роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy \qquad (7)$$

Зауваження. Якщо L замкнута крива, то криволінійний інтеґрал також існує. У цьому випадку слід указувати напрям інтеґрування. Позитивним напрямом обходу замкнутого контуру вважається той, при якому область інтеґрування залишається зліва.

Інтеґрування по замкнутому контуру позначається символом

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (8)$$

Обчислення. Якщо крива L задана параметрично і $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\}dt \qquad (9)$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L (2+xy^2)dx + (x^2y-3)dy$, де L – дуга еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ від точки $A(-2,0)$ до точки $B(2,0)$.

Розв'язок. Запишемо параметричне рівняння еліпса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$. Знайдемо нові межі інтеґрування

$$\left\{\begin{matrix} x=-2; & \cos t=-1; & t=\pi \\ x=2; & \cos t = 1; & t=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_L (2+xy^2)dx + (x^2y-3)dy =$$

$$= \int_\pi^0 \left[(2+2\cos t\cdot 9\sin^2 t)\sin t + (4\cos^2 t\cdot 3\sin t - 3)3\cos t\right]dt =$$

$$= \int_\pi^0 (36\cos^3 t\sin t - 9\cos t - 4\sin t - 36\sin^3 t\cos t)dt =$$

$$= \left(-9\cos^4 t - 9\sin t + 4\cos t + 9\sin^4 y\right)\Big|_\pi^0 = 8.$$

Якщо крива L задана явним рівнянням $y = f(x)$, $a < x < b$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \{P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)\}dx \tag{10}$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$ вздовж прямої $y = 2x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2,4)$.

Розв'язок.

$$\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy = \int\limits_0^2 (x \cdot 2x - 4x^2 + x \cdot 2)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (2x - 2x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

Поверхневий інтеґрал першого роду

Нехай функція $f(M) = f(x,y,z)$ визначена і неперервна в кожній точці $M(x,y,z)$ гладкої поверхні Σ.

Визначення. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом з точкою дотику.

Визначення. Поверхня називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається зі скінченого числа гладких частин, що примикають одна до одної по кусково-гладких або просто гладких лініях.

Іншими словами, в кожній точці поверхні $z = z(x,y)$ існують скінченні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

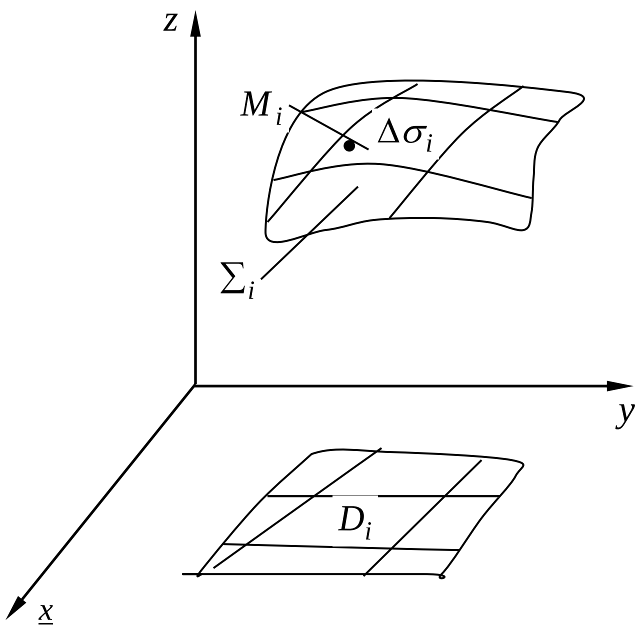

Рис. 3

Розіб'ємо поверхню Σ кусково-гладкими кривими довільним чином на частини $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n$. Площу кожної частини позначимо як $\Delta\sigma_i$. Виберемо в кожній із цих частин довільну точку M_i, обчислимо значення функції $F(M_i)$ у кожній із цих точок і складемо інтеґральну суму

$$T = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i . \tag{11}$$

Визначення. Якщо границя інтеґральних сум T прямує до деякої скінченої границі за умови, що найбільший із діаметрів $\Delta\sigma_i$ прямує до нуля, то вона називається *поверхневим інтеґралом першого роду* від функції $f(x,y,z)$ по поверхні Σ і позначається символом

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \,. \tag{12}$$

Зведення поверхневого інтеґрала до подвійного

Обчислення поверхневого інтеґрала I роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції поверхні Σ на одну з координатних площин. Якщо поверхня, задана рівнянням $z = z(x,y)$ і проектується на площину $x0y$ в область $D,$ а функція $z(x,y)$ і її частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в замкнутій області D, то поверхневий інтеґрал I роду перетворюється на подвійний інтеґрал

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy \,. \tag{13}$$

При цьому поверхневий інтеґрал, що стоїть зліва, існує, якщо існує подвійний інтеґрал, що стоїть у правій частині рівності (13).

