

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія технічного обслуговування авіаційної техніки**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

**з навчальної дисципліни «Основи теорії автоматичного регулювання»  
обов'язкових компонент освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів**

**за темою – Якість САК.**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 23.09.2021 № 8

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського наці-  
онального університету внутрішніх  
справ  
Протокол від 22.09.2021 № 2

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією Науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 22.09.2021 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, протокол від 30.08.2021 № 1

**Розробник:** старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист, Владов С.І.

**Рецензенти:**

1. Доцент кафедри автомобілів і тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Павленко О.В.
2. Викладач циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

### **План лекції**

1. Точність роботи САК у сталих режимах (Метод коефіцієнтів помилок).
2. Точність роботи САК в перехідних режимах.

### **Рекомендована література:**

#### **Основна**

1. Абраменко І. Г., Абраменко Д. І. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2008. 178 с.
2. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник ; 2-ге вид., перероб. і дор. Київ : Либідь, 2007. 656 с.
3. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Харків : ХНАМГ, 2006. 187 с.

#### **Допоміжна**

4. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування : підручник. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет. 2003. 250 с.
5. Гоголюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2009. 280 с.
6. Асланян А. Е., Зіатдінов Ю. К., Барабаш О. В., Бельська О. А. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ: Національний авіаційний університет, 2015. 532 с.

## □ □ ТЕКСТ □ ЛЕКЦІЇ

Метою функціонування будь-якої САК є зміна вихідної величини  $y(t)$  у певній відповідності із законом зміни задаючого впливу  $y_3(t)$ , що найчастіше визначається співвідношенням  $y(t) = y_3(t)$ .

Крім забезпечення вимоги стійкості САК повинна мати певну якість, під яким розуміється *точність процесу керування*. Кількісною оцінкою точності служить величина *похибки*  $\delta(t)$ , обумовлена різницею між заданим і фактичним значеннями керованої величини:

$$\delta(t) = y_3(t) - y(t). \quad (6.1)$$

При цьому розрізняють дві функції САУ:

- відтворення задаючого впливу;
- придушення (компенсація) збурювань.

Через інерційність систем обидві перераховані функції завжди виконуються з деякою похибкою, тобто звичайно  $\delta(t) \neq 0$ . Миттєві значення похибки не можуть бути визначені апріорі на стадії проектування, тому що під час роботи САК впливи змінюються випадковим, невідомим заздалегідь чином. Тому якість роботи САК доводиться оцінювати за допомогою певних показників (критеріїв якості), які характеризують точність процесу керування роздільно в сталому і перехідному типовому режимах і мають кількісну міру.

### 6.1. Точність роботи САК у сталих режимах

Розглянемо узагальнену одноконтурну систему на рис. 6.1.

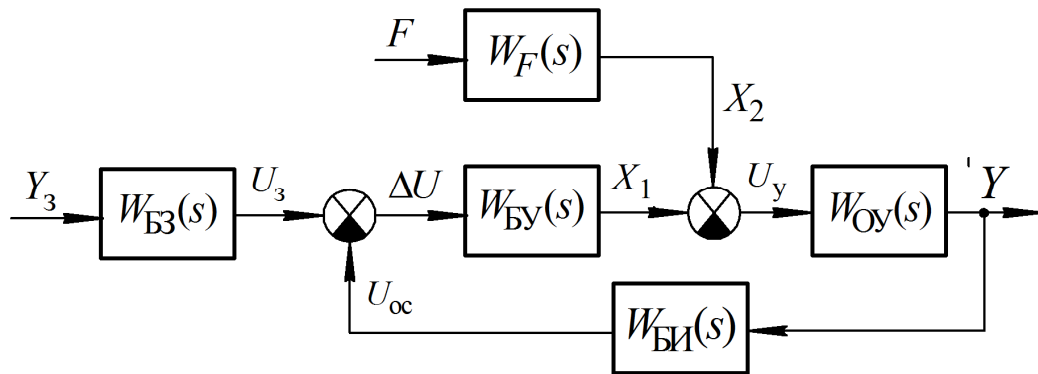


Рис. 6.1

Перетворимо її до вигляду з одиничним зворотним зв'язком:

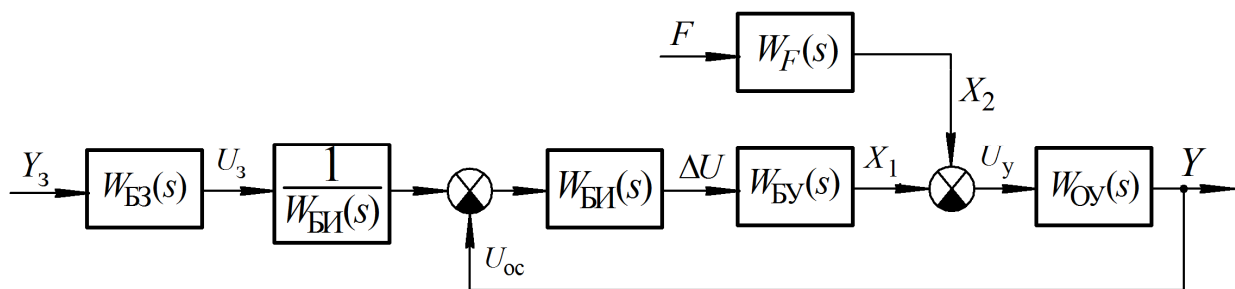


Рис. 6.2

У реальних системах з метою узгодження сигналів  $u_3(t)$  і  $u_{oc}(t)$  передаточні функції  $W_{БЗ}(s)$  і  $W_{БИ}(s)$  підбирають однаковими, тобто  $W_{БЗ}(s) = W_{БИ}(s)$ . Тоді структурна схема системи набуде вигляду :

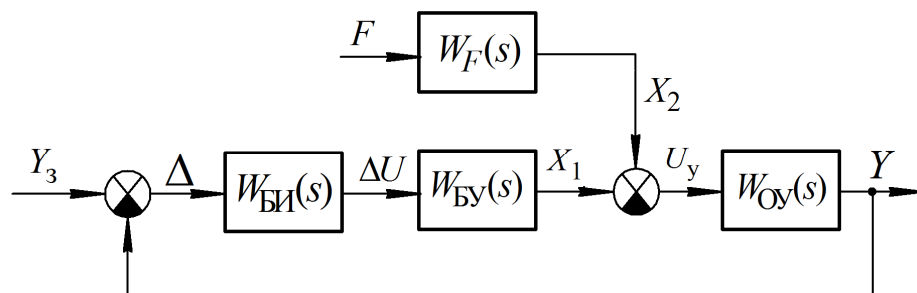


Рис. 6.3

В отриманій схемі безпосередньо фігурує помилка системи  $\delta(t)$ , що виміряється в тих же одиницях, що й величини  $y_3(t)$  і  $y(t)$ .

