МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія технічного обслуговування авіаційної техніки

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Основи теорії автоматичного регулювання»
обов’язкових компонент освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів

за темою – Стійкість САК.

Харків 2021

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 23.09.2021 № 8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ
Протокол від 22.09.2021 № 2

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 22.09.2021 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, протокол від 30.08.2021 № 1

Розробник: старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист, Владов С.І.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілів і тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Павленко О.В.
2. Викладач циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

План лекції

1. Поняття, вигляд та загальна умова стійкості.
2. Алгебраїчні критерії стійкості.
3. Частотні критерії стійкості (критерій Михайлова, критерій Найквіста).
4. Порівняльна оцінка критеріїв стійкості.
5. Запаси стійкості.
6. Вплив величини передаточного коефіцієнта розімкнутого контуру САК на її стійкість у замкнутому стані.

Рекомендована література:

Основна

1. Абраменко І. Г., Абраменко Д. І. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2008. 178 с.
2. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник ; 2-ге вид., перероб. і дор. Київ : Либідь, 2007. 656 с.
3. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2006. 187 с.

Допоміжна

4. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування : підручник. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет. 2003. 250 с.
5. Гоголюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2009. 280 с.
6. Асланян А. Е., Зіатдінов Ю. К., Барабаш О. В., Бєльська О. А. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Національний авіаційний університет, 2015. 532 с.

□□□ТЕКСТ□ЛЕКЦІЇ

5.1. Поняття, вигляд та загальна умова стійкості

Однією з найважливіших характеристик автоматичної системи керування є стійкість. Цим поняттям характеризується працездатність системи. Система, що не володіє стійкістю, не здатна виконувати функції керування і має нульову або навіть негативну ефективність (тобто система шкідлива). Нестійка система може привести керований об'єкт до аварійного стану. Тому проблема стійкості систем є однією із центральних у теорії автоматичного керування.

Стійкість автоматичної системи - це властивість системи повертатися у вихідний стан рівноваги після припинення дії, яка вивела систему з цього стану.

Нестійкість автоматичних систем керування виникає, як правило, через дуже сильну дію зворотного зв'язку. Причиною динамічної нестійкості звичайно є значна инерційність елементів замкнутого контуру, через яку в режимі коливань системи сигнал зворотного зв'язку значно відстає від вхідного сигналу і виявляється з ним у фазі. Це означає, що зв'язок, виконаний конструктивно як негативний, проявляється як позитивний.

Розглянемо математичну сутність стійкості й нестійкості. Відповідно до даного вище фізичного визначення стійкість залежить тільки від характеру вільного руху системи. Вільний рух лінійної або лінеаризованої системи описується однорідним диференціальним рівнянням

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = 0, \qquad (5.1)$$

де $y(t) = y_{\text{c}}(t)$ - вільна складова керованої величини системи.

Змушена складова вихідної величини, що залежить від вигляду зовнішнього впливу і правої частини диференціального рівняння, на стійкість системи не впливає.

Система є *стійкою*, якщо вільна складова $y_c(t)$ перехідного процесу з часом прагне до нуля, тобто якщо

$$\lim_{t\to\infty} y_c(t) = 0. \tag{5.2}$$

Очевидно, що при цьому вихідна величина системи буде прагнути до змушеної складової, обумовленої зовнішнім впливом і правою частиною рівняння (5.1). Стійкість у змісті умови (5.2) прийнято називати *асимптотичною*.

Якщо вільна складова необмежено зростає, тобто якщо

$$\lim_{t\to\infty} y_c(t) = \infty. \tag{5.3}$$

то система *нестійка*.

Нарешті, якщо вільна складова не прагне ні до нуля, ні до нескінченності, то система перебуває *на межі стійкості*.

Знайдемо загальну умову, при якій система, описувана рівнянням (5.1), стійка. Рішення рівняння (5.1) дорівнює сумі

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}, \tag{5.4}$$

де C_i - постійні, залежні від початкових умов; p_i - корені характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ \dots \ + a_n = 0. \tag{5.5}$$

Корені характеристичного рівняння можуть бути дійсними ($p_i = \alpha_i$), мнимими ($p_i = j\beta_i$) і комплексними ($p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$). При цьому комплексні корені завжди попарно сполучені між собою: якщо є корінь з позитивною мнимою частиною, то обов'язково існує корінь з такою же за модулем, але негативною мнимою частиною.

Складова (5.4) при $t\to\infty$ прагне до нуля лише в тому випадку, якщо кожен додаток вигляду $C_i e^{p_i t} \to 0$. Характер останньої функції залежить від вигляду кореня. Розглянемо всі можливі випадки розташування коренів

p_i на комплексній площині (рис. 5.1) і відповідні їм функції $y_{c,i}(t) = C_i e^{p_i t}$, які показані всередині еліпсів.

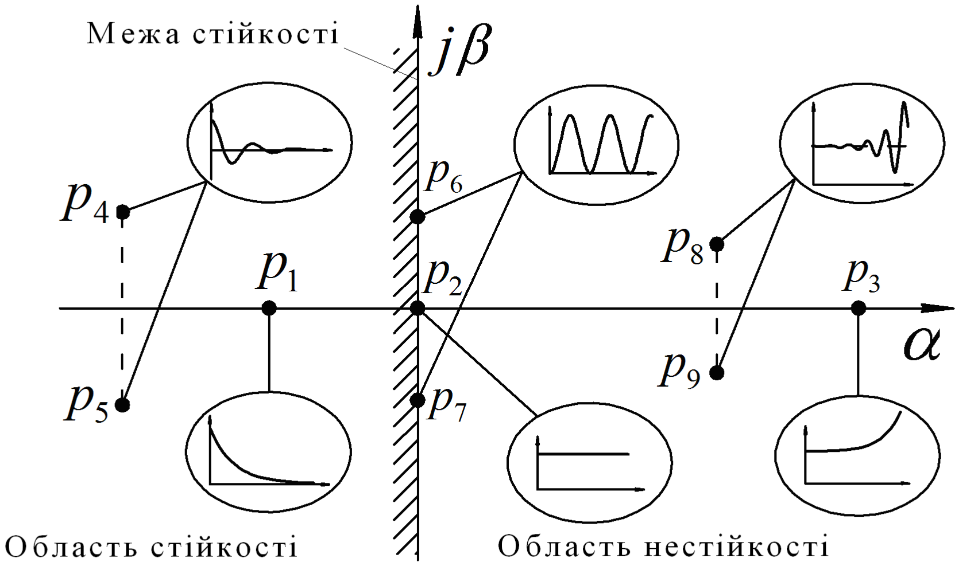


Рис. 5.1 - Вплив коренів характеристичного рівняння системи на складові її вільного руху

Кожному дійсному кореню $p_i = \alpha_i$ в рішенні (5.4) відповідає додаток вигляду:

$$y_{c,i}(t) = C_i e^{\alpha_i t} \tag{5.6}$$

Якщо $\alpha_i < 0$ (корінь p_1), то функція (5.6) при $t \to \infty$ прагне до нуля. Якщо $\alpha_i > 0$ (корінь p_3), то функція (5.6) необмежено зростає. Якщо $\alpha_i = 0$ (корінь p_2), то ця функція залишається постійною.

