

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія технічного обслуговування авіаційної техніки

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

**з навчальної дисципліни «Основи теорії автоматичного регулювання»
обов'язкових компонент освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів**

за темою – Характеристики САК.

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 23.09.2021 № 8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського наці-
онального університету внутрішніх
справ
Протокол від 22.09.2021 № 2

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 22.09.2021 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, протокол від 30.08.2021 № 1

Розробник: старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист, Владов С.І.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри автомобілів і тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Павленко О.В.
2. Викладач циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

План лекції

1. Часові характеристики.
2. Частотні характеристики.
3. Співвідношення взаємозв'язку характеристик САК між собою і передавальною функцією.

Рекомендована література:

Основна

1. Абраменко І. Г., Абраменко Д. І. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2008. 178 с.
2. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник ; 2-ге вид., перероб. і дор. Київ : Либідь, 2007. 656 с.
3. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2006. 187 с.

Допоміжна

4. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування : підручник. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет. 2003. 250 с.
5. Гоголюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2009. 280 с.
6. Асланян А. Е., Зіатдінов Ю. К., Барабаш О. В., Бельська О. А. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Національний авіаційний університет, 2015. 532 с.

3.1. Часові характеристики

Диференціальні рівняння незалежно від форми подання є самою загальною формою опису САК і не дають наочного зображення її властивостей. Більш наочно характеризують ці властивості функції $y(t)$, що є рішеннями диференціальних рівнянь.

Відомо, що те саме диференціальне рівняння має безліч рішень, конкретний вигляд яких залежить від початкових умов і від характеру функції $x(t)$. Тому в ТАК властивості систем і їхніх елементів характеризують рішеннями, що відповідають нульовим початковим умовам і одному з типових впливів на вході, що називаються *часовими характеристиками*.

Найбільш широке використання при описі динамічних властивостей одержала перехідна функція $h(t)$. *Перехідною функцією* називають функцію, що описує зміну вихідної величини, що виникає після подачі на вхід одиничного східчастого впливу $1(t)$ при нульових початкових умовах. Графік перехідної функції називається *перехідною характеристикою*.

Другою часовою характеристикою є *імпульсна перехідна функція* $w(t)$. Під цією функцією мають на увазі функцію, що описує зміну вихідної величини, яка виникає після подачі на вхід дельта-функції при нульових початкових умовах. Графік $w(t)$ називають *імпульсною перехідною характеристикою*.

З попереднього викладу виходить, що лінійні САК описуються диференціальними рівняннями вигляду

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \dots + b_m x(t), \quad (3.1)$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – відповідно вхідна і вихідна величини; a_i , b_j – коефіцієнти; n – порядок рівняння.

З курсу вищої математики відомо, що інтегрування рівняння (3.1) зводиться до знаходження суми загального рішення однорідного рівняння без правої частини $y_c(t)$ і якого-небудь часткового рішення неоднорідного рівняння $y_b(t)$, тобто

$$y(t) = y_c(t) + y_b(t). \quad (3.2)$$

Зміна вихідної величини, обумовлена складовою $y_c(t)$, називається *вільним рухом*, тому що залежить тільки від вигляду лівої частини рівняння (3.1), тобто від внутрішніх властивостей самого об'єкта. Складова $y_b(t)$, навпаки, залежить від характеру вхідного впливу, тому відповідна зміна називається *змушеним рухом*.

Складову $y_c(t)$ шукаємо у вигляді

$$y_c(t) = e^{pt}, \quad (3.3)$$

де p – деяке раціональне число.

Підставивши (3.3) у рівняння (3.1) при нульовій правій частині, одержимо:

$$a_0 p^n e^{pt} + a_1 p^{n-1} e^{pt} + \dots + a_n e^{pt} = 0,$$

або

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.4)$$

Останнє рівняння називається *характеристичним*.

Таким чином, вираз (3.3) є рішенням вхідного рівняння за умови, що p є коренем рівняння (3.4). Оскільки це рівняння має n коренів, маємо і n лінійно незалежних рішень $y_i(t)$. Скористаємося відомою теоремою математики, що затверджує, що коли n лінійно незалежних функцій $y_i(t)$ є рішеннями однорідного рівняння, то загальне рішення цього рівняння визначається виразом

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (3.5)$$

де C_i – довільні постійні інтегрування.

Відмітимо, що вираз (3.5) справедливий тільки у випадку, якщо всі корені p_i є простими. Якщо ж який-небудь корінь p_j має кратність r , то в (3.5) замість r доданків вигляду (3.3) треба включити складову вигляду

$$y_j(t) = \left(C_j + C_{j+1}t + C_{j+2}t^2 + \dots + C_{j+r-1}t^{r-1} \right) e^{p_j t}. \quad (3.6)$$

Часткове рішення $y_b(t)$ звичайне шукається в тому ж вигляді, в якому задана права частина, тобто залежно від вигляду функції $x(t)$.