Відзначимо, що відповідно до останньої структурної схеми зображення похибки  $\Delta(s)$  пов'язане із зображенням сигналу неузгодженості  $\Delta U(s)$  простим співвідношенням вигляду

$$\Delta U(s) = \Delta(s) \cdot W_{\text{БИ}}(s).$$

Величина  $\delta(t)$ , виходячи з принципу суперпозиції, може розглядатися у вигляді суми двох складових, обумовлених дією задаючого і збурюючого впливів, тобто

$$\delta(t) = \delta_{y_3}(t) + \delta_f(t).$$

Визначимо відповідні передаточні функції:

$$W_{\delta, y_3}(s) = \frac{\Delta_{Y_3}(s)}{Y_3(s)} = \frac{1}{1 + W_{\text{БИ}}(s) \cdot W_{\text{БУ}}(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s)} = \frac{1}{1 + W_{\text{рк}}(s)};$$

$$W_{\delta, f}(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \frac{W_F(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s)}{1 + W_{\text{БИ}}(s) \cdot W_{\text{БУ}}(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s)} = \frac{W_F(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s)}{1 + W_{\text{рк}}(s)},$$

де  $W_{\text{рк}}(s) = W_{\text{БИ}}(s) \cdot W_{\text{БУ}}(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s)$  - передаточна функція розімкнутого контуру.

Тоді можемо записати:

$$\Delta(s) = Y_3(s) \cdot \frac{1}{1 + W_{\text{рк}}(s)} + F(s) \cdot \frac{W_F(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s)}{1 + W_{\text{рк}}(s)}. \quad (6.2)$$

Таким чином, величина похибки  $\Delta(s)$  визначається як властивостями системи, так і виглядом вхідних впливів. Для оцінки сталих режимів САУ використовують наступні типові закони зміни вхідних впливів:

- незмінність задаючого і збурюючого впливів, тобто  $y_3(t) = \text{const}$  і  $f(t) = \text{const}$ ;
- рух системи з постійною швидкістю, тобто  $y_3(t) = a \cdot t$  і  $f(t) = \text{const}$ ;

- рух системи з постійним прискоренням, тобто  $y_3(t) = b \cdot \frac{t^2}{2}$  і

$$f(t) = \text{const};$$

- рух системи за гармонійним законом, тобто  $y_3(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$  і

$$f(t) = \text{const}.$$

Для першого випадку, скориставшись теоремою про кінцеве значення оригіналу операційного вираховування при  $y_3(t) = y_0 = \text{const}$  і  $f(t) = f_0 = \text{const}$ , з (6.2) одержимо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot \Delta(s)) = y_0 \cdot \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} W_{\text{рк}}(s)} + f_0 \cdot \frac{\lim_{s \rightarrow 0} (W_F(s) \cdot W_{\text{ОУ}}(s))}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} W_{\text{рк}}(s)}. \quad (6.3)$$

У передаточну функцію розімкнутого контуру  $W_{\text{рк}}(s)$  можуть входити як статичні ланки, що мають передаточні функції вигляду  $W_i(s) = k_i \cdot W_i^*(s)$ , де  $\lim_{s \rightarrow 0} W_i^*(s) = 1$ , так і астатичні ланки з передаточними функціями вигляду  $W_i(s) = \frac{k_i \cdot W_i^*(s)}{s^r}$ . Тоді складова сталої похибки, викликана дією задаючого впливу в (6.3) існуватиме тільки у випадку наявності у  $W_{\text{рк}}(s)$  винятково статичних ланок.

Складова ж, викликана дією збурювання, існує як у випадку статичних, так і астатичних ланок. Щоправда, при цьому всі астатичні ланки повинні розташовуватися між точкою додатка збурювання  $f$  і керованою величиною  $y$  (у нашому випадку ця ділянка відповідає  $W_{\text{ОУ}}(s)$ ).

Тоді (6.3) при наявності обох складових набуває вигляду :

$$d(\Gamma) = y_0 \frac{1}{1 + k_{\text{рк}}} + f_0 \frac{k_f \cdot k_{\text{ОУ}}}{1 + k_{\text{рк}}}. \quad (6.4)$$

Оскільки величина  $\delta(\infty)$  при постійних значеннях вхідних впливів та кож є величиною постійною, її прийнято називати *статичною похибкою*.

З (6.4) випливає, що обидві складові статичної похибки тим більші, чим більші зовнішні впливи, і тим менші, чим більший знаменник  $(1 + k_{\text{рк}})$ .

САК, в яких при постійних вхідних впливах обидві складові похибки, або тільки складова  $\delta_f$ , не дорівнюють нулю, називають *статичними* або *статичними за збурюючим впливом*. Якщо ж обидві складові або складова  $\delta_y$  дорівнюють нулю, то систему називають *астатичною* або *астатичною за задаючим впливом*. У таких системах передаточна функція розімкнутого контуру завжди має вигляд

$$W_{\text{рк}}(s) = k_{\text{рк}} \frac{W_{\text{рк}}^*(s)}{s^r},$$

де  $\lim_{s \rightarrow 0} W_{\text{рк}}^*(s) = 1$ ;  $r$  - називається *порядком астатизму* системи.

Відмітимо, що система статична за завданням і астатична за збуренням неможлива.

Аналіз (6.4) показує, що точність статичної системи тим краща, чим більше коефіцієнт передачі розімкнутого контуру  $k_{\text{рк}}$ .

