

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія технічного обслуговування авіаційної техніки**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

**з навчальної дисципліни «Надійність авіаційної техніки»  
вибіркових компонент освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів**

**за темою – Математичні моделі надійності об'єктів.**

**Харків 2022**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2022 № 8

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського наці-  
онального університету внутрішніх  
справ  
Протокол від 22.08.2022 № 1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією Науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, протокол від 10.08.2022 № 1

**Розробник:** старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист, Владов С.І.

**Рецензенти:**

1. Завідувач кафедри транспортних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, доктор технічних наук, професор Мороз М.М.
2. Викладач циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

### **План лекції**

1. Загальні поняття про моделі надійності.
2. Нормальний закон розподілу наробітку до відмови.
3. Експоненціальний, логарифмічний, гамма-відсотковий та інші закони розподілу наробітку до відмови.
4. Моделі надійності відновлюваного об'єкта.
5. Розрахунок показників надійності.

### **Рекомендована література:**

#### **Основна**

1. Нечипоренко О. М. Основи надійності літальних апаратів : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2010. 240 с.
2. Міляєв Ю. П., Нечипоренко О. М. Основи надійності технічних систем : навчальний посібник. Київ : Видавн.-полігр. центр Акад. муніцип. управління, 2008. 246 с.
3. Канарчук В. Є., Полянський С. К., Дмитрієв М. М. Надійність машин : підручник. Київ : Либідь, 2003. 424 с.

#### **Допоміжна**

4. ДСТУ 2863-94. Надійність техніки. Програма забезпечення надійності. Загальні вимоги. Київ : Держстандарт України, 1995. 37 с.
5. ДСТУ 2864-94. Надійність техніки. Експериментальне оцінювання та контроль надійності. Основні положення. Київ: Держстандарт України, 1995. 30 с.
6. ДСТУ 3004-95. Надійність техніки. Методи оцінки показників надійності за експериментальними даними. Київ : Держстандарт України, 1995. 123 с.
7. ДСТУ 3433-96. Надійність техніки. Моделі відмов. Основні положення. Київ : Держстандарт України, 1998. 42 с.
8. ДСТУ 3524-97. Надійність техніки. Проектна оцінка надійності складних систем з урахуванням технічного і програмного забезпечення та оперативного персоналу. Основні положення. Київ : Держстандарт України, 1999. 21 с.
9. ДСТУ 3942-2000. Надійність техніки. Плани випробувань для контролю середнього наробітку до відмови (на відмову). Київ : Держстандарт України, 2000. 30 с.

## ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ

### 2.1. Загальні поняття про моделі надійності

Для розв'язання задач оцінювання надійності й прогнозування працездатності об'єкта потрібно мати математичну модель, яку можна подати аналітичними виразами одного з показників  $P(t)$ ,  $f(t)$  або  $\lambda(t)$ . Для отримання моделі потрібно провести випробування, обчислити статистичні оцінки та апроксимувати їх аналітичними функціями.

Під час виконання розрахунків надійності працюють не з самим технічним виробом, а з певним математичним об'єктом, що відображає найбільш істотні властивості реального виробу і називається математичною моделлю надійності. Оскільки відмови – це випадкові події, що виникають унаслідок несприятливого розвитку випадкових явищ, математична модель надійності виробу має бути **стохастичною**, що відображає з достатньою точністю закономірності появи відмов у реальному виробі.

Розглянемо моделі раптових відмов, коли впливом поступових відмов на надійність об'єктів можна знехтувати. Вплив поступових відмов та їх математичні моделі надійності детально розглянемо у розділі 3.

Найбільш простою є модель *невідновлюваного* елемента, оскільки вона зводиться до моделі безвідмовності. Основне завдання під час її побудови – формування ознак відмови, вибір та обґрунтування відповідної функції розподілу наробітку до відмови і визначення числового значення її параметрів за статистичними даними, отриманими у процесі випробувань надійності або спостережень під час експлуатації. Оскільки сукупність оцінюваних показників надійності елемента залежить від моделі надійності системи, в яку входить елемент, і від типу

нормованого показника надійності, то в деяких випадках не потрібне знання функції розподілу. Достатньо знати деякі числові характеристики: середній наробіток до відмови, ймовірність відмови за заданий час та ін.