Розглянемо приклад.

Приклад 3.1. САК описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t),$$

де $T = 0,5$ с, $k = 4$.

Визначити часові характеристики $h(t)$ і $w(t)$.

Вирішення.

Спочатку знайдемо $h(t)$.

Маємо характеристичне рівняння:

$$Tp + 1 = 0.$$

Його єдиний корінь $p = -1/T$. Отже

$$h_c(t) = C_1 e^{pt} = C_1 e^{(-1/T)t}.$$

Змушену складову $h_b(t)$ шукатимемо у вигляді $h_b(t) = C_2$.

Підставивши це рішення у вихідне рівняння, одержимо $C_2 = k$. Тоді:

$$h(t) = C_1 e^{(-1/T)t} + k.$$

Використаємо початкову умову $h(0) = 0$. Для цього запишемо рівняння

$$h(0) = 0 = C_1 + k.$$

Звідки $C_1 = -k$.

Остаточно одержимо:

$$h(t) = k \left[1 - e^{(-1/T)t} \right] = 4 \left[1 - e^{-2t} \right].$$

Графік отриманого рішення представлений на рис.3.1.

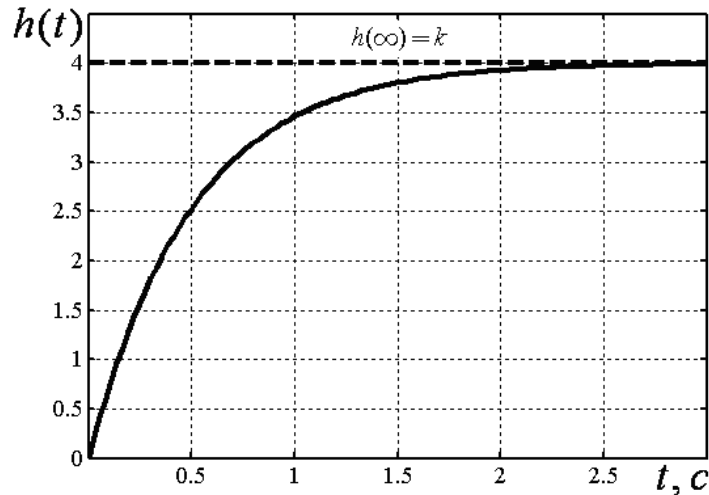


Рис.3.1 - Характеристика $h(t)$

Для визначення $w(t)$ вихідне рівняння перетворимо до вигляду

$$w' = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{w}{T}$$

і проінтегруємо отриманий вираз:

$$w = \frac{k}{T} \int_0^t \delta(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^t w(t) dt = \frac{k}{T} 1(t) - \frac{1}{T} \int_0^t w(t) dt$$

або

$$w + \frac{1}{T} \int_0^t w(t) dt = \frac{k}{T} 1(t).$$

Введемо позначення $\int_0^t w(t) dt = z$. Тоді $w = z'$ і $z' + \frac{1}{T} z = \frac{k}{T} 1(t)$ або

$$Tz' + z = k1(t).$$

Останнє рівняння ідентичне вихідному за умови, що $x(t) = 1(t)$. Отже

$$z(t) = k \left[1 - e^{(-1/T)t} \right] = h(t).$$

Остаточно одержуємо:

$$w(t) = z'(t) = h'(t) = \frac{k}{T} e^{(-1/T)t} = \frac{4}{0,5} e^{-2t} = 8e^{-2t}.$$

Таким чином

$$w(t) = h'(t)^{*}).$$

Графік отриманого рішення поданий на рис.3.2.

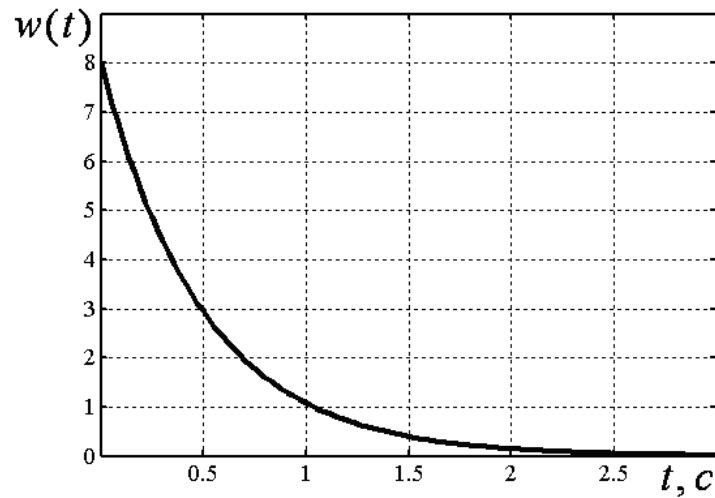
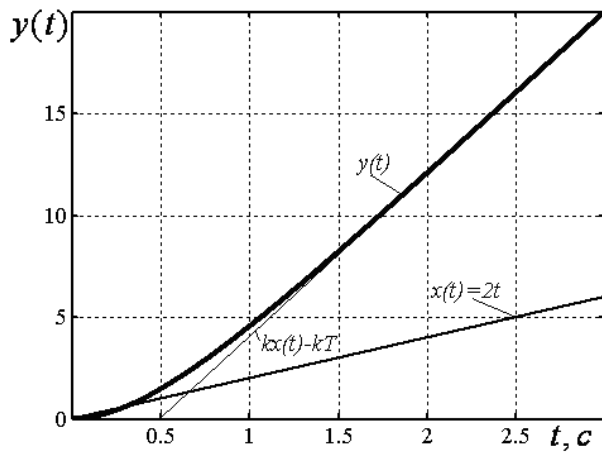