Графічно залежність (6.4) можна зобразити статичною характеристикою  $\delta(\infty) = f(f_0)$  при  $y_3(t) = y_0 = \text{const}$ . Якщо  $k_f < 0$  то вона має вигляд, наведений на рис. 6.4:

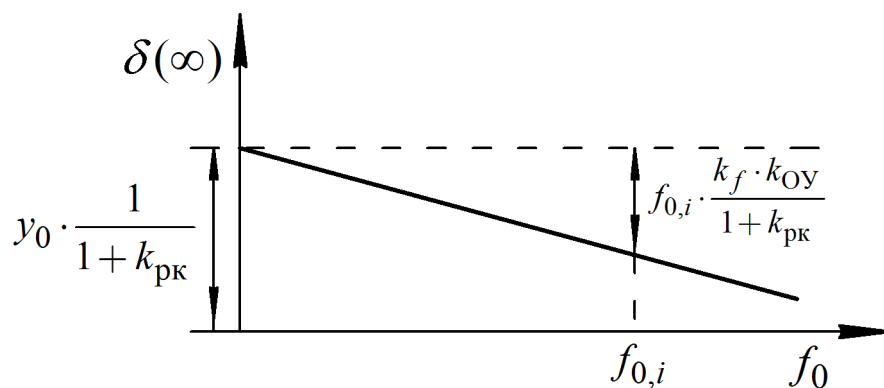


Рис. 6.4



Точність статичних систем у сталому режимі прийнято оцінювати також величинами *статизму* і *коефіцієнта статизму*.

Статизмом системи називається величина відносної статичної похибки при зміні збудження від 0 до номінального значення  $f_{0,\text{ном}}$  і  $y_0 = \text{const}$ , обумовлена співвідношенням

$$S = \frac{d(y_0, f_{0,\text{ном}})}{y_0} \cdot 100, \%,$$

Коефіцієнтом статизму називається відношення складової статичної похибки  $\delta_{f,3}$ , викликаної дією збудження в замкнутій САК, до аналогічної складової  $\delta_{f,p}$  в розімкнутій САК при однаковій величині  $f = f_0$ , тобто

$$s = \frac{d_{f,3}}{d_{f,p}} \cdot 100, \%. \quad (6.5)$$

Цей коефіцієнт показує, в скільки разів відхилення вихідної величини керованого об'єкта менше відхилення цієї ж величини некерованого об'єкта при тому самому значенні збурюючого впливу.

Відповідно до структурної схеми  $\delta_{f,p} = f_0 \cdot k_f \cdot k_{\text{ОУ}}$ , а згідно із співвідношенням (6.4)  $\delta_{f,3} = f_0 \cdot \frac{k_f \cdot k_{\text{ОУ}}}{1 + k_{\text{РК}}}$ .

Тоді коефіцієнт статизму

$$s = \frac{1}{1 + k_{\text{РК}}} \quad (6.6)$$

Точність статичної системи вважається задовільною, якщо коефіцієнт  $s = 0,1 \div 0,01$ . Отже загальний передаточний коефіцієнт розімкнутого контуру статичної системи повинен перебувати в діапазоні  $k_{\text{РК}} = 10 \div 100$ .

**Приклад 6.1.** Визначити помилку системи, структура якої наведена на

рис. 6.2, при:  $y_3(t) = y_0 = \text{const}$ ;  $f(t) = f_0 = \text{const}$ ;  $W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$ ;

$$W_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}; \quad W_3(s) = k_3.$$

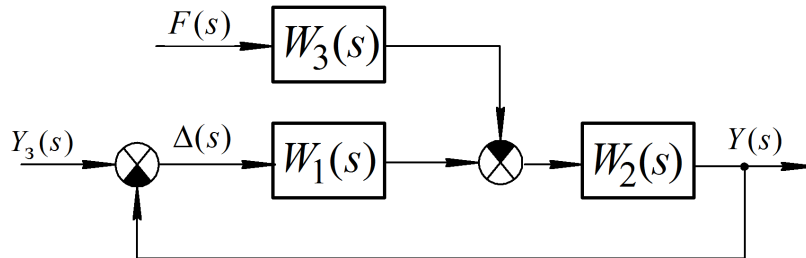


Рис. 6.5

**Вирішення.**

Маємо:

$$W_{\delta, y_3}(s) = \frac{\Delta_{y_3}(s)}{Y_3(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1}{(T_1 s + 1)} \cdot \frac{k_1}{s(T_2 s + 1)}} = \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 k_2};$$

$$W_{\delta, f}(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \frac{W_3(s)W_2(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)} = \frac{k_3 k_2 (T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 k_2}.$$

Тоді остаточно одержимо:

$$\delta(\infty) = y_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} W_{\delta, y_3}(s) + f_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} W_{\delta, f}(s) = y_0 \cdot 0 + f_0 \cdot \frac{k_3}{k_1} = f_0 \cdot \frac{k_3}{k_1} \square$$

Отже система є астатичною по задаючому впливу і статичною по збурюючому.

\*\*\*

**Приклад 6.2.** Визначити помилку системи для умов попереднього прикладу, але при  $W_1(s) = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}$  і  $W_2(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$ .

**Вирішення.**

Маємо:

$$W_{\delta, y_3}(s) = \frac{\Delta_{y_3}(s)}{Y_3(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1}{(T_1 s + 1)} \cdot \frac{k_1}{s(T_2 s + 1)}} = \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 k_2};$$

$$W_{\delta, f}(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \frac{W_3(s)W_2(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)} = \frac{k_3 k_2 s(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 k_2}.$$

Тоді

$$\mathcal{D}(\infty) = y_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} W_{\delta, y_3}(s) + f_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} W_{\delta, f}(s) = y_0 \cdot 0 + f_0 \cdot 0 = 0,$$

тобто система є астатичною по обох вхідних впливах.

\*\*\*

### 6.1.1. Метод коефіцієнтів помилок

Аналіз точності роботи САК в більш складних сталих режимах зручно робити на основі методу коефіцієнтів помилок. Цей метод ґрунтується на наближеній заміні передаточної функції біля точки  $s_0 = 0$  рядом Маклорена (частковим варіантом ряду Тейлора при  $s_0 = 0$ ), тобто:

$$W_{\delta, u}(s) \approx W_{\delta, u}(s) \Big|_{s=0} + \frac{dW_{\delta, u}(s)}{ds} \Big|_{s=0} s + \frac{1}{2!} \frac{d^2 W_{\delta, u}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} s^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 W_{\delta, u}(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} s^3 \dots$$

Позначимо:

$$W_{\delta, u}(s) \Big|_{s=0} = C_{0,u}; \quad \frac{dW_{\delta, u}(s)}{ds} \Big|_{s=0} = C_{1,u}; \quad \frac{1}{2!} \frac{d^2 W_{\delta, u}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = C_{2,u};$$

$$\frac{1}{3!} \frac{d^3 W_{\delta, u}(s)}{ds^3} \Big|_{s=0} = C_{3,u}.$$

Тоді зображення складової похибки  $\Delta_u(s)$  можна подати у вигляді

$$\Delta_u(s) = U(s) \cdot W_{\delta, u}(s) = U(s) \left( C_{0,u} + C_{1,u} s + \frac{1}{2!} C_{2,u} s^2 + \frac{1}{3!} C_{3,u} s^3 + \dots \right),$$

або, перейшовши до оригіналів, у вигляді

$$\delta_u(\infty) = C_{0,u}u(t) + C_{1,u} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{2!}C_{2,u} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{3!}C_{3,u} \frac{d^3u(t)}{dt^3} + \dots \quad (6.7)$$

Підкреслимо, що останнє співвідношення справедливе тільки при  $t \rightarrow \infty$ .