Кожній парі сполучених комплексних коренів $p_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ у рішенні (5.4) відповідають два додатки, які можуть бути об'єднані в один:

$$y_{c,i,i+1}(t) = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i) \,. \tag{5.7}$$

Функція (5.7) являє собою синусоїду із частотою β_i і амплітудою, що змінюється в часі за експонентою. Якщо дійсна частина двох комплексних коренів α_i (див. рис. 5.1, корені p_4 і p_5), то коливальна складова (5.7) буде загасати. Якщо $\alpha_i > 0$ (корені p_8 і p_9), то амплітуда коливань буде необмежено зростати. Нарешті, якщо $\alpha_i = 0$ (корені p_6 і p_7), тобто якщо обоє сполучених коренів - мнимі, то $y_{\text{c},i}(t)$ являє собою незатухаючу синусоїду з частотою β_i. Якщо серед коренів характеристичного рівняння (5.5) є r рівних між собою коренів p_i, то в рішенні (5.4) замість r додатків вигляду $C_i e^{p_i t}$ з'явиться одна складова:

$$\left(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ \ldots \ + C_{r-1} t^{r-1}\right) e^{p_i t}. \qquad (5.8)$$

З огляду на те, що функція вигляду e^{-bt} при кожному b убуває швидше, ніж зростають додатки вигляду t^r, можна довести, що і у випадку кратності коренів рішення (5.4) прагнутиме до нуля тільки при від'ємності дійсної частини кратних коренів.

На підставі проведеного аналізу можна сформулювати *загальну умова стійкості*: *для стійкості лінійної автоматичної системи керування необхідно і достатньо, щоб дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння системи були* від'ємними. При цьому дійсні корені розглядаються як окремий випадок комплексних, в яких мнима частина дорівнює нулю. Якщо хоча б один корінь має позитивну дійсну частину, то система буде нестійкою.

Стійкість системи залежить тільки від вигляду коренів характеристичного рівняння і не залежить від характеру зовнішніх впливів на систему. Стійкість є внутрішня властивість системи.

Використовуючи геометричне подання коренів (5.5) на комплексній площині (див. мал. 5.1) у вигляді векторів або точок, можна дати друге формулювання загальної умови стійкості (еквівалентне основній): *для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння перебували в лівій напівплощині*.

Якщо хоча б один корінь перебуває у правій напівплощині, то система буде нестійкою.

Мнима вісь $j\beta$ є межею стійкості в площині коренів. Якщо характеристичне рівняння має одну пару чисто мнимих коренів $p_{i,i+1} = \pm j\beta_i$, а всі інші корені перебувають у лівій напівплощині, то в системі встановлюються незатухаючі гармонійні коливання з круговою частотою $\omega = \beta_i$. У цьому випадку говорять, що система перебуває на *коливальній межі стійкості*.

Точка $\beta = 0$ на мнимій осі відповідає так званому нульовому кореню. Якщо рівняння має один нульовий корінь, то система перебуває на *аперіодичній межі стійкості*. Якщо таких коренів два, то система нестійка.

Застосовуючи сформульовану вище умову для оцінки стійкості реальних систем, не слід забувати, що лінійні рівняння типу (5.1), як правило, виходять у результаті спрощень і лінеаризації вихідних нелінійних рівнянь. Виникає запитання: якою мірою оцінка стійкості за лінеаризованим рівнянням буде справедлива для реальної системи, чи не зроблять істотний вплив на результат аналізу відкинуті при лінеаризації члени розкладання? Відповідь на нього була дана російським математиком А. М. Ляпуновим в 1892 р. у роботі «Загальна умова стійкості руху». Він сформулював і довів наступну теорему: якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має хоча б один нульовий корінь або одну пари мнимих коренів, то судити про стійкість реальної системи за лінеаризованим рівнянням не можна.

Відкинуті при лінеаризації малі члени можуть зробити систему стійкою або нестійкою, тому стійкість реальної системи необхідно оцінювати по вихідному нелінійному рівнянню.

Таким чином, для судження про стійкість лінійної системи досить визначити лише знаки дійсних частин коренів характеристичного рівняння.

У теорії автоматичного керування розроблено ряд правил, за допомогою яких можна судити про знаки коренів, не вирішуючи характеристичне рівняння і не знаходячи числові значення самих коренів. Ці правила називаються *критеріями стійкості*.

Найпростішим критерієм стійкості є *умова позитивності коефіцієнтів характеристичного рівняння.* Позитивність коефіцієнтів рівняння (5.5) є необхідною (але не достатньою) умовою стійкості системи. Це означає, що коли всі коефіцієнти позитивні, то система може бути стійкою або нестійкою. Але якщо хоча б один коефіцієнт негативний або дорівнює нулю, то система нестійка. Критерії стійкості можуть бути алгебраїчними і частотними. *Алгебраїчні критерії* встановлюють необхідні й достатні умови від'ємності коренів у формі обмежень, що накладаються на певні комбінації коефіцієнтів характеристичного рівняння. *Частотні критерії* визначають зв'язок між стійкістю системи і формою частотних характеристик системи.

При аналізі стійкості систем керування звичайно вирішують одне або кілька завдань:

1) оцінюють, стійка чи ні система при заданих параметрах;

2) визначають припустимий за умовою стійкості діапазон зміни деяких незаданих параметрів системи;

3) з'ясовують, чи може система при заданій структурі бути в принципі стійкою.

5.2. Алгебраїчні критерії стійкості

Найпоширенішим в інженерній практиці є критерій Гурвіца. Він був сформульований і доведений в 1895 р. німецьким математиком А. Гурвіцом, який розробив свій критерій, вирішуючи чисто математичне завдання - завдання дослідження стійкості рішень лінійного диференціального рівняння. Стосовно до завдань теорії керування критерій Гурвіца можна сформулювати так: *система, описувана характеристичним рівнянням*

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ \dots \ + a_n = 0 \tag{5.9}$$

стійка, якщо при $a_0 > 0$ *позитивні всі визначники Гурвіца* $\Delta_1, \ \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Ці визначники складають за наступними правилами:

1) по головній діагоналі виписують всі коефіцієнти від a_1 до a_n в порядку зростання індексу;

2) доповнюють стовпці визначника нагору від діагоналі коефіцієнтами з послідовно зростаючими, а вниз – з послідовно убутними індексами;

3) на місце коефіцієнтів, індекси яких більше n і менше 0, ставлять нулі.

Відповідно до цих правил, визначник Гурвіца n -го порядку для рівняння (5.9) має вигляд

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \qquad (5.10)$$

Визначники Гурвіца більш низького порядку є діагональними мінорами Δ_n . Наприклад, при n = 3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = a_1.$$

Оскільки в останньому стовпці визначника Δ_n стоять нулі, за винятком a_n , то $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$.

Приклад 5.1. САК описується рівнянням другого порядку, характеристичне рівняння якого має вигляд: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$.

Визначити умову стійкості САК за Гурвіцом.

Вирішення.

Складемо відповідно до (5.10) головний визначник Гурвіца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

Тоді умови стійкості системи запишуться у вигляді

$$\Delta_2 = a_2\Delta_1 = a_2 a_1 > 0;\ \Delta_1 = a_1 > 0;\ a_0 > 0.$$

Оскільки $a_1 > 0$, то для виконання умови $\Delta_2 > 0$, коефіцієнт a_2 також повинен бути більше нуля. Таким чином, для стійкості системи другого порядку необхідно й достатньо, щоб всі коефіцієнти характеристичного рівняння були позитивними.

***

Приклад 5.2. САК описується рівнянням третього порядку, характеристичне рівняння якого має вигляд: $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

Визначити умову стійкості САК за Гурвіцом.

Вирішення.

Складемо головний визначник Гурвіца:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2.$$

Тоді для стійкої системи маємо:

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0;\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;\ \Delta_1 = a_1 > 0;\ a_0 > 0.$$

Аналіз наведених нерівностей показує, що для виконання умови позитивності всіх визначників Гурвіца, всі коефіцієнти рівняння повинні бути також позитивні, але, крім того, мусить виконуватися нерівність: $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

***

Таким чином, умова позитивності коефіцієнтів є необхідною, але не достатньою умовою стійкості розглянутої системи. Це твердження залишається справедливим для всіх систем при порядку диференціального рівняння вище третього ($n > 3$).