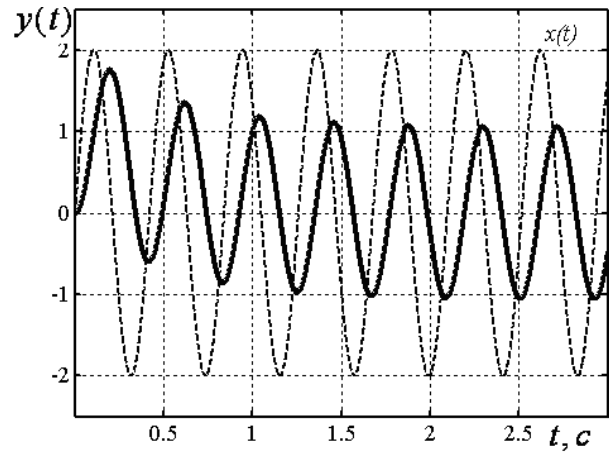
Рис.3.2 - Характеристика $w(t)$

На рис. 3.3,а для умов прикладу 3.1 зображена реакція системи при подачі на вхід лінійного сигналу $x(t) = 2t$, а на рис. 3.3,б - гармонійного сигналу $x(t) = A \sin(\omega t + j)$ при $A = 2$, $\omega = 15 \text{ c}^{-1}$, $j = 12,5$.

^{*)} Це співвідношення справедливо і для будь-якого іншого вигляду рівняння САК, що досить зручно при визначенні $w(t)$.



а)



б)

Рис.3.3 - Реакція системи при подачі на вхід інших типових сигналів

Застосування перетворення Лапласа значно спрощує визначення тимчасових характеристик.

Хід вирішення при цьому наступний:

1. Перетворимо вихідне рівняння (3.1) за Лапласом при нульових початкових умовах:

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + \dots + b_m X(s). \quad (3.7)$$

2. Вирішимо алгебраїчне рівняння (3.7) відносно $Y(s)$ при заданому $X(s)$:

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s). \quad (3.8)$$

3. Визначимо оригінал вирішення $y(t)$.

У загальному випадку для знаходження $y(t)$ використовують зворотне перетворення Лапласа (L^{-1} - перетворення), обумовлене формулою Рімана-Мелліна:

$$f(t) = L^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (3.9)$$

де $\alpha = \text{Re } s > c_0$ може бути будь-яким постійним числом $> c_0$.

Більш простим методом є використання довідкових таблиць, в яких наводяться зображення $F(s)$ і відповідні їм оригінали $y(t)$.

У разі, якщо зображення є дрібно-раціональною функцією, тобто

$$F(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{c_0 s^l + c_1 s^{l-1} + \dots + c_{l-1} s + c_l}{d_0 s^r + d_1 s^{r-1} + \dots + d_{r-1} s + d_r},$$

причому $l < r$, а коефіцієнти c_i , d_j - дійсні числа, застосовується формула розкладання Хевісайда:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{(k_j - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{d^{k_j-1}}{ds^{k_j-1}} \left[F(s)(s - s_j)^{k_j} e^{st} \right] \right\}, \quad (3.10)$$

де s_j - корінь рівняння $D(s) = 0$; N - число різних корінь; k_j - кратність j -го кореня.

Диференціальні рівняння реальних САК звичайно мають прості корені s_j і отже для них $k_j = 1$. Тоді вираз (3.10) з урахуванням співвідношення

$$d_0(s_j - s_1)(s_j - s_2) \dots (s_j - s_{j-1})(s_j - s_{j+1}) \dots (s_j - s_r) = \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_j} = D'(s_j)$$

матиме більш простий вигляд :

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{C(s_j)}{D'(s_j)} e^{s_j t} \right\}. \quad (3.11)$$

Якщо поліном $D(s)$ має q_1 кратних і q_2 простих коренів, то (3.11) записується у вигляді

$$f(t) = \sum_{j=1}^{q_1} \left\{ \frac{1}{(k_j - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{d^{k_j-1}}{ds^{k_j-1}} \left[F(s)(s - s_j)^{k_j} e^{st} \right] \right\} + \sum_{j=q_1+1}^{q_1+q_2} \left\{ \frac{C(s_j)}{D'(s_j)} e^{s_j t} \right\}. \quad (3.12)$$

Оскільки визначення часових характеристик САК проводиться при типових впливах, наведемо зображення цих впливів

Найменування впливу	Оригінал	Зображення
Східчаста функція	$a \cdot 1(t)$	a/s
Функція-дельта-функція	$\delta(t)$	1

Розглянемо приклади.