Під час формування моделі надійності *відновлюваного* елемента додатково потрібно будувати також модель відновлюваності, в якій мають бути формалізовані процеси виявлення, локалізації відмов та їх усунення (ремонт, налагодження, передпускової підготовки тощо); для формалізації процесу функціонування мають бути встановлені розподіл часу відновлення працездатності і механізм впливу передісторії елемента (кількість відмов і відновлень, тип відмов, обсяг і зміст профілактичних робіт, стан запасного майна тощо) на розподіл наробітку і розподіл часу відновлення.

З'ясуємо, як змінюється безвідмовність технічних об'єктів під час експлуатації, що дасть можливість класифікувати моделі і визначити можливості їх застосування.

З досвіду експлуатації видно, що зміна  $\text{ІнВ } \lambda(t)$  переважної більшості об'єктів (наприклад, радіоелектронних елементів ЛА [2, 6, 38]) описується *U*-подібною кривою (рис. 2.1, рис. 2.2, *a*).

Криву можна умовно розділити на три характерних ділянки:

- період приробітку;
- період нормальної експлуатації;
- період старіння об'єкта.

У *період приробітку* об'єкт має підвищену  $\text{ІнВ}$ , викликану відмовами, обумовленими дефектами виробництва, монтажу та налагодження. Іноді із закінченням цього періоду пов'язують гарантійне обслуговування об'єкта, коли усунення відмов провадиться виробником (виготівником).

У період нормальної експлуатації ІнВ залишається майже постійною, при цьому відмови мають випадковий характер і з'являються раптово, насамперед через недотримання умов експлуатації, випадкові зміни навантаження, несприятливі зовнішні фактори і т. п. Саме цей період відповідає основному часу експлуатації об'єкта.

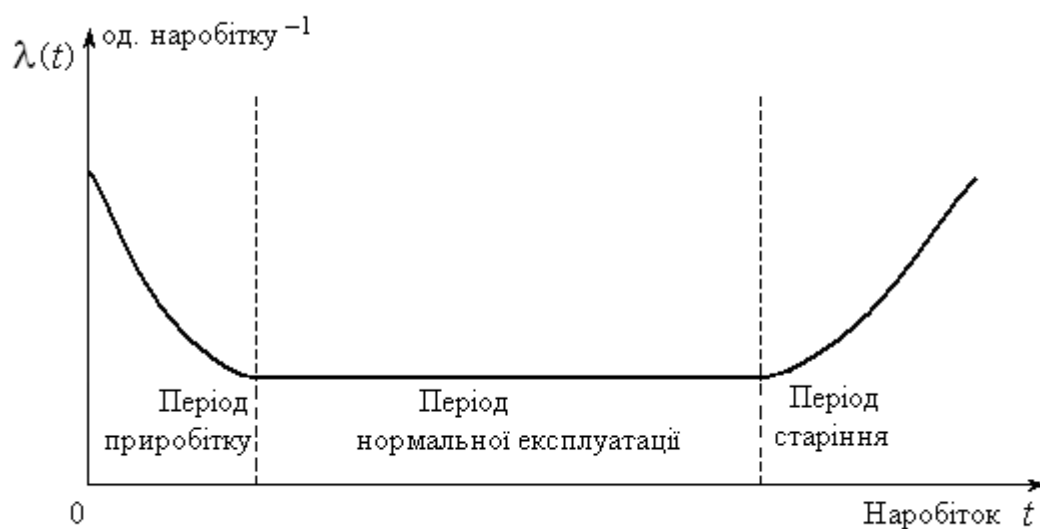


Рис. 2.1. Графік зміни інтенсивності відмов протягом життєвого циклу переважної більшості технічних об'єктів

Зростання ІнВ належить до *періоду старіння* об'єкта і викликане збільшенням кількості відмов від зношування, спрацьовування, старіння та інших причин, пов'язаних із тривалою експлуатацією.

Такий вид залежності і наявність трьох ділянок можна пояснити так. У великій партії завжди є деяка кількість виробів з прихованими дефектами, які не виявлені вихідним контролем виробництва. Ці дефекти розвиваються у відмову зазвичай незабаром після початку експлуатації. У міру «випалювання» дефектних виробів інтенсивність відмов зменшується згідно із залежністю  $\lambda_1(t)$  (рис. 2.2, а). Цей процес продовжується і на ділянці нормальної роботи, але кількість відмов

виробів з прихованими дефектами тут порівняно невелика. На третій ділянці відмови з інтенсивністю  $\lambda_2(t)$  виникають переважно унаслідок необоротних фізико-хімічних процесів, що спричиняють погіршення якості виробів, їх називають процесами старіння. На другій ділянці діють обидві причини відмов: приховані дефекти і старіння, проте оскільки немає переваги жодної з причин, сумарна інтенсивність відмов залишається приблизно постійною.