Приклад 5.3. Структурна схема САК має вигляд, поданий на рис. 5.2.

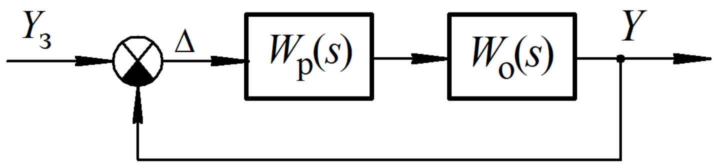


Рис. 5.2 – Структурна схема САК

Тут передаточні функції елементів:

$$W_о(s) = \frac{k_о}{T_о^2 s^2 + 2T_о \xi s + 1}; \; W_р(s) = \frac{k_р}{s}; \; T_о = 0{,}1 \; c; \; \xi = 0{,}45; \; k_о = 0{,}26$$

Визначити діапазон значень коефіцієнта передачі керуючого пристрою $k_р$, що задовольняють вимогам стійкості системи.

Вирішення.

Визначимо передаточну функцію замкнутої системи по каналу $Y_з \to \Delta$:

$$W_{Y_з\Delta}(s) = \frac{1}{1 + W_р(s) W_о(s)} = \frac{\left(T_о^2 s^2 + 2T_о \xi s + 1\right)s}{\left(T_о^2 s^2 + 2T_о \xi s + 1\right)s + k_р k_о} = \frac{T_о^2 s^3 + 2T_о \xi s^2 + s}{T_о^2 s^3 + 2T_о \xi s^2 + s + k_р k_о}$$

Тоді характеристичне рівняння системи набуде вигляд

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

де: $a_0 = T_о^2 = 0{,}01$; $a_1 = 2\xi T_о = 0{,}09$; $a_2 = 1$; $a_3 = 0{,}26 k_р$.

Відповідно до критерію Гурвіца для стійкої системи третього порядку повинна виконуватися нерівність $a_1 a_2 > a_0 a_3$ (див. приклад 5.2).

Маємо:

$$a_1 a_2 = 0{,}09 \cdot 1 > 0{,}01 \cdot 0{,}26 k_р = a_0 a_3 .$$

Звідки

$$0 < k_р < 34{,}62 .$$

* * *

5.3. Частотні критерії стійкості

Частотні критерії стійкості дозволяють судити про стійкість САК за виглядом їхніх частотних характеристик. Ці критерії є графоаналітичними і мають велике поширення, тому що дозволяють досить легко досліджувати стійкість систем високих порядків, а також мають просту геометричну інтерпретацію. До цієї групи відносяться критерії Михайлова і Найквіста.

Перейдемо до їхнього розгляду.

5.3.1. Критерій Михайлова

Цей критерій був сформульований в 1938 р. російським ученим А.В. Михайловим Він дозволяє судити про стійкість САУ довільної структури на підставі розгляду деякої геометричної фігури – *годографа Михайлова*. В основу критерію Михайлова покладений *принцип аргументу* - добуток комплексних чисел має аргумент, що дорівнює сумі аргументів всіх його співмножників.

Наведемо доказ цього критерію.

Нехай характеристичне рівняння системи має вигляд

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{5.11}$$

Відповідно до теореми Безу характеристичний поліном $A(p)$ можна подати у вигляді

$$A(p) = a_0 (p - p_1) \cdot (p - p_2) \ldots (p - p_n), \tag{5.12}$$

де $p_i = \alpha_i + j\beta_i$ - корінь рівняння $A(p) = 0$.

На комплексній площині кожен корінь зображується вектором $\mathbf{p}_i$, проведеним з початку координат до точки p_i (див. рис. 5.3), модуль якого рівняється $|\mathbf{p}_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$ а аргумент - $\operatorname{Arg}\ \mathbf{p}_i = \operatorname{arctg}(\beta_i / \alpha_i)$.

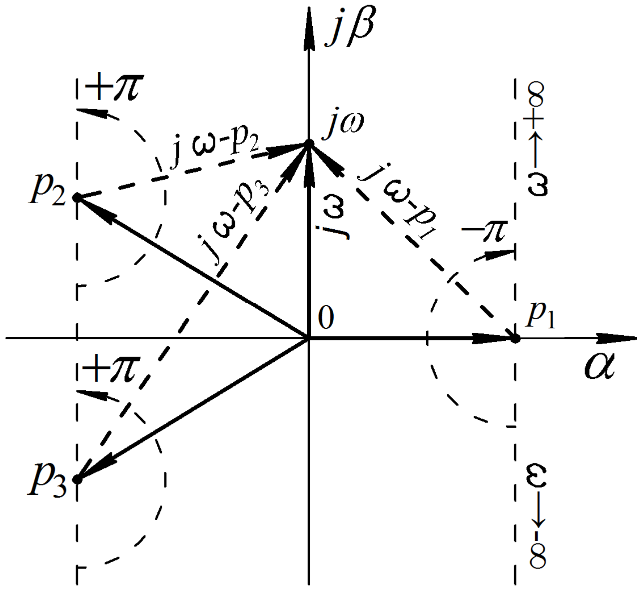


Рис. 5.3

Тоді кожна дужка $(p - p_i)$ в (5.12) геометрично може бути зображена вектором, проведеним з точки з координатами $[\alpha_i; \beta_i]$ до довільної точки з координатами $[\mathrm{Re}(p); \mathrm{Im}(p)]$ (див. мал. 5.3).

Якщо покласти $p = j\omega$, то одержимо:

$$\mathbf{A}(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)\cdot(j\omega - p_2)\ldots(j\omega - p_n) =$$

$$= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n = A_0(\omega) + jA_1(\omega)\ , \qquad (5.13)$$

де

$$A_0(\omega) = \mathrm{Re}\ \ \mathbf{A}(j\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots\ ;$$

$$A_1(\omega) = \mathrm{Im}\ \ \mathbf{A}(j\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots .$$

Вершини векторів $(\mathbf{j\omega - p}_i)$ при будь-якому конкретному значенні ω сходяться у точці $[0; j\omega]$.

Аргумент результуючого вектора $\mathbf{A}(j\omega)$, виходячи з (5.13), дорівнює сумі аргументів векторів $(\mathbf{j\omega - p}_i)$, тобто

$$\mathrm{Arg}\ \ \mathbf{A}(j\omega) = \mathrm{Arg}\ \ (\mathbf{j\omega - p}_1) + \mathrm{Arg}\ \ (\mathbf{j\omega - p}_2) + \ldots + \mathrm{Arg}\ \ (\mathbf{j\omega - p}_n).$$

При зміні частоти ω вектор $\mathbf{A}(j\omega)$, змінюючись за величиною і напрямком, буде описувати своїм кінцем на комплексній площині деяку криву, що називається кривою або *годографом Михайлова*.

Умовимося обертання проти годинникової стрілки вважати позитивним. Тоді при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ кожен елементарний вектор в (5.13) повернеться на кут π, якщо його початок (корінь p_i) розташований ліворуч від мнимої осі, і на кут $-\pi$, якщо корінь розташований праворуч.