Приклад 3.2. Визначити часові характеристики $h(t)$ і $w(t)$ для САК з прикладу 3.1 операторним методом.

Вирішення.

Визначимо $h(t)$. Для цього перетворимо за Лапасом вихідне рівняння з урахуванням того, що $x(t) = 1(t)$:

$$TsH(s) + H(s) = \frac{k}{s}.$$

Звідки

$$H(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} = \frac{k}{Ts^2 + s}.$$

Отриманий вираз є дрібно-раціональною функцією, до якої можна застосувати формулу розкладання Хевісайда. Тоді: $C(s) = k$; $D(s) = Ts^2 + s$; $D'(s) = 2Ts + 1$.

Рівняння $D(s) = Ts^2 + s = 0$ має два корені: $s_1 = 0$ і $s_2 = -1/T$.

Скориставшись формулою (3.11), остаточно одержимо:

$$h(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{C(s_j)}{D'(s_j)} e^{s_j t} = \frac{k}{1} e^{0t} - \frac{k}{1} e^{(-1/T)t} = k \left(1 - e^{(-1/T)t} \right).$$

Аналогічно визначимо $w(t)$ з огляду на те, що $x(t) = \delta(t)$.

Маємо:

$$TsW(s) + W(s) = k; \quad W(s) = \frac{k}{Ts + 1}; \quad C(s) = k; \quad D(s) = Ts + 1; \quad D'(s) = T;$$

$$s_1 = -1/T.$$

Скориставшись формулою (3.11), остаточно одержимо:

$$w(t) = \sum_{j=1}^1 \frac{C(s_j)}{D'(s_j)} e^{s_j t} = \frac{k}{T} e^{(-1/T)t}.$$

Приклад 3.3. Рівняння САК має вигляд

$$T^2 y''(t) + 2\xi Ty'(t) + y(t) = k \cdot x(t).$$

Визначимо часову характеристику $h(t)$ при $T = 0,3$ з; $\xi = 0,5$; $k = 10$.

Вирішення.

Перетворимо вихідне рівняння за Лапасом при нульових початкових умовах:

$$(0,09s^2 + 0,3s + 1)H(s) = \frac{10}{s}.$$

Звідки

$$H(s) = \frac{10}{s(0,09s^2 + 0,3s + 1)} = \frac{10}{0,09s^3 + 0,3s^2 + s}.$$

Використаємо формулу розкладання Хевісайда. Маємо: $C(s) = 10$;
 $D(s) = 0,09s^3 + 0,3s^2 + s$; $D'(s) = 0,27s^2 + 0,6s + 1$.

Рівняння $D(s) = 0,09s^3 + 0,3s^2 + s = 0$ має три корені: $s_1 = 0$,
 $s_2 = -1,667 + j2,887$ і $s_3 = -1,667 - j2,887$.

Скориставшись формулою (3.11), остаточно одержимо:

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{C(s_j)}{D'(s_j)} e^{s_j t} = \frac{10}{1} e^{0t} + \\ &+ \frac{10}{0,27(-1,667 + j2,887)^2 + 0,6(-1,667 + j2,887) + 1} e^{(-1,667 + j2,887)t} + \\ &+ \frac{10}{0,27(-1,667 - j2,887)^2 + 0,6(-1,667 - j2,887) + 1} e^{(-1,667 - j2,887)t} = \\ &= 10 + \frac{10}{-1,5 - j0,866} e^{(-1,667 + j2,887)t} + \frac{10}{-1,5 + j0,866} e^{(-1,667 - j2,887)t} = \\ &= 10 + e^{-1,667t} \left\{ (-5 + j2,887) e^{j2,887t} + (-5 - j2,887) e^{-j2,887t} \right\} = \\ &= 10 + e^{-1,667t} \left\{ (-5 + j2,887) [\cos(2,887t) + j \sin(2,887t)] + \right. \\ &\quad \left. + (-5 - j2,887) [\cos(2,887t) - j \sin(2,887t)] \right\} = \\ &= 10 - e^{-1,667t} [10 \cos(2,887t) + 5,774 \sin(2,887t)] \end{aligned}$$

Введемо позначення: $10 = A \sin \varphi_0$; $5,774 = A \cos \varphi_0$. Вирішивши отримані рівняння, одержимо:

$$\varphi_0 = \arctg\left(\frac{10}{5,774}\right) = 1,047 \text{ радий}; \quad A = \frac{10}{\sin(\varphi_0)} = \frac{10}{\sin(1,047)} = 11,547.$$

Тоді

$$\begin{aligned} h(t) &= 10 - e^{-1,667t} [A \sin j_0 \cos(2,887t) + 5,774 \sin(2,887t)] = \\ &= 10 - A e^{-1,667t} \sin(2,887t + j_0) = 10 - 11,547 e^{-1,667t} \sin(2,887t + 1,047). \end{aligned}$$

Графік характеристики $h(t)$ наведений на рис. 3.4.