Поверхневий інтеґрал другого роду

Розрізняють односторонні та двохсторонні поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні довільну точку $M(x, y, z)$ і побудуємо в ній нормаль до поверхні. Якщо обходячи по будь-якому замкненому контуру, що повністю лежить на поверхні $\sum$ і не перетинає її межі, ми повертаємось у точку M і при цьому напрямок нормалі не змінюється, то поверхня називається *двосторонньою*, а якщо змінюється, то *односторонньою*. Напрямок обходу контуру L уважається позитивним, якщо спостерігач, розташований на поверхні, а його тулуб збігається з напрямком нормалі, обходить контур L, залишаючи поверхню $\sum$ увесь час зліва від себе (рис. 4). Позначається

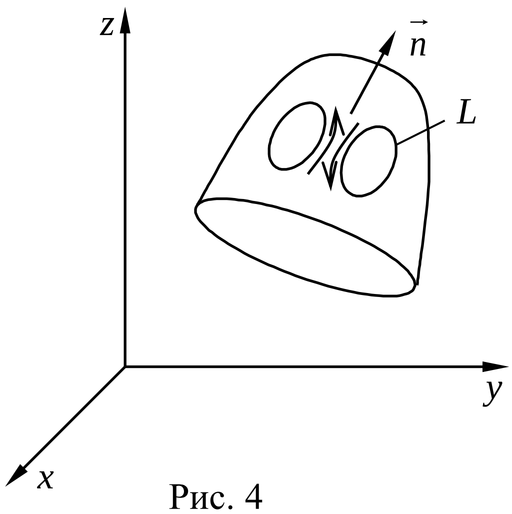

Рис. 4

$$\Sigma^{+} \;-\; \cos(\vec{n},\, z) > 0, \qquad \Sigma^{-} \;-\; \cos(\vec{n},\, z) < 0.$$

Такі поверхні називаються *орієнтованими*.

Нехай на деякій орієнтованій поверхні $\Sigma \in z = z(x,y)$ визначена неперервна функція $F(x,y,z)$. Виберемо певну сторону поверхні Σ і розіб'ємо її довільно на частини $\Sigma_1,\ \Sigma_2, \ldots,\ \Sigma_n$. Позначимо через $\Delta\sigma_i$ площу проекції на площину $x0y$ частини Σ_i, узяту зі знаком "плюс", якщо на Σ_i обрана верхня сторона поверхні, і зі знаком "мінус", якщо на Σ_i обрана нижня сторона поверхні. Візьмемо в кожній частині Σ_i довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, обчислимо значення функції $F(M_i)$ у кожній із цих точок і складемо інтеґральну суму:

$$F(x_1, y_1, z_1)\Delta\sigma_1 + F(x_2, y_2, z_2)\Delta\sigma_2 + ... + F(x_n, y_n, z_n)\Delta\sigma_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \quad (14)$$

Визначення. Скінченна границя інтеґральної суми при прямуванні найбільшого з діаметрів $d(\sigma_i)$ до нуля, називається *поверхневим інтеґралом другого роду* по обраній стороні поверхні Σ від функції $F(x, y, z)$, тобто

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)dxdy = \lim_{\max d(\sigma_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \quad (15)$$

Ця границя не залежить ні від пособу розбиття поверхні Σ на частини Σ_i, ні від вибору точок M_i у кожній з них. При цьому сторону поверхні вказують додатково. Тут $dxdy$ площа проекції елемента поверхні на площину $x0y$.

Поняття поверхневого інтеґрала II роду вводиться тільки для двосторонніх поверхонь.

Зведення поверхневого інтеґрала другого роду до подвійного

Нехай Σ – поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$ і $\boldsymbol{R}(x, y, z)$ – деяка обмежена функція на Σ. Тоді

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy, \quad (16)$$

де D_{xy} – проекція Σ на площину $x0y$.

Правило. Для того, щоб інтеґрал $\iint_{\Sigma} R(x, y, z)d\sigma$, узятий по стороні гладкої орієнтованої поверхні Σ^+, визначеної рівнянням $z = z(x, y)$, перетворити в подвійний, необхідно у підінтеґральну функцію замість z підставити відповідно $z = z(x, y)$, а інтеґрування по поверхні Σ^+ замінити інтеґруванням по її проекції D_{xy} на площині $x0y$.

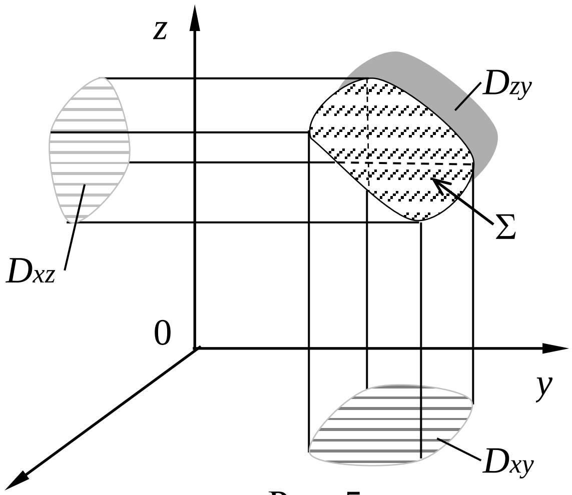

Рис. 5

Якщо інтеґрал береться по нижній стороні поверхні Σ_-, то у виразі (16) беремо знак "–" у правій частині: $\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy$.

Аналогічно одержимо формули :

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz, \quad (17)$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)dzdx = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dzdx, \quad (18)$$

де D_{yz}, D_{xz} – проекції Σ на площини $y0z$ і $x0z$.

3.Формула Остроградського

Формула Остроградського встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні з потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Замкнена просторова область називається *простою*, якщо кожна пряма, що паралельна одній із координатних осей, перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

Теорема. Нехай V – проста область, обмежена кусково-гладкою поверхнею Σ, і $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – функції, неперервні в області V разом із похідними $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тоді справедлива формула Остроградського:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

де поверхневий інтеграл другого роду слід обчислювати по зовнішній стороні поверхні Σ, яка обмежує область V.

Зауваження Використовуючи адитивну властивість поверхневого інтеграла, можна цю формулу узагальнити на довільну замкнену область V, яку можна розбити на скінченну кількість простих областей.