Коефіцієнт  $C_{0,u}$  називають *коефіцієнтом статичної похибки*;  $C_{1,u}$  - *коефіцієнтом швидкісної похибки*;  $C_{2,u}$  - *коефіцієнтом похибки від прискорення*;  $C_{3,u}$  - *коефіцієнтом похибки по першій похідній від прискорення* і т.д.

Конкретні значення коефіцієнтів помилок визначаються виглядом відповідних передатних функцій.

**Приклад 6.3.** Визначити похибку системи програмного керування, структурна схема якої наведена на рис. 6.6:

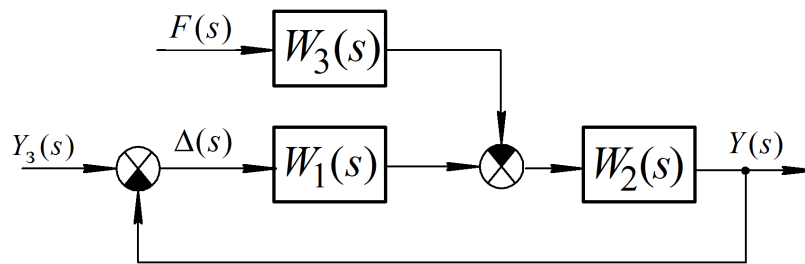


Рис. 6.6

Тут:  $y_3(t) = at$ ;  $f(t) = f_0 = \text{const}$ ;  $W_1(s) = k_1$ ;  $W_2(s) = \frac{k_2}{Ts + 1}$ ;

$$W_3(s) = k_f.$$

**Вирішення.**

Відповідно до схеми маємо:

$$W_{\delta, y_3}(s) = \frac{\Delta_{y_3}(s)}{Y_3(s)} = \frac{1}{1 + k_1 \cdot \frac{k_2}{Ts + 1}} = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + k_1 k_2};$$

$$W_{\delta, f}(s) = \frac{\Delta_f(s)}{F(s)} = \frac{\frac{k_f k_2}{Ts + 1}}{1 + k_1 \cdot \frac{k_2}{Ts + 1}} = \frac{k_f k_2}{Ts + 1 + k_1 k_2} \quad \square$$

З огляду на вигляд  $y_3(t)$ , маємо:  $\frac{dy_3(t)}{dt} = a$ ;  $\frac{d^2 y_3(t)}{dt^2} = \frac{d^3 y_3(t)}{dt^3} = \dots = 0$ .

Тоді коефіцієнти помилок будуть рівні<sup>\*)</sup>:

$$C_{0,y_3} = W_{\delta,y_3}(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{1+k_1k_2};$$

$$C_{1,y_3} = \frac{dW_{\delta,y_3}(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{T(Ts+1+k_1k_2) - T(Ts+1)}{(Ts+1+k_1k_2)^2} = \frac{T(1+k_1k_2) - T}{(1+k_1k_2)^2} = \frac{Tk_1k_2}{(1+k_1k_2)^2};$$

$$C_{0,f} = W_{\delta,f}(s) \Big|_{s=0} = \frac{k_f k_2}{1+k_1k_2} \quad \square$$

Скориставшись (6.7), остаточно одержимо:

$$\delta(\infty) = C_{0,y_3} y_3(t) + C_{1,y_3} \frac{dy_3(t)}{dt} + C_{0,f} f(t) = \frac{1}{1+k_1k_2} at + \frac{Tk_1k_2}{(1+k_1k_2)^2} a + \frac{k_f k_2}{1+k_1k_2} f_0 = \infty \quad \square$$

Отже система не придатна для програмного керування.

\*\*\*

**Приклад 6.4.** Визначити помилку системи програмного керування для умов приклада (6.3), але при  $W_1(s) = \frac{k_1}{s}$ .

**Вирішення.**

Маємо:

$$W_{\delta,y_3}(s) = \frac{\Delta_{y_3}(s)}{Y_3(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{k_2}{Ts+1}} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + k_1k_2} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2};$$

$$W_{\delta,f}(s) = \frac{\Delta_f(s)}{F(s)} = \frac{\frac{k_f k_2}{Ts+1}}{1 + \frac{k_1}{s} \cdot \frac{k_2}{Ts+1}} = \frac{k_f k_2 s}{s(Ts+1) + k_1k_2} = \frac{k_f k_2 s}{Ts^2 + s + k_1k_2} \quad \square$$

Коефіцієнти помилок:

$$C_{0,y_3} = W_{\delta,y_3}(s) \Big|_{s=0} = 0;$$

---

<sup>\*)</sup>  $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

$$C_{1,y_3} = \left. \frac{dW_{\delta,u}(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{(Ts^2 + s + k_1k_2)(2Ts + 1) - (Ts^2 + s)(2Ts + 1)}{(Ts^2 + s + k_1k_2)^2} = \frac{1}{k_1k_2};$$

$$C_{0,f} = W_{\delta,f}(s) \Big|_{s=0} = 0 \quad \square$$

Тоді

$$\delta(\infty) = C_{1,y_3} \frac{dy_3(t)}{dt} = \frac{1}{k_1k_2} a \quad \square$$

Система астатична і по  $y_3(t)$  і по  $f(t)$ , але має постійну сталу похибку за швидкістю зміни завдання (див. рис. 6.7):