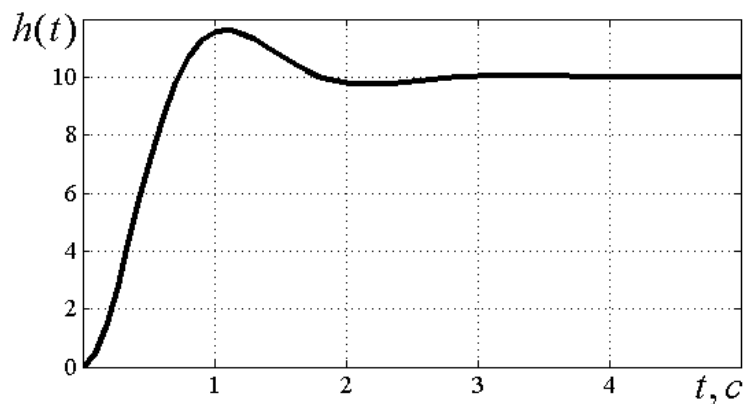


Рис. 3.4 - Характеристика $h(t)$

3.2. Частотні характеристики

Частотні характеристики описують передаточні властивості САК в режимі сталих гармонійних коливань, викликаних зовнішнім гармонійним впливом. Ці характеристики широко використовують в ТАК, тому що реальні зовнішні впливи можуть бути представлені у вигляді суми гармонійних сигналів. Вони визначаються змущеною складовою рішення диференціального рівняння при подачі на вхід впливу:

$$x(t) = a \sin(\omega t). \quad (3.13)$$

Представимо вплив (3.13) за допомогою формули Ейлера у вигляді суми двох експонентних впливів:

$$x(t) = a \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = x_1(t) + x_2(t), \quad (3.14)$$

де

$$x_1(t) = \frac{a}{2j} e^{j\omega t} \quad (3.15)$$

і

$$x_2(t) = -\frac{a}{2j} e^{-j\omega t}. \quad (3.16)$$

Вирішимо (3.1), підставивши в праву частину вираз (3.14). При цьому будемо шукати тільки змушену складову рішення $y_B(t)$.

Використовуючи принцип суперпозиції, рішення $y_B(t)$ можна подати у вигляді суми двох складових: $y_B(t) = y_1(t) + y_2(t)$, де $y_1(t)$ - рішення при $x(t) = x_1(t)$, а $y_2(t)$ - при $x(t) = x_2(t)$.

Будемо шукати $y_1(t)$ у вигляді

$$y_1(t) = Y(j\omega)x_1(t) = Y(j\omega)\frac{a}{2j}e^{j\omega t}. \quad (3.17)$$

Підставивши (3.17) і (3.15) в (3.1), після перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} Y(j\omega)\frac{a}{2j}e^{j\omega t} \underbrace{\left[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right]}_{A(j\omega)} = \\ = \frac{a}{2j}e^{j\omega t} \underbrace{\left[b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m \right]}_{B(j\omega)}. \end{aligned}$$

З останнього виразу маємо:

$$Y(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = W(j\omega). \quad (3.18)$$

$W(j\omega)$ називають *частотною передаточною функцією*. Зрівнявши (3.18) з виразом для передаточної функції $W(s)$, можна зробити висновок про те, що $W(j\omega)$ є частковим випадком $W(s)$ при $s = j\omega$.

Скориставшись прямим перетворенням Фур'є

$$\Phi\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

можна зробити наступне визначення: *частотною передатною функцією називається відношення вихідної величини до вхідної, перетворених за Фур'є при нульових початкових умовах.*

$W(j\omega)$, як і будь-яка функція комплексної змінної, може бути представлена в алгебраїчній і показовій формах.

Алгебраїчна форма:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.19)$$

де $P(\omega)$ і $Q(\omega)$ - речовинна і мніма частини відповідно.

Показова форма:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.20)$$

де $A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ - модуль, а $\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ - аргумент.