У деяких виробів залежність інтенсивності відмов від часу відрізняється від типової. Якщо відпрацьована і стабільна технологія виробництва і ретельно проводиться вихідний контроль, то кількість дефектних виробів невелика, і тоді переважає процес старіння (рис. 2.2, б).

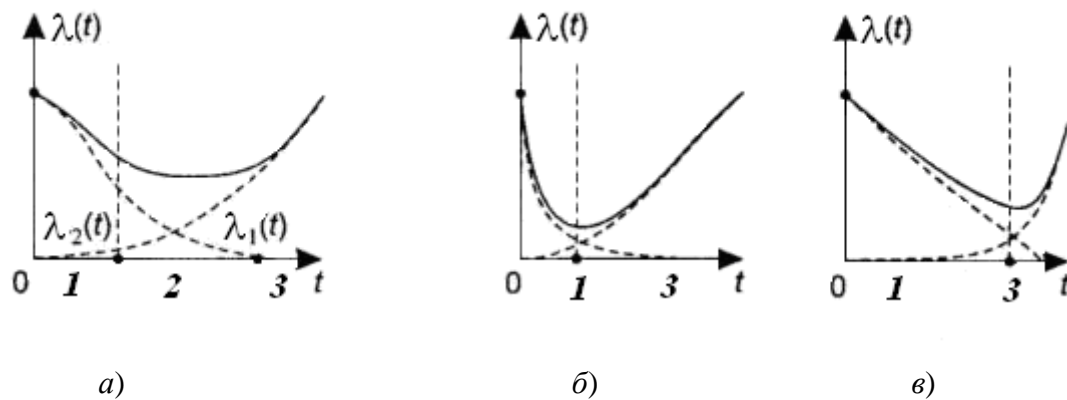


Рис. 2.2. Залежність інтенсивності відмов різних об'єктів від часу на ділянках:  
1 – приробітку; 2 – нормальної експлуатації; 3 – старіння

Інші вироби протягом тривалого часу майже не старіють, і тоді функція  $\lambda(t)$  має затяжну ділянку приробітку і коротку ділянку старіння (рис. 2.2, в). В обох останніх випадках ділянки нормальної експлуатації з постійною інтенсивністю відмов майже немає.

Вигляд аналітичної функції, яка описує зміну показників надійності  $P(t)$ ,  $f(t)$  або  $\lambda(t)$ , характеризує **закон розподілу випадкової величини**, що

залежить від властивостей об'єкта, його умов роботи та характеру відмов і який обирають під час апроксимації статистичних даних (результатів) випробувань.

### **2.1.1. Статистичне оброблення результатів випробувань і визначення показників надійності**

Нехай за результатами випробувань  $N$  невідновлюваних однакових об'єктів отримано статистичну вибірку (у будь-яких одиницях виміру) – масив наробітку до відмови кожного з  $N$  об'єктів, які підлягали випробуванню. Вибірка характеризує випадкову величину наробітку  $T = \{t\}$  до відмови об'єкта. Потрібно вибрати закон розподілу випадкової величини  $T$  і перевірити правильність вибору за відповідним критерієм.

Закон розподілу підбирають на основі апроксимації (згладжування) експериментальних даних про наробіток до відмови, які можуть бути подані у вигляді таблиці, у вигляді аналітичної залежності (математичної моделі) або у компактному графічному вигляді. Вибір тієї або іншої функції для апроксимації має характер гіпотези, яку висуває дослідник. Експериментальні дані можуть із більшою або меншою правдоподібністю підтверджувати або не підтверджувати справедливості тієї або іншої гіпотези, тому дослідник має отримати відповідь на питання: чи узгодяться результати експерименту з гіпотезою про те, що випадкова величина наробітку підпорядкована обраному ним закону розподілу? Відповідь на це питання є результатом розрахунку спеціальних критеріїв адекватності математичної моделі.