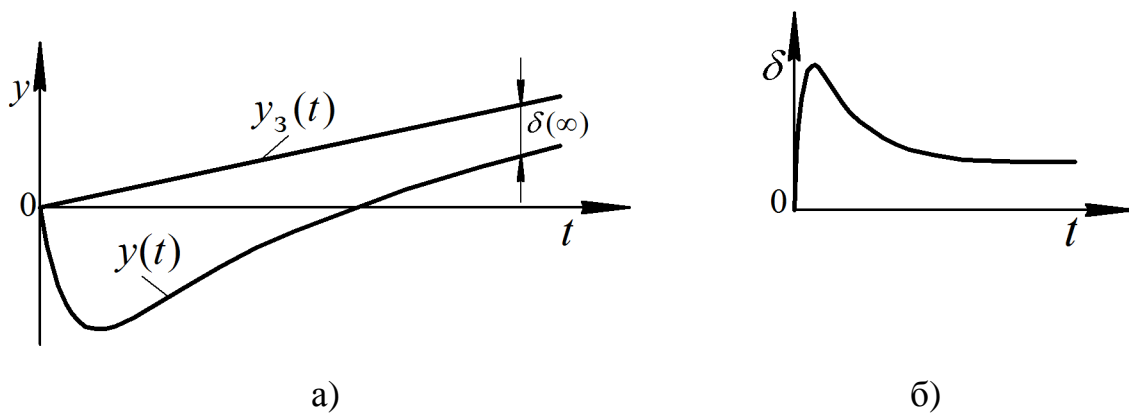


Рис. 6.7:

а) характер зміни  $y_3(t)$  і  $y(t)$ ;

б) характер зміни похибки  $\delta(\infty)$

## 6.2. Точність роботи САК в перехідних режимах

Точність роботи в перехідних режимах обумовлюється сукупністю окремих миттєвих значень похибки  $\delta(t)$ . З метою стандартизації показників якості в цьому разі прийнято використовувати перехідні характеристики по каналу завдання  $h_y(t)$  і каналу збудження  $h_f(t)$  при подачі на відповідні входи типових сигналів вигляду  $1(t)$ , які в узагальненому вигляді характеризують значення  $\delta(t)$ .

Показники якості, залежно від способу їхнього визначення, розділяються на прямі й непрямі. Спочатку розглянемо *прямі показники*, які визначаються безпосередньо за часовими характеристиками. При цьому може використовуватися як перехідна характеристика  $h(t)$  (звичайно по каналу задаючого впливу), так і імпульсна перехідна  $\omega(t)$  характеристика (по каналу збурювання).

При самій загальній оцінці якості насамперед звертають увагу на форму перехідного процесу. Розрізняють наступні типи перехідних процесів (див. рис. 6.8):

- коливальні (1);
- аперіодичні (2);
- монотонні (3).

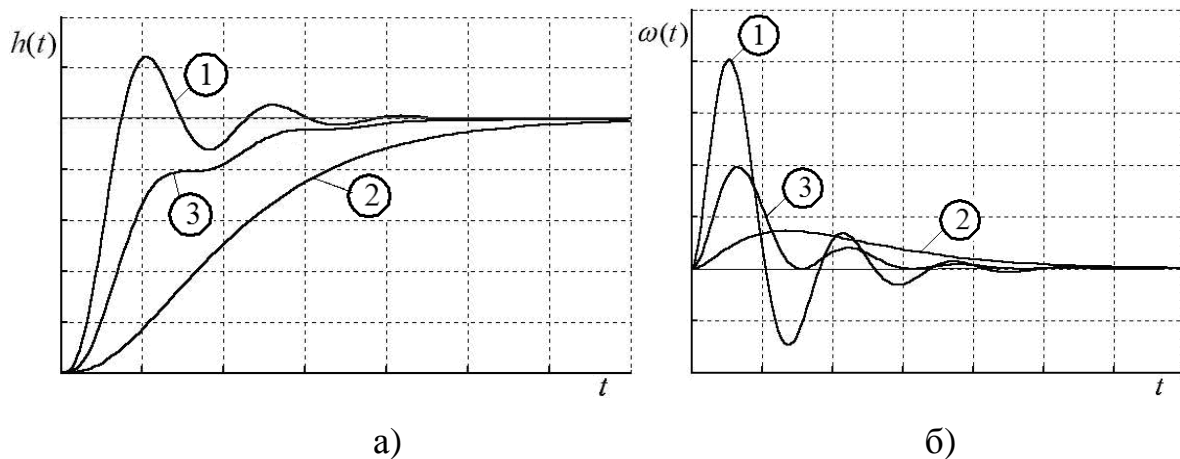


Рис. 6.8 - Типи перехідних процесів:

а) перехідні характеристики;

б) імпульсні перехідні характеристики

Найбільша кількість прямих показників введена для характеристики якості коливального процесу по каналу завдання. Тому визначення цих показників проведемо саме для такого процесу (див. рис. 6.9):

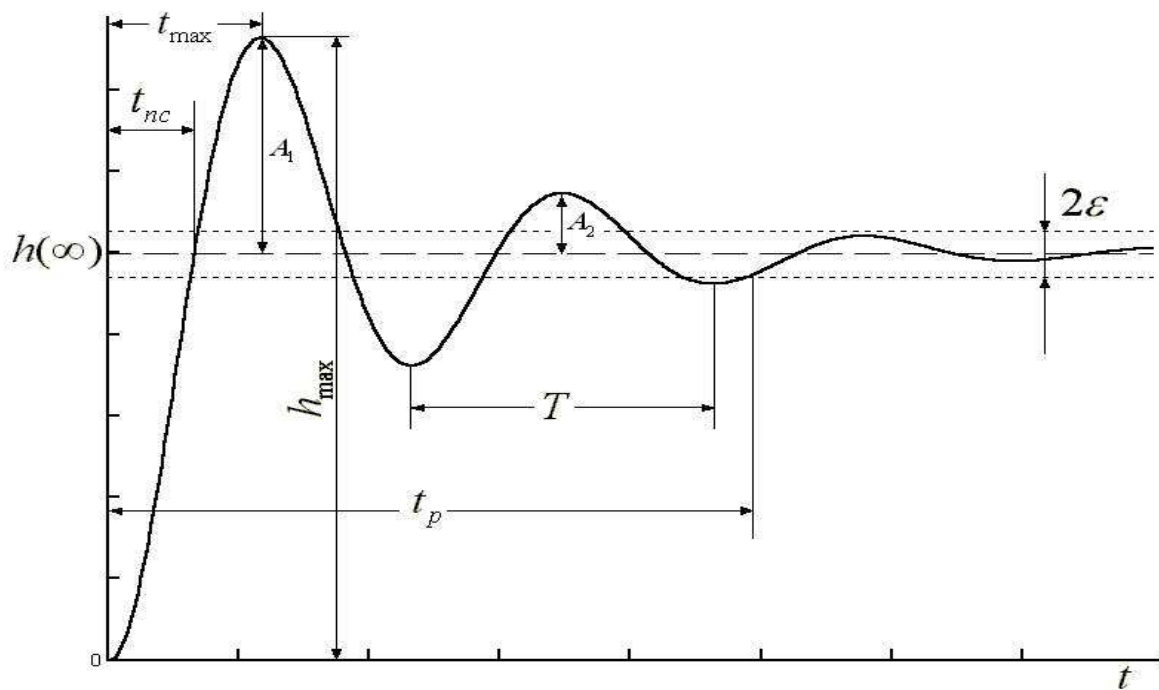


Рис. 6.9 - Характеристики якості коливального процесу по каналу завдання

До основних показників характеристики  $h(t)$  відносять перерегулювання  $\sigma$  і час регулювання  $t_p$ .