Припустимо, що $A(p)$ має m правих корінь і $(n-m)$ - лівих. Тоді, при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ збільшення аргументу вектора $\mathbf{A}(j\omega)$ буде:

$$\Delta \text{Arg } \mathbf{A}(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi(n-m) - \pi m = \pi(n-2m). \tag{5.14}$$

Звідси число правих корінь полінома $A(p)$ може бути визначене у вигляді:

$$m = {\pi n - \Delta \text{Arg } \mathbf{A}(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty}} \Big/ 2 . \tag{5.15}$$

З (5.15) вигдно, що число правих корінь системи m дорівнює нулю тільки у випадку, якщо

$$\Delta \text{Arg } \mathbf{A}(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi n \cdot \tag{5.16}$$

З рівняння (5.13) видно, що $\text{Im } \mathbf{A}(j\omega)$ є непарною функцією частоти, а $\text{Re } \mathbf{A}(j\omega)$ - парною. Отже годограф вектора $\mathbf{A}(j\omega)$ складається із двох віток, симетричних щодо дійсної осі. Ця властивість годографа дозволяє обмежитися зміною частоти тільки в межах від 0 до $+\infty$.

Тоді умову (5.16) можна записати у вигляді

$$\Delta \text{Arg } \mathbf{A}(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi m}{2} \cdot \tag{5.17}$$

Умова (5.17) є необхідною, але не достатньою умовою стійкості. Для стійкості системи необхідно і достатньо, щоб серед коренів характеристичного рівняння не було коренів, що лежать на мнимій осі і приводять у нуль комплексний поліном $\mathbf{A}(j\omega)$, тобто повинна виконуватися ще одна умова:

$$\mathbf{A}(j\omega) \neq 0 \cdot \tag{5.18}$$

Для стійких систем крива Михайлова починається при $\omega = 0$ на речевинній позитивній півосі, оскільки при $a_0 > 0$ всі коефіцієнти характеристичного рівняння позитивні і $A(0) = a_n > 0$. Крім того, для стійких систем $\operatorname{Arg} \mathbf{A}(j\omega)$ з ростом частоти ω повинен зростати монотонно, тобто вектор $\mathbf{A}(j\omega)$ повинен повертатися тільки проти годинникової стрілки. Це обумовлюється тим, що з ростом частоти монотонно зростають аргументи елементарних векторів $(\mathbf{j\omega} - \mathbf{p}_i)$, що є додатками $\operatorname{Arg} \mathbf{A}(j\omega)$.

З огляду на сказане вище, критерій стійкості Михайлова можна сформулювати так: *для того, щоб САК була стійка, необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова при зміні частоти ω від 0 до ∞, починався при $\omega = 0$ на речовинній позитивній півосі і обходив проти годинникової стрілки послідовно n квадрантів координатної площини, де n - порядок характеристичного рівняння, не обертаючись при цьому в нуль.*

Годографи кривої Михайлова при зміні ω від 0 до ∞ для стійких систем при різних значеннях n наведені на рис. 5.4.

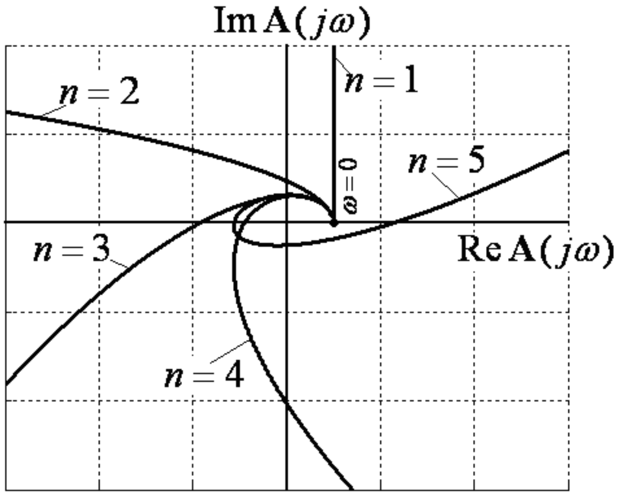


Рис. 5.4 - Годографи кривої Михайлова при зміні ω від 0 до ∞ для стійких систем

Розташування годографів на комплексній площині для різних нестійких систем ілюструється рис.5.5.

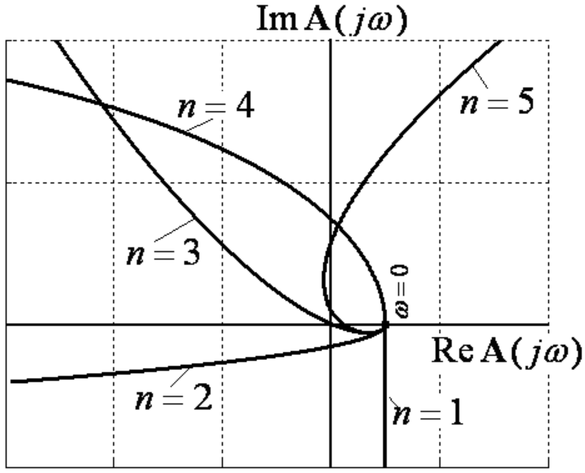


Рис. 5.4 - Годографи кривої Михайлова при зміні ω від 0 до ∞ для нестійких систем

5.3.2. Критерій Найквіста

Цей критерій сформульований в 1932 р. американським фізиком Найквістом. На відміну від раніше розглянутих критеріїв, які засновані на використанні характеристичного рівняння системи, критерій Найквіста дозволяє судити про стійкість замкнутої системи за АФЧХ її розімкнутого контура.

Розглянемо замкнуту САК з негативним зворотним зв'язком, представлену на рис. 5.6.

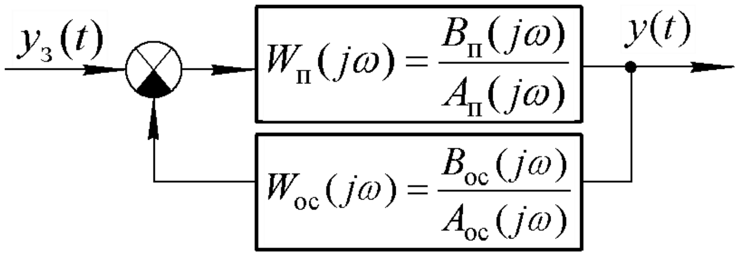


Рис. 5.6

Тут: $B_п(j\omega)$, $A_п(j\omega)$ - поліноми чисельника і знаменника частотної передатної функції прямого ланцюга; $B_{ос}(j\omega)$, $A_{ос}(j\omega)$- те ж для ланцюга зворотного зв'язку.

Визначимо частотну передаточну функцію розімкнутого контуру $W_{рк}(j\omega)$:

$$W_{\text{рк}}(j\omega)=\frac{B_{\text{п}}(j\omega)B_{\text{ос}}(j\omega)}{A_{\text{п}}(j\omega)A_{\text{ос}}(j\omega)}=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

Визначимо також частотну передаточну функцію замкнутої САК:

$$W_{\text{з}}(j\omega)=\frac{\dfrac{B_{\text{п}}(j\omega)}{A_{\text{п}}(j\omega)}}{1+\dfrac{B(j\omega)}{A(j\omega)}}=\frac{B_{\text{п}}(j\omega)A(j\omega)}{A_{\text{п}}(j\omega)(A(j\omega)+B(j\omega))}=\frac{B_{\text{п}}(j\omega)A_{\text{ос}}(j\omega)}{A(j\omega)+B(j\omega)}=\frac{C(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Розглянемо допоміжну функцію:

$$\Psi(j\omega)=1+W_{\text{рк}}(j\omega)=1+\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}=\frac{A(j\omega)+B(j\omega)}{A(j\omega)}=\frac{D(j\omega)}{A(j\omega)}$$

З порівняння останнього співвідношення з попередніми двома слідує, що $D(j\omega)$ - це рівняння кривої Михайлова для замкнутої системи, а $A(j\omega)$ - те ж, для розімкнутої системи.

