МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 14: Комбінаторика. Ймовірність події.

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 26

План лекції

1. Основні формули комбінаторики. Правила додавання і множення.
2. Види випадкових подій. Класичне визначення ймовірності.
3. Відносна частота. Статистична і геометрична ймовірності.

Рекомендована література:

Основна

1. Астахов В. М. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчальний посібник / В. М. Астахов, Г. С. Буланов, В. О. Паламарчук. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – 64 с.
2. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те вид. :навчальний посібник . – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с

Додаткова

3. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

4. Жильцов О.Б.Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб.— К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. - 336 с. http://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/13578/1/O_Zhyltsov_KUBG_TY_UN.pdf
5. Федоров М.В., Хренов О.М. Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 68 с. https://docviewer.yandex.ua/view/14307034/?page=3&*=OMbtom834MHYY%2B0pcflKdrchzlx7 }]

Текст лекції 26

1. Основні формули комбінаторики. Правила додавання і множення

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають кількісні характеристики різних видів комбінацій елементів, незалежно від їх природи , які можна скласти з елементів деякої скінченої множини.

Перестановками з n елементів називаються такі їх комбінації, що відрізняються лише порядком елементів, які входять у ці комбінації. Формула визначення числа перестановок із n елементів:

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Приклад 1. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів (a, b, c).
Розв'язок. $abc\ \ bac\ \ cab\ \ acb\ \ bca\ \ cba.$

Розміщеннями з n елементів по m називаються такі комбінації m елементів, вибраних із заданих n елементів , що відрізняються одна від іншої або самими елементами, що входять у групу, або їхнім порядком.
Формула визначення числа розміщень із n елементів по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Приклад 2. Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів (a, b, c) по 2 елементи.
Розв'язок. ab ba ac ca bc cb.

Сполуками з n елементів по m називаються такі комбінації m елементів, вибраних із заданих n елементів , що відрізняються одна від іншої тільки самими елементами, які входять у групу.
Приклад 3. Скласти всі можливі сполуки з трьох елементів (a, b, c) по 2 елементи.
Розв'язок. ab ba ac
Формула визначення числа сполук із n елементів по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (3)$$

При розв'язанні задач комбінаторики використовують наступні правила:
Правило суми. Якщо деякий елемент A може бути вибраний із сукупності елементів m способами, а інший елемент B може бути вибраний n способами, то вибрати або A, або B можна $m+n$ способами.
Правило добутку. Якщо деякий елемент A може бути вибраний із сукупності елементів m способами і після кожного такого вибору елемент B може бути вибраний n способами, то пара елементів (A,B) в указаному порядку може бути вибрана mn способами.

2. Види випадкових подій.
Класичне визначення ймовірності

Явища (події) , що спостерігаються нами, можна розділити на три види: достовірні, неможливі, випадкові.
Достовірною називають подію, що обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов (позначається літерою U).
Неможливою називають подію, що свідомо не відбудеться, якщо буде здійснена визна-чена сукупність умов (позначається літерою V).
Випадковою називають подію, що при здійсненні визначеної сукупності умов може або відбутися, або не відбутися (позначається великими літерами латинського алфавіту).
Надалі, замість того щоб говорити «сукупність умов здійснена», будемо говорити коротко «проведено випрбування». Таким чином, подія буде розглядатися як результат випробування. Наприклад: випробування – підкидання монети. Подія – поява герба при падінні монети. Випробування– постріл. Подія – влучення в мішень.

Види випадкових подій.

Події називають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших у тому самому випробуванні.

Приклади. Поява герба й поява цифри при підкиданні однієї монети.

Поява 2-х гербів і 2-х цифр при підкиданні двох монет.

Кілька подій утворять *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з них. Іншими словами, поява хоча б одної з подій повної групи є достовірна подія.

Приклади. Поява герба й поява цифри при підкиданні однієї монети.

Поява чорної й червоної масті при витягуванні карти з колоди.

Якщо події, що утворять повну групу, попарно несумісні, то в результаті іспиту з'явиться одна і тільки одна з цих подій.

Якщо повну групу утворюють дві події, вони називаються *протилежними*. Якщо одна з цих подій позначається A, то протилежна їй – $\overline{A}$

Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, чим інші.

Приклад. Випробування: підкидання монети. Події: поява герба й поява цифри.

Елементарними подіями називають такі події, що утворюють повну групу, є попарно несумісними і рівноможливими.

Ті елементарні наслідки, в яких цікавляча нас подія настає, назвемо *сприятливими* цій події.

Класичне визначення ймовірності

Імовірність є число, що характеризує степінь можливості появи події.

Імовірністю події А називають відношення числа сприятливих цій події елементарних наслідків до загального числа елементарних наслідків.

Імовірність події А позначають *P(A)* і обчислюють за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{4}$$

де m – число сприятливих події A елементарних наслідків в результаті випробування, n – загальне число можливих елементарних наслідків.