Перерегулювання  $\sigma$  визначається максимальним відхиленням керованої величини від її сталого значення  $h(\infty)$ , вираженим в % до  $h(\infty)$ :

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100 \% . \quad (6.8)$$

Звичайно,  $\sigma = 10 \div 30 \%$ , іноді  $\sigma < 10 \%$ , а іноді неприпустимо зовсім.

Час регулювання  $t_p$  – час, після закінчення якого відхилення характеристики  $h(t)$  від сталого значення  $h(\infty)$  стає і залишається менше зони нечутливості системи  $\delta = (0,01 \div 0,05)h(\infty)$ . Цей показник характеризує швидкість протікання перехідного процесу. Якщо крива перехідного процесу монотонна, то цей показник є єдиним.

Крім основних існує і ще ряд додаткових показників якості. До таких показників відносять:



- час першого узгодження перехідного процесу  $t_{\text{пс}}$  – час, після закінчення якого керована величина перший раз досягає свого сталого значення (також характеризує швидкість протікання процесу в початковий період);

- частоту коливань  $\omega = 2\pi/T$ , де  $T$  - період коливань;

- число коливань  $n_k$  за час регулювання  $t_p$  (звичайно  $n_k = 1 \div 2$ , іноді  $3 \div 4$ , а іноді і зовсім неприпустимо);

- ступінь загасання  $\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1}$ , рівний відношенню різниці двох суміжних амплітуд до першої з них (інтенсивність загасання вважається задовільною, якщо  $\psi = 0,75 \div 0,95$  ;

- час досягнення першого максимуму  $t_{\text{max}}$  .

Система має необхідну якість, якщо задовольняє заданим показникам якості, а перехідний процес не виходить з області припустимих значень (див. рис. 6.10).

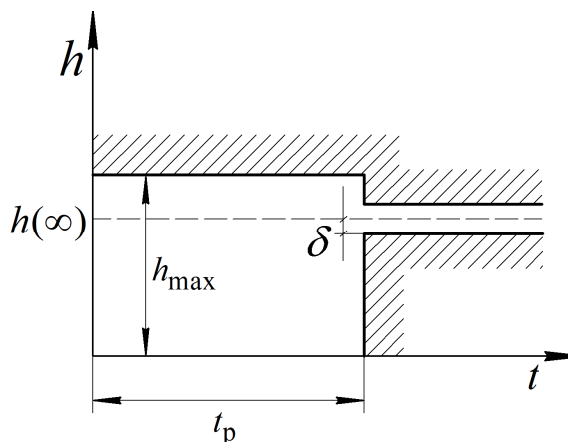


Рис. 6.10 - Область припустимих значень перехідного процесу

У випадку оцінки якості процесів керування по каналу збурюючого впливу можуть використовуватися всі перераховані показники за винятком перерегулювання. Цей показник можна замінити безпосередньо максимальним значенням  $h_{f,\text{max}}$  :

Непрямі показники якості визначаються без побудови перехідних процесів і підрозділяються на кілька груп:

- кореневі показники;
- частотні показники;
- інтегральні показники.

### ***Кореневі показники***

Характер перехідних процесів САК по певному входу повністю визначається відповідною передаточною функцією  $W(s)$ . Якщо чисельник цієї функції не має нулів, тобто являє собою постійну величину, то відповідно до формули розкладання Хевісайда особливості перехідної характеристики можна оцінити по полюсах  $W(s)$ , тобто по коренях характеристичного рівняння системи  $A(s)$ . Для цього на комплексній площині виділяється область, у якій розташовуються всі корені рівняння  $A(s) = 0$ . Звичайно ця область має форму трапеції (див. рис. 6.11).

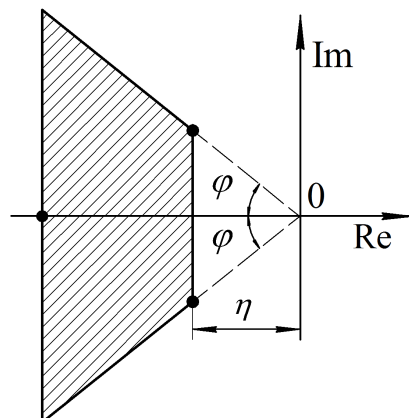


Рис. 6.11 - Область розташування коренів характеристичного рівняння системи

При цьому на сторонах і основах цієї трапеції розташовується хоча б по одному кореню.

Основний вплив на тривалість перехідних процесів роблять корені, розташовані ближче інших до мнімої осі, тому що вони дають найбільш повільно загасаючі складові. Дійсна частина такого кореня називається *ступенем стійкості*  $\alpha$ .

Складова, обумовлена ступенем стійкості, записується для випадку речовинного кореня  $p_i = -\alpha$  у вигляді

$$h_i = C_i e^{-\alpha t},$$

для випадку пари комплексно-сполучених коренів  $p_{j,j+1} = -\alpha \pm j\beta$  у вигляді

$$h_j = C_j e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Тоді, прийнявши  $\varepsilon = 0,05 \cdot h(\infty)$ , можна одержати залежність

$$t_p \leq \frac{1}{\alpha} |\ln \varepsilon|, \quad (6.9)$$

де знак рівності ставиться для випадку речовинного кореня.

Основний вплив на коливальні властивості перехідних процесів робить пара комплексно сполучених коренів, для яких відношення  $\beta/\alpha = \operatorname{tg} \varphi = \mu$  є найбільшим. Величину  $\mu$  називають *коливальністю* САУ. При збільшенні  $\mu$  зростає число коливань  $n_k$  і зростає перерегулювання  $\sigma$ .