Підставивши (3.20) в (3.17), одержимо:

$$y_1(t) = W(j\omega) \frac{a}{2j} e^{j\omega t} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \frac{a}{2j} e^{j\omega t} = A(\omega) \frac{a}{2j} e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}. \quad (3.21)$$

Аналогічно одержимо складову $y_2(t)$:

$$y_2(t) = A(\omega) \frac{a}{2j} e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}. \quad (3.22)$$

Склавши (3.21) і (3.22), остаточно маємо:

$$y_{\text{в}}(t) = A(\omega) \frac{a}{2j} \left[e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} - e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]} \right] = A(\omega) \cdot a \cdot \sin[\omega t + \varphi(\omega)]. \quad (3.23)$$

Таким чином, при гармонійному впливі на вході вихідна величина після закінчення перехідного процесу ($y_{\text{с}}(t) = 0$) $\xrightarrow{t \rightarrow \infty}$ також змінюється за гармонійним законом, але з іншою амплітудою і фазою. При цьому відношення амплітуд вихідної і вхідної величин дорівнює модулю, а зміщення фаз – аргументу

$W(j\omega)$. Крива, що описує кінець вектора частотної передатної функції на комплексній площині при зміні частоти від 0 до ∞ , називається *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ).

Крім АФЧХ, що є самою загальною частотною характеристикою, розрізняють наступні види частотних характеристик:

- *амплітудна частотна характеристика* (АЧХ) – графік функції $A(\omega) = |W(j\omega)|$;

- *фазова частотна характеристика* (ФЧХ) – графік функції $\varphi(\omega) = \text{Arg } W(j\omega)$;

- *речовинна частотна характеристика* – графік функції $P(\omega) = \text{Re } W(j\omega)$;

- *мніма частотна характеристика* – графік функції $Q(\omega) = \text{Im } W(j\omega)$.

З порівняння (3.23) і (3.13) випливає важлива властивість частотних характеристик - можливість їхнього експериментального визначення на реальному об'єкті.

Приклад 3.4. Визначити частотні характеристики для умов прикладу 3.3.

Вирішення.

Перетворимо вихідне рівняння за Лапласом при нульових початкових умовах:

$$(0,09s^2 + 0,3s + 1)Y(s) = 10X(s).$$

Звідси можна одержати вираз для передаточної функції:

$$W(s) = \frac{10}{0,09s^2 + 0,3s + 1}.$$

Зробивши заміну $s = j\omega$, маємо:

$$W(j\omega) = \frac{10}{-0,09\omega^2 + 0,3j\omega + 1} = \frac{10}{1 - 0,09\omega^2 + j0,3\omega}.$$

Одержимо алгебраїчну форму подання $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{10}{1 - 0,09\omega^2 + j0,3\omega} = \left| \begin{array}{l} \text{помножимо й розділимо} \\ \text{на комплексно спряжене число} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{10}{1 - 0,09\omega^2 + j0,3\omega} \cdot \frac{1 - 0,09\omega^2 - j0,3\omega}{1 - 0,09\omega^2 - j0,3\omega} = \\
 &= \frac{10(1 - 0,09\omega^2)}{[1 - 0,09\omega^2]^2 + (0,3\omega)^2} + j \frac{-3\omega}{[1 - 0,09\omega^2]^2 + (0,3\omega)^2} \quad \square
 \end{aligned}$$

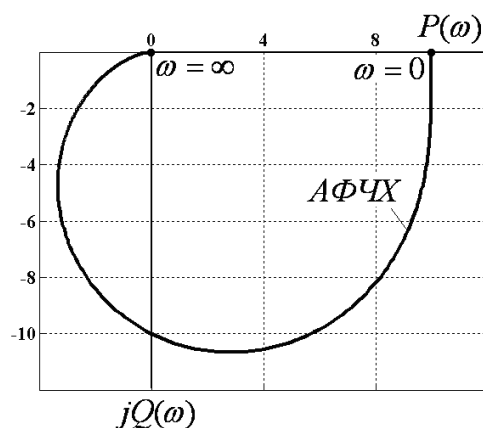
Звідси :

$$P(\omega) = \frac{10(1 - 0,09\omega^2)}{[1 - 0,09\omega^2]^2 + 0,09\omega^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{3\omega}{[1 - 0,09\omega^2]^2 + 0,09\omega^2};$$

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{\sqrt{[10(1 - 0,09\omega^2)]^2 + 9\omega^2}}{\sqrt{\{[1 - 0,09\omega^2]^2 + 0,09\omega^2\}^2}} = \frac{\sqrt{100\{[(1 - 0,09\omega^2)]^2 + 0,09\omega^2\}}}{\sqrt{\{[1 - 0,09\omega^2]^2 + 0,09\omega^2\}^2}} = \\
 &= \frac{10}{\sqrt{[1 - 0,09\omega^2]^2 + 0,09\omega^2}};
 \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg -\frac{3\omega}{10(1 - 0,09\omega^2)} = \left| \begin{array}{l} \text{функція} \\ \text{непарна} \end{array} \right| = -\arctg \frac{3\omega}{10(1 - 0,09\omega^2)} \quad \square$$

Відповідні графіки подані на рис. 3.5.