Оскільки в реальних системах ступінь n полінома $B(j\omega)$ не перевищує ступеня полінома $A(j\omega)$, то ступені поліномів $D(j\omega)$ і $A(j\omega)$ однакові й рівні n.

З'ясуємо, як змінюється кут повороту вектора $\Psi(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞.

Відповідно до правила розподілу комплексних чисел цей кут визначається виразом

$$\Delta\text{Arg }\Psi(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}=\Delta\text{Arg }D(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}-\Delta\text{Arg }A(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}. \qquad (5.19)$$

Умова стійкості замкнутої системи відповідно до критерію Михайлова виражається співвідношенням:

$$\Delta\text{Arg }D(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}=\frac{\pi n}{2}. \qquad (5.20)$$

У розімкнутому стані система може бути і нестійкою. Тому приймемо, що характеристичне рівняння розімкнутої системи $A(p)=0$ має m правих коренів.

Тоді

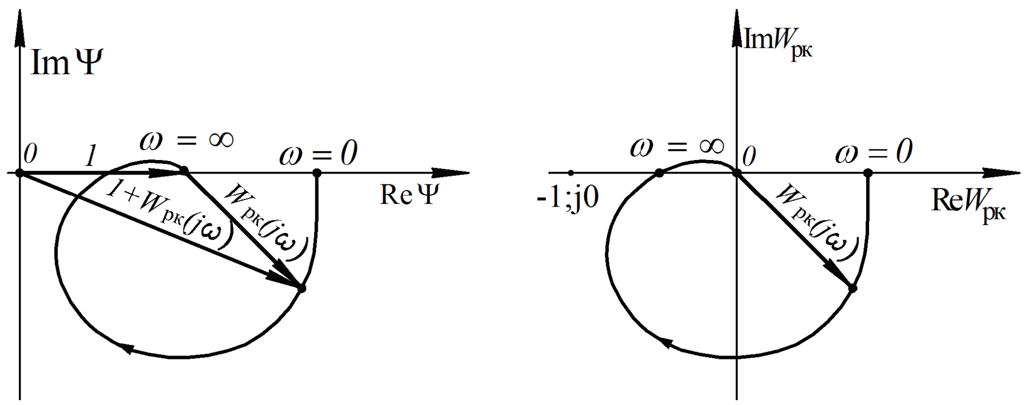
$$\Delta \text{Arg } A(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi(n-2m)}{2}. \tag{5.21}$$

Підставимо (5.20) і (5.21) в (5.19):

$$\Delta \text{Arg } \Psi(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi(n-2m)}{2} = m\pi \tag{5.22}$$

Вираз (5.22) позначає відсутність правих корінь характеристичного рівняння замкнутої системи, тому є необхідною і достатньою умовою стійкості замкнутої системи.

Годограф вектора $\Psi(j\omega)$ представлений на рис. 5.7, *а*.



а) б)

Рис. 5.7

Якщо змістити вісь ординат вправо на +1, то початок координат у новій системі співпаде з початком вектора $W_{\text{рк}}(j\omega)$, а початок у старій системі співпаде із точкою $[-1\ ;\ j0\ ]$ (мал. 5.7, б).

Тоді критерій Найквіста можна сформулювати у такому вигляді: *замкнута система буде стійкою, якщо АФЧХ розімкнутої системи, що має* m *правих коренів, при збільшенні* ω *від* 0 *до* ∞ *охопить точку* $[-1\ ;\ j0\ ]$ $m/2$ *раз у позитивному напрямку.*

У випадку, якщо $m = 0$, тобто розімкнута система стійка, критерій Найквіста формулюється в більш простому вигляді: *якщо розімкнута система стійка, то для забезпечення її стійкості в замкнутому стані необхідно і* *достатньо, щоб АФЧХ розімкнутої системи не охоплювала точку* $[-1\ ;\ j0\ ]$.

Критерію Найквіста при $m=0$ можна дати наочну фізичну інтерпретацію. Припустимо, що на вході системи діє гармонійний сигнал $y_{з}(t) = y_{з,\max} \sin \omega t$, частота якого ω дорівнює частоті ω_{π}, при якій фазове зміщення, створюване $W_{рк}(j\omega)$, дорівнює $-\pi$.

У цьому разі сигнал зворотного негативного зв'язку діє у фазі із сигналом $y_{з}(t)$ і миттєві значення цих сигналів підсумовуються.

Якщо на частоті $\omega = \omega_{\pi}$ модуль $\left|W_{рк}(j\omega_{\pi})\right| = 1$, то в контурі системи будуть підтримуватися незатухаючі коливання навіть після зникнення зовнішнього впливу $y_{з}(t)$, тобто система перебуватиме на межі стійкості. Характеристика $W_{рк}(j\omega)$ при цьому проходить через точку $[-1\ ;\ j0\ ]$.

Якщо на частоті $\omega = \omega_{\pi}$ модуль $\left|W_{рк}(j\omega_{\pi})\right| < 1$, то після зникнення зовнішнього впливу коливання в контурі загаснуть, тобто система буде стійкої і характеристика $W_{р}(j\omega)$ не охоплює точку $[-1\ ;\ j0\ ]$.

Якщо ж при $\omega = \omega_{\pi}$ модуль $\left|W_{рк}(j\omega_{\pi})\right| > 1$, то амплітуда сигналів у контурі буде необмежено зростати, тобто система буде нестійкою. Характеристика $W_{рк}(j\omega)$ в цьому випадку охоплює точку $[-1\ ;\ j0\ ]$.

Таким чином, особлива роль точки $[-1\ ;\ j0\ ]$ полягає в тім, що вона відповідає перетворенню негативного зворотного зв'язку в позитивний, і по-друге, є граничною між режимами посилення і ослаблення сигналів системою з $W_{рк}(j\omega)$.

Приклад 5.4. Використаємо критерій Найквіста для визначення стійкості САК різної конфігурації.

Вирішення.

1. Нехай розімкнута система складається з двох аперіодичних ланок першого порядку. Тоді частотну передаточну функцію системи можна подати у вигляді

$$W_{\text{р}1}(j\omega) = \frac{k}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}.$$

Якщо $T_1 = 0$, то АФЧХ має вигляд, показаний на мал. 5.8, *а*, якщо ж $T_1 \neq 0$, то АФЧХ має вигляд, показаний на рис. 5.8, б.

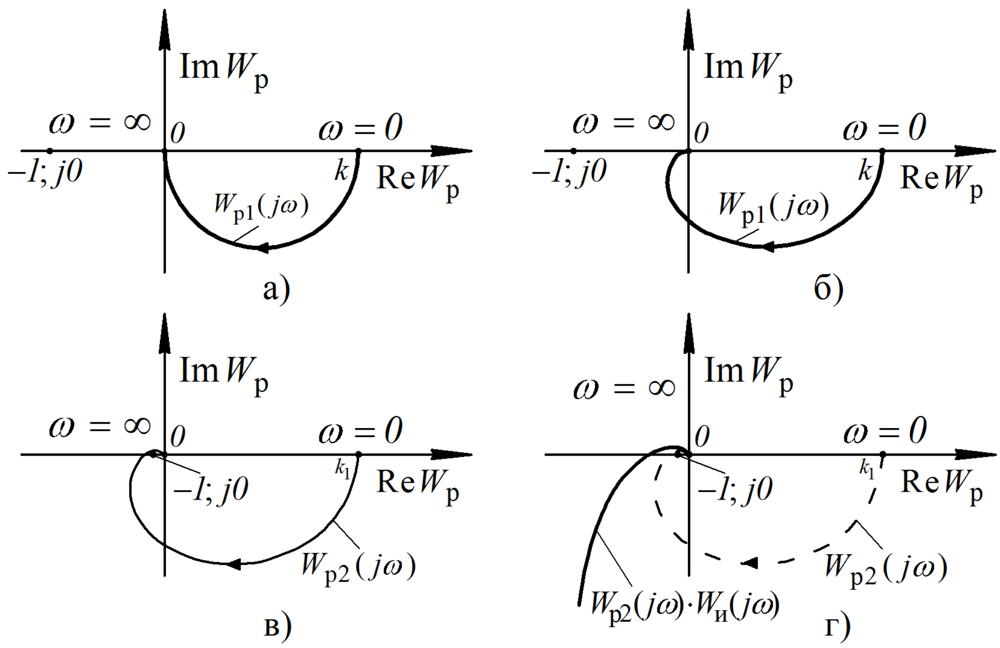


Рис. 5.8

Оскільки АФЧХ розімкнутої системи з частотною функцією $W_{\text{р}1}(j\omega)$ при будь-яких T_1 і T_2 не перетинає негативну піввісь абсцис, то ця система завжди стійка.