За значенням коливальності  $\mu$  можна визначити наближене значення перерегулювання перехідної характеристики за умови розташування пари комплексно-сполучених коренів ближче інших до мнімої осі, скориставшись співвідношенням

$$\sigma \leq e^{-\pi / \mu}. \quad (6.10)$$

Остання оцінка є трохи завищеною і реальний процес може мати значно кращу якість.

**Приклад 6.4.** САК має передаточну функцію вигляду

$$W(s) = \frac{1}{0,0004 s^4 + 0,012 s^3 + 0,107 s^2 + 0,465 s + 1} \quad \square$$

Визначити наближені оцінки прямих показників якості.

### Вирішення.

Корені характеристичного рівняння САК мають вигляд  $p_{1,2} = -3 \pm j4$ ;  
 $p_3 = -8$ ;  $p_4 = -10$ .

Отже  $\alpha = 3$ ;  $\mu = 4/3 \approx 1,33$ .

Тоді  $t_p \leq \frac{1}{\alpha} |\ln \varepsilon| = \frac{1}{3} |\ln 0,05| \approx \frac{3}{3} = 1$  с;  $\sigma \leq e^{-\pi/1,33} \approx 9,4\%$ .

Дійсні значення показників становлять:  $t_p = 1,22$  с і  $\sigma = 6\%$ .

\*\*\*

На закінчення відмітимо, що можна показати, що в системі будь-якого порядку найбільш швидкий аперіодичний перехідний процес має місце, коли всі  $n$  коренів рівні між собою. Максимальна швидкодія системи досягається при невеликій коливальності ( $\sigma \leq 10\%$ ). Для цього всі комплексні корені (і один дійсний при  $n$  непарному) повинні розташовуватися на однаковій відстані  $\alpha$  від мнімої осі, а мнімі частини повинні утворювати арифметичну прогресію з різницею  $\Delta\beta = \beta_1$ . Причому, для кожного порядку рівняння існує оптимальне відношення  $\Delta\beta / \alpha$ : для 2-го порядку воно дорівнює 1; для 3-го – 1,45; 4-го – 0,79; 5-го – 1,5.

### Частотні показники

Частотні показники якості, розраховані за частотними характеристиками САК, одержали найбільше поширення на практиці. Це обумовлюється тим, що практично будь-який сигнал, що діє на систему, може бути представлений у вигляді суми гармонік (розкладений у ряд Фур'є). Тому, вивчивши проходження гармонійних сигналів через САУ в діапазоні частот від 0 до  $\infty$ , можна скласти уявлення про реакцію системи на довільний вхідний сигнал.

Про якість САК можна судити, скориставшись дійсною частиною функції  $W(j\omega)$ . Справа в тому, що у випадку одиничного східчастого впливу і нульових початкових умов між перехідною характеристикою і частотною передатною функцією системи існує однозначний зв'язок за допомогою перетворення Фур'є:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (6.11)$$

Таким чином, за властивостями речовинної частотної характеристики САК можна судити про перехідний процес. При цьому можна обійтися без побудови безпосередньо кривої перехідного процесу і використати частотні характеристики, розраховані за даними експериментів, а не по відповідному диференціальному рівнянню.

Використовуються наступні частотні показники якості.

1. *Показник коливальності*  $M$  - відношення максимального значення АЧХ системи до значення цієї АЧХ при  $\omega = 0$ , тобто

$$M = \frac{A_{\max}}{A(0)}. \quad (6.12)$$

Показник коливальності характеризує схильність системи до коливань. Чим вище  $M$ , тим сильніше коливальність системи а якість менша (а саме, збільшуються перерегулювання  $\sigma$  і час регулювання  $t_p$ ). Вважається припустимим, якщо  $1,1 \leq M \leq 1,5$ .

2. *Резонансна частота*  $\omega_p$  - частота, при якій АЧХ системи має екстремум. Гармонійні коливання, що мають частоту  $\omega = \omega_p$ , проходять через САУ з найбільшим посиленням.

Залежно від характеру АЧХ система може зовсім не мати резонансної частоти або мати кілька резонансних частот.

Резонансна частота разом з  $M$  визначає величину часу регулювання  $t_p$ .

3. *Смуга пропущення*  $\omega_{\Pi}$  - діапазон частот гармонійних коливань, які пропускаються системою, тобто проходять через систему із практично помітними коливаннями вихідної координати. Гармонійні коливання, частоти яких лежать поза смугою пропущення, через систему практично не проходять, тобто коливання вихідної змінної при цих частотах мають настільки малу амплітуду, що ними можна знехтувати.

Підкреслимо, що поняття смуги пропускання є чисто інженерним поняттям і не має строгого математичного визначення. Фізично будь-яка система пропускає коливання всіх частот. Звичайно смугою пропускання вважають діапазон частот, за межами якого АЧХ системи менше  $0,05 \div 0,1$ .

Ширина смуги пропускання характеризує швидкодію системи.

4. Частота зрізу  $\omega_c$  - частота, при якій АЧХ із ростом частоти зменшуючись, переходить від значень, більших одиниці, до значень, менших одиниці, і залишається в цьому діапазоні при подальшому збільшенні частоти.

Цей показник характеризує час регулювання  $t_p$ .

### ***Інтегральні показники***

Кожний з розглянутих вище прямих і непрямих показників якості характеризує лише одну яку-небудь властивість системи. При цьому зв'язок цих показників з параметрами пристрою регулювання має, як правило, складний суперечливий характер: зміна налаштувань приводить до поліпшення одних показників і погіршення інших. Тому існує необхідність у розробці деяких узагальнених показників якості. Такими показниками і є інтегральні показники.

У самому загальному вигляді всі інтегральні показники можна представити інтегралом вигляду

$$I = \int_0^{\infty} f(x) \cdot dt, \quad (6.13)$$

де  $f(x)$  - деяка функція змінних системи, що характеризують її стан.

При оцінці якості системи по каналу завдання найпростішим інтегральним показником є *лінійна інтегральна оцінка*, що використовує перехідну характеристику  $h(t)$  :

$$I_{\text{л}} = \int_0^{\infty} [h(\infty) - h(t)] \cdot dt, \quad (6.14)$$

яка дорівнює площі між прямою  $y = h(\infty)$  і кривою перехідного процесу  $h(t)$ .

Показник  $I_{\text{л}}$  враховує як величину поточних динамічних відхилень керованої координати, так і тривалість їхнього існування. Тому можна вважати, що чим менше  $I_{\text{л}}$ , тим краще якість процесу керування.