**Алгоритм оброблення результатів і розрахунку показників надійності.** *Формування статистичного ряду.* Якщо кількість об'єктів, що випробуються, велика, отриманий масив наробітків  $\{..., t_i, ...\}$  описується громіздкою таблицею, яка є ненаочною формою подання випадкової величини  $T$ . Більш компактним та ілюстративним способом подання вибірки для знаходження закону розподілу є графічний метод,



коли статистичний ряд зображують у вигляді гістограми наробітку до відмови (рис. 2.3). Алгоритм побудови гістограми такий:

1) устанавлюють інтервал наробітку  $[t_{\min}, t_{\max}]$  і його довжину  $\zeta_t = t_{\max} - t_{\min}$ , де  $t_{\min} \leq \min_i \{..., t_i, ...\}$ ;  $t_{\max} \geq \max_i \{..., t_i, ...\}$ ;

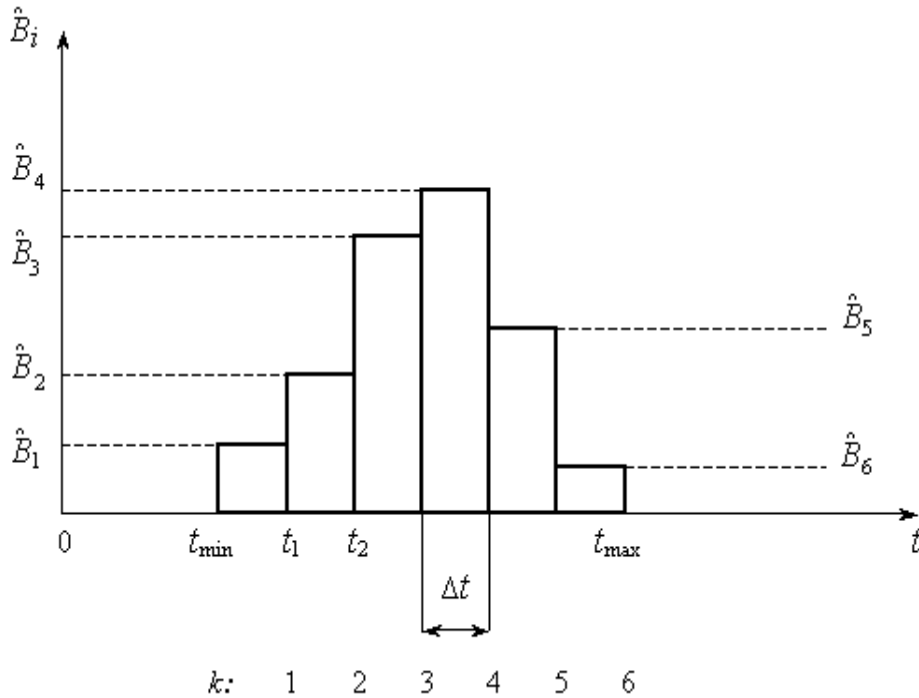


Рис. 2.3. Гістограма наробітку до відмови об'єкта

2) інтервал наробітку  $[t_{\min}, t_{\max}]$  розбивають на  $k$  інтервалів однакової ширини  $\Delta t = \frac{\zeta_t}{k}$ ,  $\Delta t = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1}$ , де  $\Delta t$  – крок гістограми (вибір  $k$  або  $\Delta t$  залежить від умов досліду, необхідної точності апроксимації тощо);

3) у кожному  $i$ -му інтервалі підраховують частоту  $\hat{B}_i$  появи відмов (для всіх  $k$  інтервалів):

$$\hat{B}_i = \frac{\Delta n(t_i, t_i + \Delta t)}{N} = \frac{\Delta n(t_i, t_{i+1})}{N},$$

де  $N$  – загальна кількість об'єктів;  $\Delta n(t_i, t_i + \Delta t)$  – кількість об'єктів, що

відмовили в інтервалі  $[t_i, t_i + \Delta t]$ ; очевидно, що  $\sum_{i=1}^k \hat{B}_i = 1$ ;

4) отриманий статистичний ряд подають у вигляді гістограми, яку будують таким чином. По осі абсцис ( $t$ ) відкладають інтервали  $\Delta t$ , на кожному з яких, як на основі, будують прямокутник, висота якого пропорційна (в обраному масштабі) відповідній частоті  $\hat{B}_i$ . Можливий вигляд гістограми (для  $k = 6$ ) показано на рис. 2.3.