2. Нехай частотна передаточна функція розімкнутої системи визначається виразом вигляду

$$W_{\text{р}2}(j\omega)=\frac{k}{(T_1 j\omega+1)(T_2 j\omega+1)(T_3 j\omega+1)}$$

Годограф вектора $W_{\text{р}2}(j\omega)$, представлений на рис. 5.8 в, при певних значеннях параметрів може охопити точку $[-1\ ;\ j0\ ]$. При цьому система втратить стійкість.

3. Якщо послідовно з інерційними ланками включити інтегруючу ланку з частотною характеристикою $W_{\text{и}}(j\omega)=k_{\text{и}}/(j\omega)$, то множення вектора АФЧХ, представленого, наприклад, частотною функцією $W_{\text{р}2}(j\omega)$, на вектор $W_{\text{и}}(j\omega)=-j(k_{\text{и}}/\omega)$ з аргументом, рівним $-\pi/2$, означає поворот всіх векторів $W_{\text{р}2}(j\omega)$ на кут $-\pi/2$ з одночасним поділом на ω (мал. 5.8, *г)*. Таким чином, АФЧХ наближається до точки $[-1\ ;\ j0\ ]$ й, отже, включення інтегруючої ланки в розімкнутий ланцюг системи зменшує ступінь її стійкості і збільшує схильність системи до коливань.

***

5.3.3. Визначення стійкості за логарифмічними частотними характеристиками

Критерій Найквіста дозволяє з'ясувати стійкість замкнутої системи не тільки по АФЧХ, але і по ЛФЧХ розімкнутої системи. Цю можливість використовують досить широко через простоту побудови таких характеристик.

Умова знаходження замкнутої системи на межі стійкості відповідно до критерію Найквіста виражається співвідношеннями:

$$\begin{cases} \left|W_{\text{рк}}(j\omega_\pi)\right|=1; \\ \varphi(\omega)=\operatorname{Arg}\ W_{\text{рк}}(j\omega)=-\pi \end{cases} \tag{5.23}$$

Звідки виходить наступний різновид формулювання цього критерію: *якщо розімкнута система стійка, то для забезпечення її стійкості в замкнутому стані необхідно й достатньо, щоб при досягненні ФЧХ розімкнутої системи значення* $-\pi$, *ЛАЧХ цієї ж системи була негативною.*

Приклад. 5.5. Частотні логарифмічні характеристики трьох різних систем у розімкнутому стані представлені на рис.5.9.

Визначити стійкість цих систем у замкнутому стані.

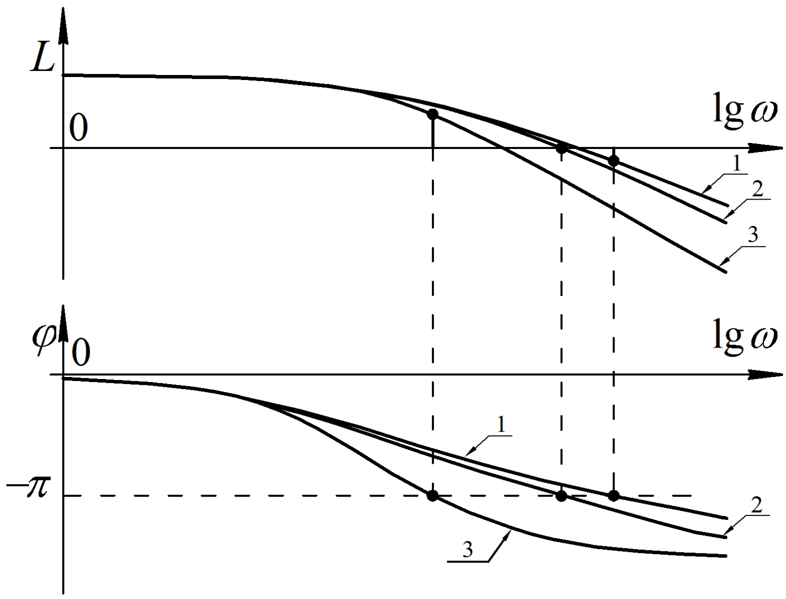


Рис. 5.9

Вирішення.

Виходячи із знаку ЛАЧХ при $\omega = \omega_{\pi}$ робимо висновок, що система 1 є стійкою, 2 – перебуває на межі стійкості, а 3 – нестійка.

***

Якщо ЛФЧХ має кілька точок перетинання з рівнем $-\pi$ до частоти ω_{c}, то для стійкості замкнутої системи потрібно, щоб число цих перетинань було парним (див. рис. 5.10).

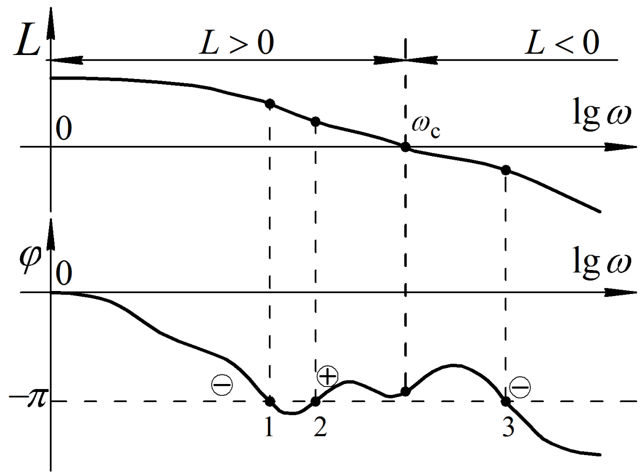


Рис. 5.10

5.4. Порівняльна оцінка критеріїв стійкості

З погляду практичного використання розглянуті критерії не є рівноцінними. Критерії Найквіста і Михайлова застосовуються, головним чином, у тих випадках, коли рівняння складових ланок відомі не всі, але можна одержати їх експериментальні частотні характеристики. Цими критеріями можна користуватися також при теоретичних розрахунках. Обчислення АФЧХ для критерію Найквіста складніше, ніж обчислення кривої Михайлова, Крім того, розташування АФЧХ ще не дає прямої відповіді на запитання, стійка або нестійка система, а вимагає додаткових досліджень, зокрема, з'ясування факту стійкості в розімкнутому стані.

Критерій Михайлова є досить ефективним і застосовується для систем будь-якого порядку.

Застосовуючи частотні критерії, характеристичні криві можна будувати поступово з урахуванням впливу кожної ланки, що надає цим критеріям наочність і дозволяє успішно вирішувати завдання вибору параметрів системи з умов стійкості.