Позначимо  $h(\infty) = y_3 - \delta(\infty)$ , де  $\delta(\infty)$  - стала помилка системи.

Тоді маємо:

$$h(\infty) - h(t) = y_3 - \delta(\infty) - h(t) = y_3 - h(t) - \delta(\infty) = \delta(t) - \delta(\infty),$$

де  $\delta(t) = y_3 - h(t)$  і оцінку (6.14) можна подати у вигляді (див. рис. 6.12):

$$I_{\text{л}} = \int_0^{\infty} [\delta(t) - \delta(\infty)] \cdot dt \quad (6.15)$$

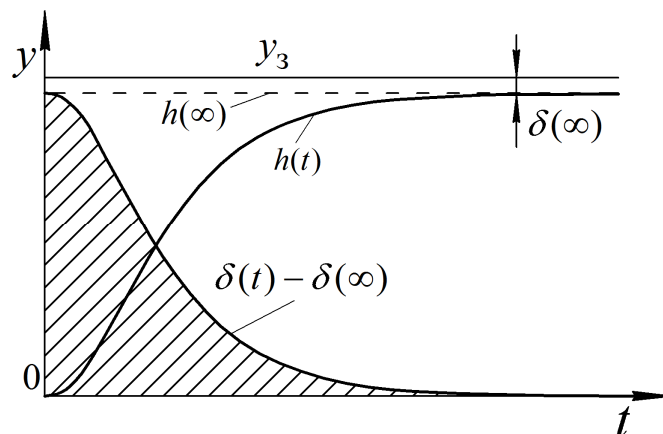


Рис. 6.12

При оцінці якості системи по каналу збурювання *лінійна інтегральна оцінка* використовує імпульсну перехідну характеристику  $w(t)$  :

$$I_{\text{л}} = \int_0^{\infty} [w(\infty) - w(t)] \cdot dt \quad (6.16)$$

Недоліком лінійних інтегральних оцінок є те, що вони придатні тільки для монотонних процесів. Якщо ж мають місце коливання, то алгебраїчне додавання площ може привести до ситуації, коли при більших коливаннях

$I_{\text{л}} = \min$ . З метою усунення цього недоліку на практиці найчастіше застосовують квадратичний інтегральний критерій вигляду

$$I_{\text{кв}} = \int_0^{\infty} \delta^2(t) dt. \quad (6.17)$$

Цей критерій не залежить від знаку  $\delta(t)$  і, отже, може бути застосований як для монотонних, так і для коливальних процесів.

Критерії  $I_{\text{л}}$  і  $I_{\text{кв}}$  є функціями параметрів системи, змінюючи які можна мінімізувати інтегральні оцінки.

Існують методи, що дозволяють обчислити критерій  $I_{\text{кв}}$ , не вирішуючи диференціальне рівняння системи. Зокрема, з огляду на те, що

$$|\delta(j\omega)|^2 = \delta(j\omega)\delta(-j\omega) \quad \text{і} \quad \delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \text{і проінтегрувавши}$$

$|\delta(j\omega)|^2$  по  $\omega$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(j\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t) dt = I_{\text{кв}}. \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \delta(j\omega) = \delta(s)|_{s=j\omega} = (W(0) - W(j\omega))/(j\omega) \quad \square$$

Оскільки частотна функція системи  $W(j\omega)$  залежить від параметрів системи (коефіцієнтів передачі  $k_i$  і постійних часу  $T_j$  динамічних ланок), можна записати  $I_{\text{кв}} = f(k_i, T_j)$ . Досліджуючи отриману залежність на екстремум, можна знайти значення змінюваних параметрів  $k_i$  і  $T_j$ , при яких задовольняється умова  $I_{\text{кв}} = \min$ .



Відмітимо, що мінімізація інтегральної квадратичної похибки вигляду (1.84) приводить до більших перерегулювань перехідного процесу (до 20 % від сталого значення  $y(\infty)$ ). У зв'язку з цим застосовують інтегральні критерії, що враховують не тільки величину похибки, але і швидкість її зміни

$$I_{\text{ск}} = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta^2(t) + \gamma^2 (\delta'(t))^2] dt, \quad (6.18)$$

де  $\gamma$  – ваговий коефіцієнт, що визначає значущість підінтегральної функції.

У цьому випадку крім обмеження на величину похибки  $\delta(t)$  накладається обмеження на швидкість її зміни  $\delta'(t)$ . У результаті чого ми одержуємо досить швидкі й плавні перехідні процеси.

Іноді крім зазначених обмежень ураховують і обмеження на прискорення. Тоді інтегральний критерій набуває вигляду :

$$I_{\text{ус}} = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta^2(t) + \gamma_1^2 (\delta'(t))^2 + \gamma_2^2 (\delta''(t))^2] dt. \quad (6.19)$$

Підкреслимо, що всі розглянуті інтегральні оцінки є функцією параметрів системи, отже, їх можна мінімізувати, змінюючи параметри системи і насамперед пристрою керування.

## Контрольні питання

1. Які властивості автоматичної системи прийнято розглядати при оцінці її якості?
2. Які ви знаєте прямі показники якості?
3. Що таке перерегулювання? Яку роль відіграє цей показник?
4. Як визначається величина часу регулювання?
5. Що таке частота зрізу? Що ця частота показує?
6. Як впливає передаточний коефіцієнт розімкнутого контуру на статичну і динамічну точність систем?
7. Укажіть характерні ознаки передатних функцій у статичній системі регулювання.
8. Яка система називається астатичною? Від наявності яких типових ланок у контурі системи залежить її астатизм?
9. За якою динамічною характеристикою системи регулювання оцінюють прямі показники якості? Які з них характеризують коливальність системи, а які її швидкодію?
10. Як зв'язане розташування коренів характеристичного рівняння з коливальністю системи?
11. Як зв'язаний найближчий дійсний корінь характеристичного рівняння з тривалістю перехідного процесу?
12. Як впливають параметри розімкнутого контуру на динамічні властивості замкнутої системи?
13. Які параметри графіка перехідного процесу враховуються інтегральними оцінками?
14. Який з двох перехідних процесів краще - з великою інтегральною оцінкою або малою? Чому?
15. Для яких перехідних процесів можна застосовувати лінійну інтегральну оцінку?
16. Чому для коливальних перехідних процесів доводиться застосовувати модульні або квадратичні оцінки?