Для правильного вибору закону розподілу показників безвідмовності об'єкта за отриманими статистичними даними вкрай важливо вміти вибрати тривалість інтервалу  $\Delta t$ . З одного боку, цей інтервал не має бути настільки великий, щоб згладити характерні параметри закону розподілу. З другого – не настільки малий, щоб почали проявлятися вторинні і несуттєві властивості. У кожному конкретному випадку потрібно знаходити оптимальну тривалість інтервалу  $\Delta t_{\text{опт}}$  розбиття загального часу випробування. Іноді для визначення впливу цього інтервалу на вигляд і плавність шуканої статистичної оцінки вибирають декілька значень інтервалу  $\Delta t_i$ , де  $i$  – кількість вибраних інтервалів (зазвичай  $i = 2 \dots 3$ ) [2]. За отриманими гістограмами будують криві для кожного значення  $\Delta t_i$  та обирають найбільш оптимальне (плавне) протікання графіка шуканого показника безвідмовності. Потім аналізують залежність кількості інтервалів  $k$  від оптимального значення  $\Delta t_{\text{опт}}$  для визначення міжремонтного ресурсу випробуваного об'єкта.

### 2.1.2. Розрахунок емпіричних функцій

Використовуючи дані сформованого статистичного ряду, визначають статистичні оцінки показників надійності, тобто емпіричні функції:

– *функцію розподілу відмов (оцінка ІВ):*

$$\hat{Q}(t_{\min}) = \frac{n(t_{\min})}{N} = 0;$$

$$\hat{Q}(t_1) = \frac{n(t_1)}{N} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N} = \hat{B}_1;$$

$$\hat{Q}(t_2) = \frac{n(t_2)}{N} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1) + \Delta n(t_1, t_2)}{N} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2;$$

.....

$$\hat{Q}(t_{\max}) = \frac{n(t_{\max})}{N} = \sum_1^k \hat{B}_i = 1;$$

– **функцію безвідмовності (оцінка ІБР):**

$$\hat{P}(t_{\min}) = 1 - \hat{Q}(t_{\min}) = 1;$$

$$\hat{P}(t_1) = 1 - \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N} = 1 - \hat{B}_1;$$

$$\hat{P}(t_2) = 1 - \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1) + \Delta n(t_1, t_2)}{N} = 1 - (\hat{B}_1 + \hat{B}_2);$$

.....

$$\hat{P}(t_{\max}) = 1 - \hat{Q}(t_{\max}) = 0;$$

– **щільність розподілу відмов (оцінка ЩРВ):**

$$\hat{f}(t_i) = \frac{\Delta n(t_i, t_{i+1})}{N \cdot \Delta t} = \frac{\hat{B}_i}{\Delta t};$$

– **інтенсивність відмов (оцінка ІнВ):**

$$\hat{\lambda}(t_i) = \frac{\Delta n(t_i, t_{i+1})}{N(t_i) \Delta t} = \frac{\Delta n(t_i, t_{i+1})}{[N - n(t_i)] \Delta t}.$$

Графіки статистичних оцінок  $\hat{Q}(t)$ ,  $\hat{P}(t)$ ,  $\hat{f}(t)$ ,  $\hat{\lambda}(t)$  зображено на рис. 2.4, 2.5 і 2.6 відповідно. Правила побудови графіків зрозумілі з наведених вище розрахункових формул. Кожний із графіків має свій масштаб.