Критерій Гурвіца дозволяє одержати тільки якісні судження про характер протікання процесу керування, тобто встановити, стійкий він або не-стійкий. На запитання, як швидко процес загасає, він відповіді не дає.

Крім того, критерій Гурвіца можна застосовувати тільки в тих випадках, коли задане рівняння системи в цілому, причому порядок цього рівняння невеликий. При $n > 5$ аналіз впливу коефіцієнтів на визначник Гурвіца різко ускладнюється.

Оцінка впливу на стійкість параметрів тієї чи іншої ланки в цьому випадку вимагає додаткових досліджень.

5.5. Запаси стійкості

Визначення факту стійкості за рівняннями першого наближення не дає повної впевненості в тому, що практично створена система буде стійкою при всіх можливих значеннях параметрів. Тому в ТАУ поступають так само, як у будь-якій іншій інженерній дисципліні - виконують розрахунки за наближеними рівняннями з урахуванням поправочних коефіцієнтів (запасів стійкості).

Необхідність введення запасів стійкості обгрунтовується наступними обставинами:

1) при складанні вихідних рівнянь ураховують лише основні закони механіки, електротехніки, теплотехніки і відкидаються другорядні фактори;

2) вихідні рівняння лінеаризують;

3) конструктивні параметри, через які виражаються постійні часу і коефіцієнти передачі ланок, звичайно визначають з похибками як у теорії, так і при експерименті;

4) розрахунок ведуть при типових умовах.

У дійсності потрібно врахувати статистичний характер зміни зовнішніх умов і розкид параметрів у різних зразків системи.

Запас стійкості може бути виражений різними способами залежно від того, який критерій прийнято в основу розрахунку.

При використанні критерію Найквіста запас стійкості можна оцінити за ступенем віддалення АФЧХ розімкнутої системи $W_{\text{рк}}(j\omega)$ від точки $[-1 ; j0]$. Це віддалення характеризується двома величинами: запасом стійкості за модулем і запасом стійкості за фазою.

Запасом стійкості за модулем при АФЧХ називають мінімальний відрізок дійсної осі h, що характеризує відстань між критичною точкою і найближчою точкою перетинання годографа $W_{\text{рк}}(j\omega)$ з дійсною віссю (мал. 5.11,а).

У випадку *клювоподібної* АФЧХ запас стійкості за модулем визначається величинами двох відрізків дійсної осі - h_1 і h_2 між критичною точкою $[-1 ; j0]$ і АФЧХ (рис. 5.11,б).

Запасом стійкості за фазою називають мінімальний кут γ, утворений радіусом, що проходить через точку перетинання годографа $W_{\text{рк}}(j\omega)$ з околом одиничного радіуса із центром в початку координат і негативною частиною дійсної осі.

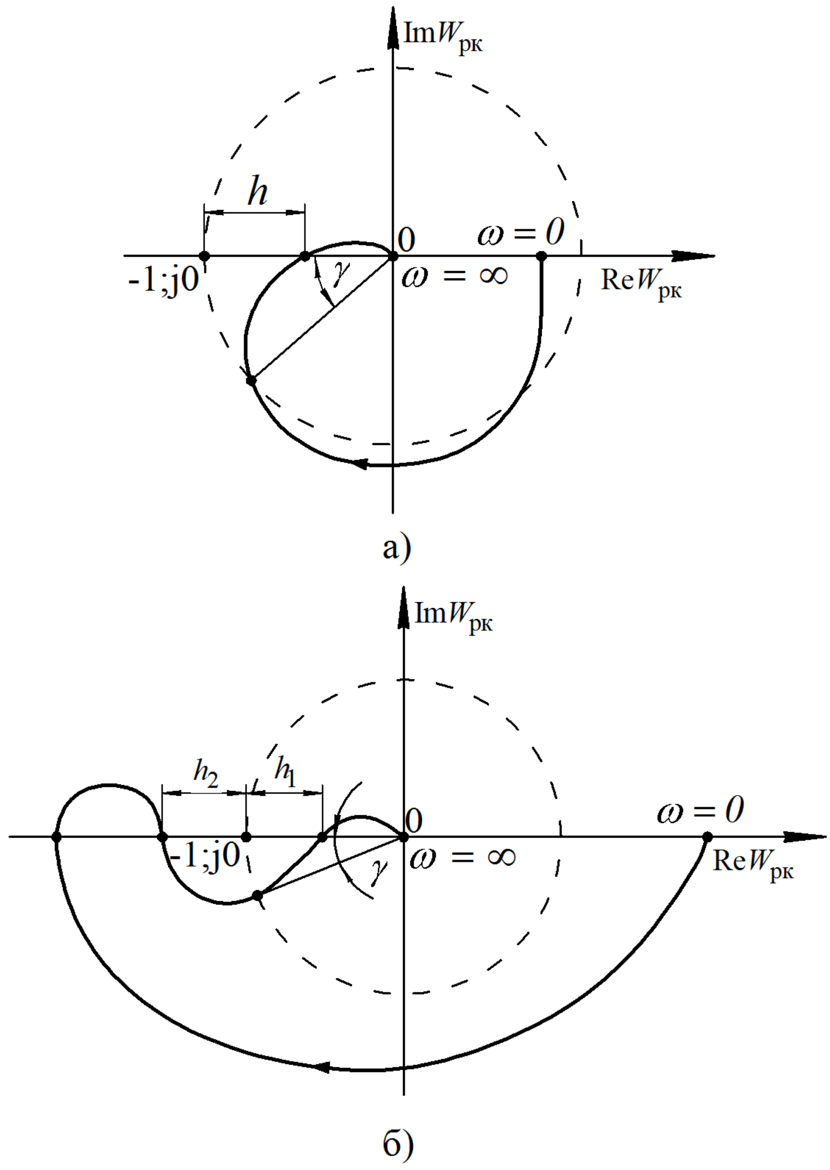


Рис. 5.11

Щоб система мала необхідний запас стійкості при заданих величинах h і γ, біля критичної точки $[-1\,;\,j0\,]$ зображують деяку заборонну область у вигляді сектора, обмеженого величинами $\pm h$ і $\pm\gamma$, в яку АФЧХ не повинна заходити (рис. 5.12).

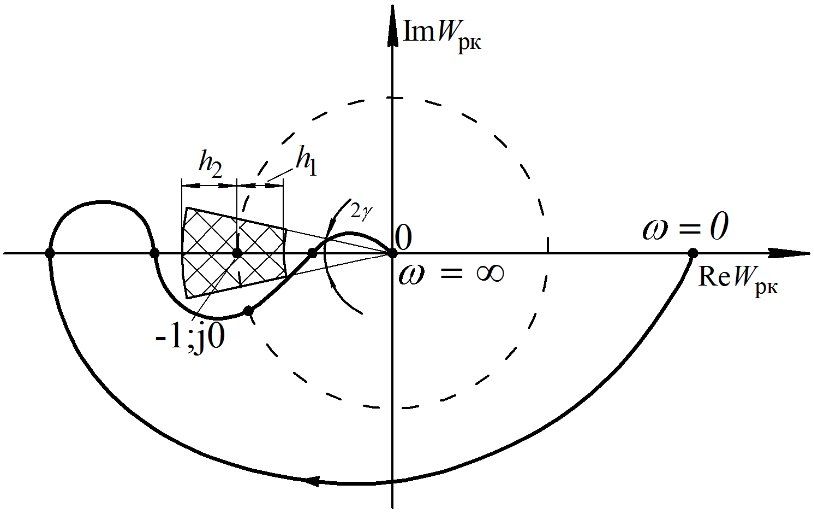


Рис. 5.12

У випадку застосування для аналізу стійкості логарифмічних частотних характеристик запасу стійкості системи за модулем відповідають відрізки $l_i = 20\lg h_i$ (див. рис. 5.13) при тому значенні частоти, при якому фазова характеристика $\varphi(\omega) = -\pi$.