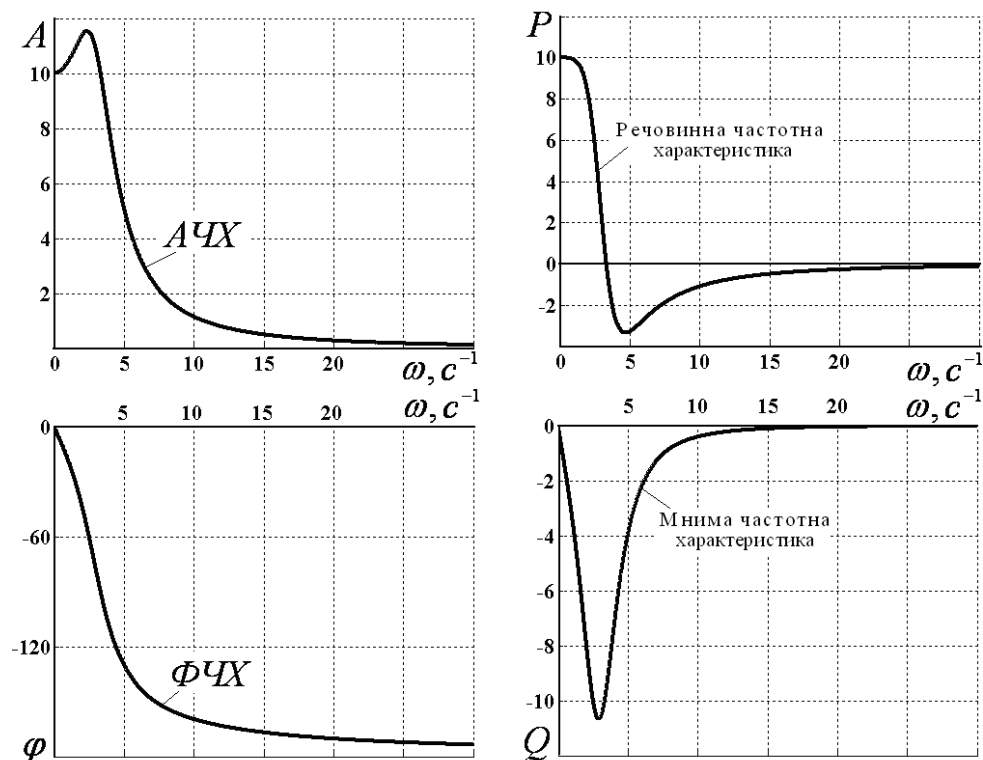


Рис. 3.5 - Частотні характеристики

3.2.1. Логарифмічні частотні характеристики

Дослідження частотних властивостей САК значно спрощується, якщо використати частотні характеристики, побудовані в логарифмічному масштабі. Такі характеристики називаються логарифмічними частотними характеристиками (ЛЧХ).

З'ясуємо, що вони собою представляють. Для цього прологарифмуємо $W(j\omega)$, виражену в показовій формі:

$$\lg W(j\omega) = \lg A(\omega) + j\varphi(\omega) \lg e.$$

В отриманому виразі величина $\lg A(\omega)$ характеризує зміну системою амплітуд гармонійних коливань. За одиницю виміру цієї зміни прийнята величина 1 *Бел*, рівна посиленню сигналу за потужністю в 10 разів. Оскільки потужність гармонійного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, то при використанні цієї одиниці для виміру відношення амплітуд перед логарифмом $\lg A(\omega)$ необхідно додати множник 2. Наприклад, якщо на деякій

частоті $A(\omega) = 100$, то це означає, що потужності вхідного і вихідного сигналів відрізняються в 100^2 раз, тобто на $2\lg 100 = 4$ Бел. У ТАУ використовують одиницю в 10 раз менше - 1 дБел. Тоді перед логарифмом $\lg A(\omega)$ необхідно додавати коефіцієнт 20, тобто $20\lg A(\omega)$.

Графік залежності $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$, побудований у логарифмічному масштабі частот, називається *логарифмічною амплітудною частотною характеристикою* (ЛАЧХ).

За одиницю виміру по осі частот приймають *декаду* - інтервал, на якому частота збільшується в 10 раз. Застосовується також розподіл осі ω на октави - 1 октава відповідає подвоєнню частоти. Тоді $1 \text{ окт} = \lg(2\omega_1/\omega_1) = \lg 2 = 0,301 \text{ дек}$.

Відзначимо, що для зручності користування логарифмічним масштабом на оцінці, що відповідає значенню $\lg \omega$, звичайно пишуть саме значення ω .

Логарифмування осі частот дозволяє стиснути зображення в області частот $\omega > 1 \text{ с}^{-1}$ і розтягти його в області $\omega < 1 \text{ с}^{-1}$. При цьому точці $\omega = 0 \text{ с}^{-1}$ відповідає значення $\lg \omega = -\infty$. Тому при побудові ЛЧХ вісь ординат проводять через деяку довільну точку, а не через точку $\omega = 0 \text{ с}^{-1}$.