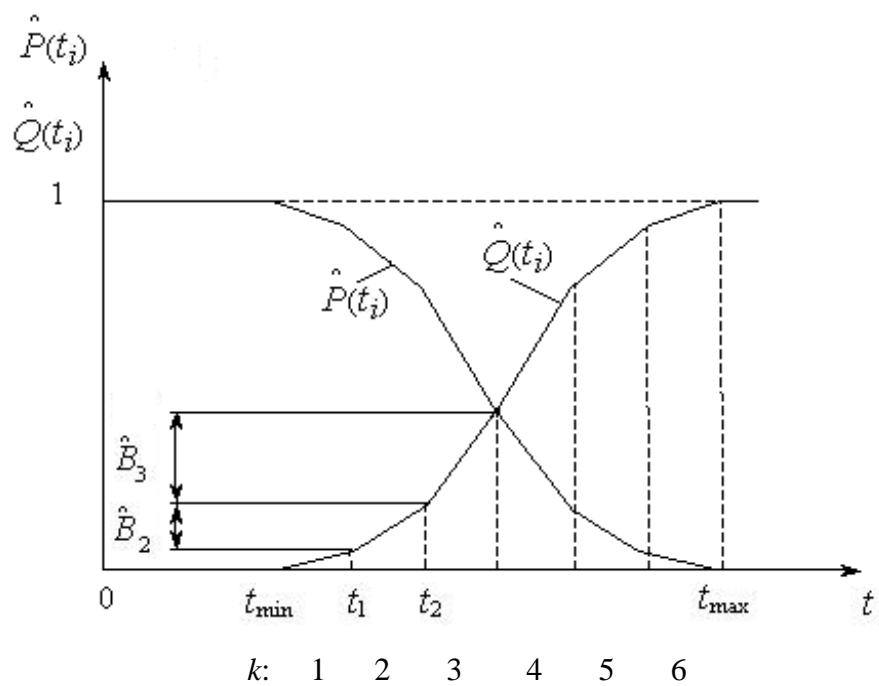


Рис. 2.4. Графіки статистичних оцінок ІБР та ІВ

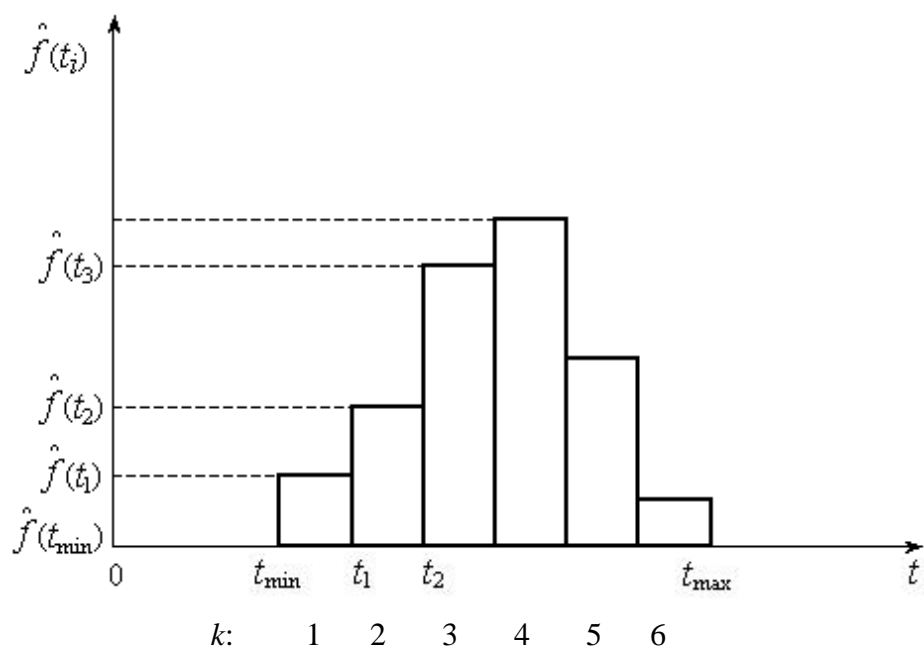


Рис. 2.5. Гістограма ЩРВ об'єкта

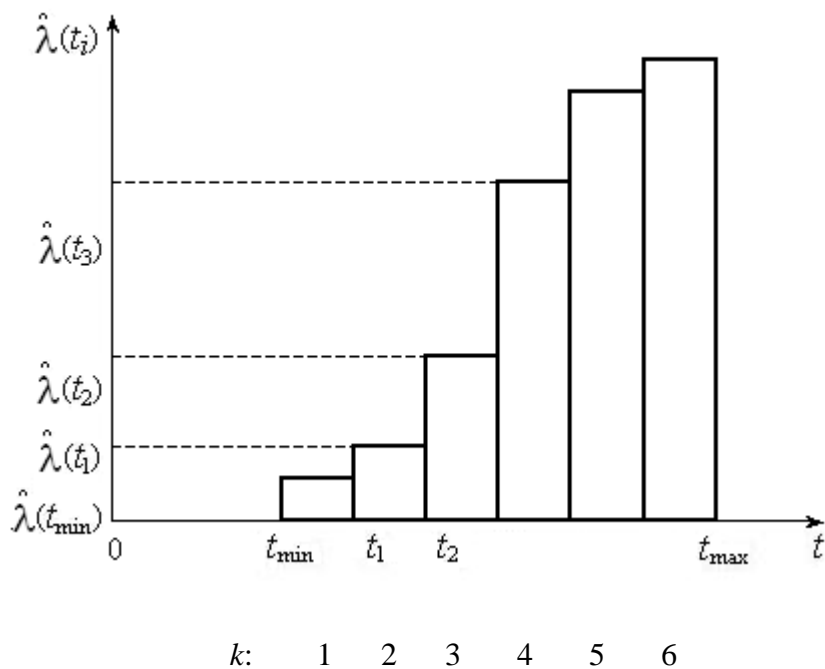


Рис. 2.6. Гістограма ІНВ об'єкта

**Розрахунок статистичних оцінок числових характеристик.** Для розрахунку статистичних оцінок числових характеристик можна використати дані сформованого статистичного ряду.