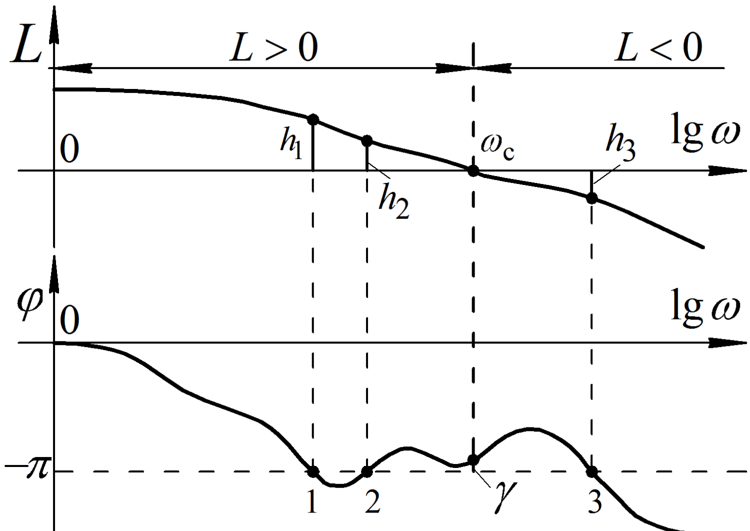


Рис. 5.13- Запаси стійкості за логарифмічними частотними характеристиками

Запасу стійкості системи за фазою відповідає значення кута, що представляє перевищення фазової характеристики над рівнем $-\pi$ при частоті зрізу ω_c.

Приклад 5.6. Перевірити стійкість САК за допомогою критерію Найквіста при наступних параметрах об'єкта керування і І-регулятора: $k_о = 0,26$, $T_о = 0,1\ c$, $\xi = 0,45$, $k_и = 20$.

Вирішення.

Запишемо частотну функцію розімкнутого контура системи $W_р(j\omega)$ в алгебраїчному вигляді:

$$W_р(j\omega) = W_о(s)\cdot W_и(s) = \frac{k_о}{T_о^2 s^2 + 2T_о\xi s + 1}\cdot\frac{k_и}{s}\Bigg|_{s=j\omega} = \frac{k_о k_р}{T_о^2(j\omega)^3 + 2T_о\xi(j\omega)^2 + j\omega} =$$

$$= \frac{-0,47}{0.0081\omega^2 + (1-0,01\omega^2)^2} - j\frac{5,2(1-0,01\omega^2)}{0.0081\omega^3 + \omega(1-0,01\omega^2)^2} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Отримана залежність дозволяє побудувати годограф $W_р(j\omega)$ (рис. 5.13).

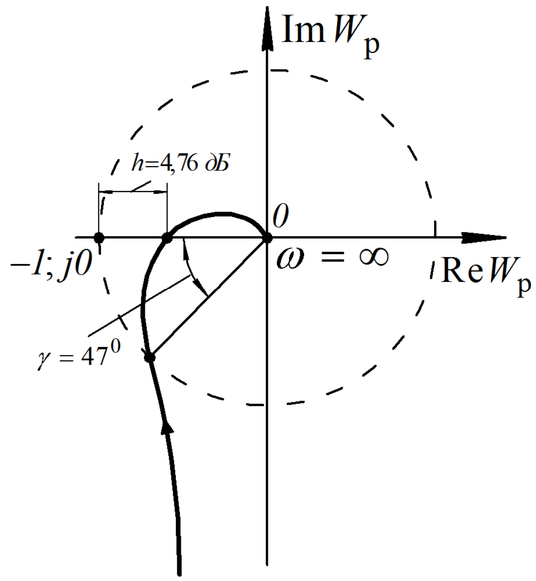


Рис. 5.13

Як видно з рисунка годограф $W_р(j\omega)$ не охоплює точку $[-1\ ;\ j0\ ]$, перетинаючи вісь абсцис у точці $[0,58;\ j0\ ]$, що свідчить про достатні запаси стійкості: $\gamma = 47^0$ і $h = 4,76\ \ дБ$.

***

5.6. Вплив величини передаточного коефіцієнта розімкнутого контуру САК на її стійкість у замкнутому стані

Раніше вказувалося, що передаточну функцію розімкнутого контуру САК можна подати у вигляді

$$W_{\text{рк}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k_{\text{рк}} \frac{W^*_{\text{рк}}(s)}{s^r},$$

де $\lim\limits_{s \to 0} W^*_{\text{рк}}(s) = 1$; r - кількість нульових коренів полінома $A(s)$.

Замінивши s на $j\omega$, одержимо частотну передаточну функцію цього контуру:

$$W_{\text{рк}}(j\omega) = k_{\text{рк}} \frac{W^*_{\text{рк}}(j\omega)}{(j\omega)^r}$$

З останнього співвідношення видно, що модуль вектора $W_{\text{рк}}(j\omega)$, а значить і його довжина пропорційні величині коефіцієнта $k_{\text{рк}}$. Значення $k_{\text{рк}} = k_{\text{кр}}$, при якому АФЧХ проходить через критичну точку [-1 ; $j0$], називають граничним, або *критичним*.

У більшості систем збільшення передатного коефіцієнта $k_{\text{рк}}$ вище його критичного значення $k_{\text{кр}}$ приводить до порушення стійкості, а його зменшення нижче критичного значення - до стабілізації системи. У системах із клювоподібними характеристиками при збільшенні передатного коефіцієнта вище його критичного значення система може перетворитися з нестійкої в стійку, а при зменшенні - зі стійкої в нестійку.

Значення $k_{\text{кр}}$, у свою чергу, визначається іншими параметрами системи. Розглянемо, наприклад, статичну систему, що складається з трьох аперіодичних ланок 1-го порядку з передатними коефіцієнтами k_1, k_2, k_3 і постійними часу T_1, T_2, T_3.

Характеристичне рівняння цієї системи в замкнутому стані має вигляд

$$(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)+k_1 k_2 k_3 = 0 \cdot$$

Після перетворень одержимо:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

де $a_0 = T_1 T_2 T_3$; $a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$; $a_2 = T_1 + T_2 + T_3$; $a_3 = 1 + k_1 k_2 k_3 = 1 + k$.

Відповідно до критерію Гурвіца система перебуватиме на межі стійкості при $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$.

Вирішивши це рівняння відносно $k = k_{\text{кр}}$, остаточно одержимо:

$$k_{\text{кр}} = 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}$$

З останнього виразу видно, що величина $k_{\text{кр}}$ тим більша, чим більша різниця між двома найбільш відмінними постійними часу.

Наведене правило справедливе для систем будь-якого порядку і може бути сформульоване в загальному випадку у вигляді: *граничне значення передатного коефіцієнта розімкнутого контуру системи залежить від співвідношення постійних часу окремих ланок і не залежить від їхніх абсолютних значень.*

Контрольні питання

1. Поясніть поняття "стійкість САК".
2. Що значить "стійкість у малому" і "стійкість у великому"?
3. Чому при дослідженні стійкості САК досить знати тільки однорідне дифференційне рівняння?
4. У чому полягають недоліки аналізу стійкості за коренями характеристичного рівняння?
5. Перелічіть критерії стійкості і укажіть їхні особливості.
6. Що таке годограф Михайлова?
7. Що таке граничний передаточний коефіцієнт?
8. Як зв'язане розташування коренів характеристичного рівняння зі стійкістю системи?