Очевидно, що імовірність набуває значення від 0 до 1. Імовірність неможливої події дорівнює 0. Імовірність достовірної події дорівнює 1.

Приклад 4. Визначити імовірність того, що при киданні грального кубика випаде не менше 5 очок.

Розвязок. Подія A – поява очків ≥ 5. Елементарні наслідки: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – несумісні, рівноможливі, утворюють повну групу. Сприятливі події A елементарні наслідки: 5,6. Звідси n=6, m=2. Отже, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Приклад 5. В урні є a білих і b чорних куль. З урни випадковим чином дістали кулю.

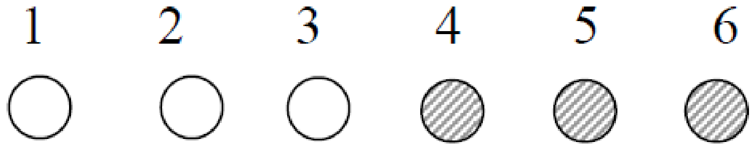
Знайти імовірність того, що: а) ця куля біла (подія A); б) ця куля чорна (подія B).

Число елементарних наслідків випробування дорівнює $n=a + b$, отже,

$$P(A)=\frac{a}{a+b}; \qquad P(B)=\frac{b}{a+b}.$$

Приклад 6. З урни, що містить 3 білих і 3 чорних кулі, дістають 2 кулі. Знайти ѕмовірність того, що вони обидві виявляться білими.

Розв'язок. Зображуємо кулі на малюнку



Сприятливі елементарні наслдідки:

$$\underbrace{1-2,\ 1-3,\ 2-3}_{3}$$

Несприятливі елементарні наслідки:

$$\underbrace{\begin{matrix}1-4, 1-5, 1-6, 2-4, 2-5, 2-6\\ 3-4, 3-5, 3-6, 4-5, 4-6, 5-6\end{matrix}}_{12}$$

Число всіх елементарних наслідків n = 15 (несумісні, рівноможливі й утворюють повну групу). Число сприятливих елементарних наслідків m = 3. Таким чином, $P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

При розв'язанні задач на класичну формулу ймовірності часто застосовують формули та правила комбінаторики.

Приклад 7. Для збирання врожаю яблук відібрано чотири хлопця і три дівчини. З них навмання відбирають бригаду з трьох чоловік. Яка ймовірність того, що в цій бригаді буде два хлопці і одна дівчина?

Розв'язок. Вибрати трьох чоловік з семи можна $n=C_7^3=\frac{7!}{3!4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}=35$ способами. Вибрати двох хлопців із чотирьох можна $C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6$ способами, а одну дівчину з трьох – 3 способами. Згідно з правилом добутку $m=6\cdot 3=18$. Отже, шукана ймовірність

$$P(A)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}.$$

3. Відносна частота. Статистична і геометрична ймовірності

Тривалі спостереження над появою або не появою події A при великій кількості незалежних випробувань у ряді випадків показують, що число появ події A підкоряється стійким закономірностям. Позначимо

μ - число появ події A,

n - число випробувань,

Відношення $\frac{\mu}{n}$ називається відносною частотою появи події A. При досить великому n відносна частота зберігає майже постійну величину і тому її можна також прийняти за ймовірність.Таким чином, під *статистичною* ймовірністю розуміється відносна частота появи події A в n зроблених випробуваннях, тобто

$$P(A)=\frac{\mu}{n}. \qquad (5)$$

На відміну від класичного визначення імовірності, яка обчислюється до випробувань (*apriori*), статистична ймовірність обчислюється після випробувань (*aposteriori*). Статистична ймовірність має ті ж властивості, що й класична ймовірність, але при цьому не вимагається рівноможливості наслідків.

Щоб подолати недолік класичного визначення імовірності, який полягає у тому, що воно не може бути застосовано до випробувань з нескінченним числом наслідків, розглядають геометричні імовірності – імовірності того, що точка потрапить у деяку область (відрізок, частину площини і т.д.). Цю ймовірність визначають за формулою:

$$P(A)=\frac{mesg}{mesG}, \qquad (6)$$

де $mesg$ – міра частини області, $mesG$ – міра всієї області. Цією мірою залежно від області може бути довжина, площа, об'єм.

Приклад 8. В круг радіуса *R* навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що вона потрапить також в квадрат, вписаного в цей круг. Вважаємо, що ця ймовірність пропорційна площі квадрата та не залежить від його розташування відносно круга.

Розв'язок. Оскільки сторона квадрата, вписаного в круг $a=R\sqrt{2}$, то його площа $S_{кв}=2R^2$, площа круга $S_{кр}=\pi R^2$, тому шукана ймовірність

$$P(A)=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}.$$