Графік залежності фазової частотної функції $\varphi(\omega)$ від логарифма частоти $\lg \omega$ називається *логарифмічною фазовою частотною характеристикою* ЛФЧХ.

Приклад 3.5. Визначити логарифмічні частотні характеристики для умов прикладу 3.4.

Вирішення.

Скориставшись результатами, отриманими в ході вирішення прикладу 3.4, запишемо:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{10}{\sqrt{(1 - 0,09\omega^2)^2 + 0,09\omega^2}} =$$

$$= 20 \cdot \lg 10 - 10 \cdot \lg \left[(1 - 0,09\omega^2)^2 + 0,09\omega^2 \right] = 20 - 10 \cdot \lg \left[(1 - 0,09\omega^2)^2 + 0,09\omega^2 \right] \quad \square$$

Відповідні графіки представлені на рис. 3.6.

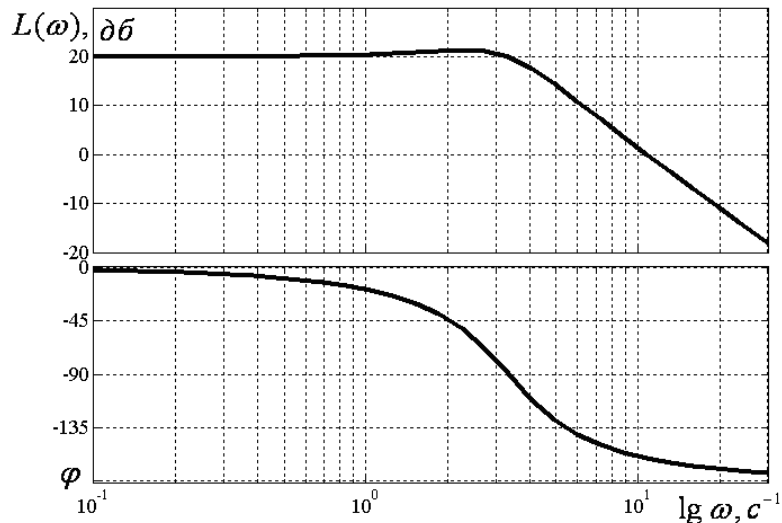


Рис. 3.6 - Логарифмічні частотні характеристики

Використання ЛЧХ дає наступні переваги:

1. Характеристики мають меншу кривизну, тому можуть бути приблизно замінені ламаними лініями, складеними з декількох прямолінійних відрізків. Ці відрізки в більшості випадків будують досить просто.
2. У логарифмічній системі координат легше знаходити сумарні характеристики різних з'єднань елементів.

3.3. Співвідношення взаємозв'язку характеристик САК між собою і передаточною функцією

Можливі співвідношення подані в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 - Співвідношення між характеристиками САК

Характеристика	$h(t)$	$w(t)$	$W(s)$	$W(j\omega)$
Перехідна характеристика $h(t)$	1	$\int_0^t w(t)dt$	$L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$	$F^{-1}\left\{\frac{W(j\omega)}{j\omega}\right\}$
Імпульсна перехідна характеристика $w(t)$	$h'(t)$	1	$L^{-1}\{W(s)\}$	$F^{-1}\{W(j\omega)\}$
Передаточна функція $W(s)$	$sL\{h(t)\}$	$L\{w(t)\}$	1	$W(j\omega) _{j\omega=s}$
Частотна передаточна функція $W(j\omega)$	$j\omega F\{h(t)\}$	$F\{w(t)\}$	$W(s) _{s=j\omega}$	1

Співвідношення, наведені на перетині перших трьох рядків і стовпців, впливають із визначення відповідних характеристик і властивостей перетворення Лапласа. Наприклад, з формули $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ при $x(t) = 1(t)$ одержуємо $W(s) = sH(s)$, де $H(s) = L\{h(t)\}$.

Звідки впливають співвідношення: $W(s) = L\{h(t)\}s$ і $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$.

Співвідношення ж, наведені в останньому стовпці і нижньому рядку, впливають із визначень прямого F і зворотного F^{-1} перетворень Фур'є :

$$F^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = y(t).$$

Контрольні питання

1. Які ви знаєте часові характеристики САК?
2. Які частотні характеристики ви знаєте? Дайте їхні визначення.
3. Як експериментально визначити частотні характеристики?
4. Як визначають частотні характеристики по передаточній функції?
5. Як будують логарифмічні частотні характеристики?
6. Навіщо вивчають частотні характеристики САК?
7. Як з передаточної функції одержати вираз для АФЧХ?
8. Наведіть основні формули, що зв'язують АФЧХ, АЧХ і ФЧХ між собою.
9. Який фізичний зміст мають ординати АЧХ елемента? Як за ними оцінити умови пропуску елементом гармонійного сигналу?