Використовують такі статистичні оцінки числових характеристик:

а) *оцінку середнього наробітку до відмови (статистичне середнє наробітку):*

$$\hat{T}_0 = \sum_{i=1}^k t_i^* \hat{B}_i,$$

де  $t_i^*$  – середина  $i$ -го інтервалу наробітку, тобто середнє значення наробітку в інтервалі шириною  $\Delta t$ ;  $t_i^* = t_i + \frac{\Delta t}{2} = t_{i+1} - \frac{\Delta t}{2}$ ;

б) *оцінку дисперсії наробітку до відмови (емпірична дисперсія наробітку):*

$$\hat{D} = \sum_{i=1}^k (t_i^* - \hat{T}_0)^2 \hat{B}_i;$$

в) *оцінку СКВ:  $\hat{S} = \sqrt{\hat{D}}$ .*

Доцільно розрахувати оцінки деяких *допоміжних характеристик* розсіювання випадкової величини  $T$ :

г) вибірковий **коефіцієнт асиметрії** наробітку до відмови

$$A = \sum_1^k \frac{(t_i^* - \hat{T}_0)^3 \hat{B}_i}{\hat{S}^3};$$

д) вибірковий **ексцес** наробітку до відмови

$$E = \left( \sum_1^i \frac{(t_i^* - \hat{T}_0)^4 \hat{B}_i}{\hat{S}^4} \right) - 3.$$

Ці характеристики використовують для вибору функції під час апроксимації.

Так, коефіцієнт асиметрії є характеристикою «скошеності» розподілу, наприклад, якщо розподіл симетричний відносно МС, то  $A = 0$ . Розподіл  $f_2(t)$  на рис. 2.7, а має додатну асиметрію  $A > 0$ , а  $f_3(t)$  – від’ємну  $A < 0$ .

Ексцес характеризує крутизну (гостро- або плосковершинність) розподілу. Для нормального розподілу  $E = 0$ . Більш гостровершинні порівняно з кривою нормального розподілу криві  $f(t)$  мають  $E > 0$ , і навпаки – криві з більш плоскими вершинами мають  $E < 0$  (рис. 2.7, б).

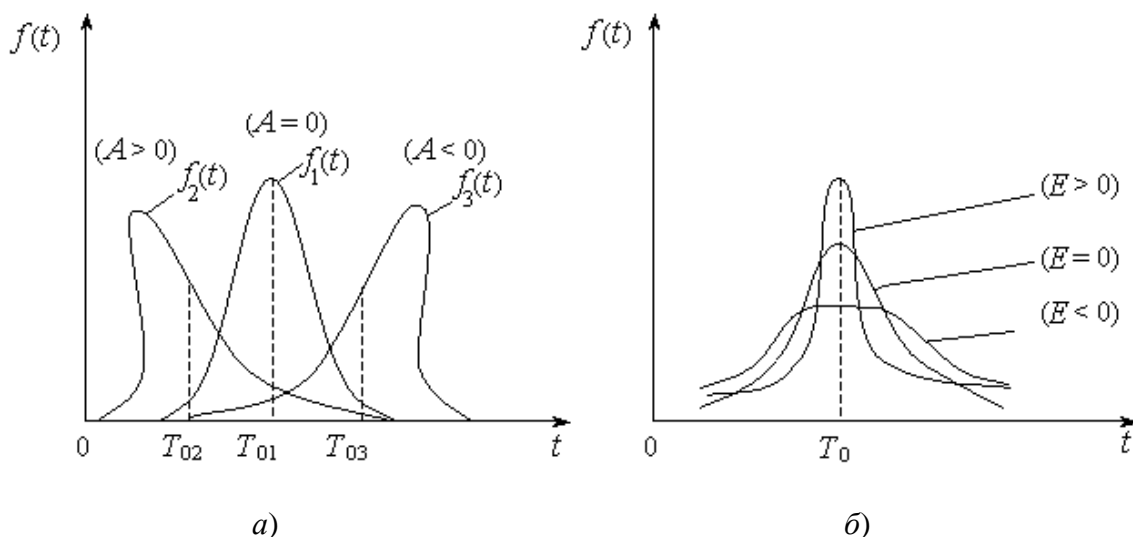


Рис. 2.7. Графічне пояснення асиметрії а) та ексцесу б)

### 2.1.3. Вибір закону розподілу

Вибір закону розподілу полягає у підбиранні аналітичної функції, яка якнайкраще апроксимує емпіричні функції безвідмовності, і

визначенні адекватності обраної математичної моделі експериментальним даним.

Як уже зазначалось, вибір – це процедура невизначена й багато в чому суб'єктивна: залежить від досвіду дослідника, апріорних знань про об'єкт, його властивості та умови роботи, а також від вигляду графіків  $\hat{P}(t)$ ,  $\hat{f}(t)$ ,  $\hat{\lambda}(t)$ .

Найпоширенішим є вибір розподілу за виглядом емпіричних функцій ЩРВ  $\hat{f}(t)$  або ІнВ  $\hat{\lambda}(t)$ . Вибір закону розподілу – це фактично прийняття тієї або іншої гіпотези.

Припустимо, що з якихось міркувань обрано гіпотетичний закон розподілу, заданий теоретичною ЩРВ  $f(t) = \Psi(t, a, b, c, \dots)$ , де  $a, b, c, \dots$  – невідомі параметри розподілу.

Потрібно підібрати ці параметри так, щоб функція  $f(t)$  якнайкраще згладжувала ступінчастий графік  $\hat{f}(t)$  і була якомога більше наближена до статистичних даних. Для цього використовують такий прийом: параметри  $a, b, c, \dots$  обирають з таким розрахунком, щоб кілька найважливіших числових характеристик теоретичного розподілу, які називають критеріями апроксимації, дорівнювали відповідним статистичним оцінкам.

На графіку разом з  $\hat{f}(t)$  будують теоретичну ЩРВ  $f(t)$ , що дає можливість візуально оцінити результати апроксимації (розбіжності між  $\hat{f}(t)$  та  $f(t)$ ). Оскільки ці розбіжності неминучі, то виникає питання: чи пояснюються вони випадковими обставинами, пов'язаними з тим, що теоретичний розподіл обраний помилково? Відповідь на це питання дає розрахунок критерію згоди (узгодженості, погодження).

**Розрахунок критерію згоди.** *Критерій згоди* – це критерій перевірки гіпотези про те, що випадкова величина  $T$ , яка має свою вибірку, має розподіл передбачуваного типу, тобто критерій адекватності обраної математичної моделі експериментальним даним.

*Перевірка полягає у розрахунку критерію як деякої міри розбіжності теоретичного та емпіричного розподілів, причому ця міра – випадкова величина.*

Чим більша міра розбіжності, тим гірша узгодженість емпіричного розподілу з теоретичним, тобто гіпотезу про вибір закону розподілу варто відкинути як неправдоподібну.

У протилежному випадку – експериментальні дані не суперечать прийнятому розподілу.

З відомих критеріїв у теорії надійності найчастіше застосовують критерій згоди  $\chi^2$  (кхі-квадрат) Пірсона.

Узгодженість розподілів за критерієм  $\chi^2$  перевіряють у такий спосіб:

1) розраховують критерій  $\chi^2$  (міру розбіжності):

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{B}_i - B_i)^2}{B_i},$$

де  $B_i$  – теоретична частота влучення випадкової величини в інтервал  $[t_i, t_i + \Delta t]$ ,  $B_i = f(t_i^*)\Delta t$ ;  $f(t_i^*)$  – значення ЩРВ обраного за гіпотезою закону розподілу у точці  $t_i^*$ ;

2) визначають кількість ступенів вільності:  $R = k - L$ , де  $L$  – кількість незалежних умов, накладених на частоти  $\hat{B}_i$ , наприклад:

а) умова  $\sum_{i=1}^k \hat{B}_i = 1$ ;

б) умова збігу  $\sum_{i=1}^k t_i^* \hat{B}_i = T_0$ ;

в) умова збігу  $\sum_{i=1}^k (t_i^* - T_0)^2 \hat{B}_i = D$  і т. д.

Найчастіше  $L = 3$ . Чим більша кількість ступенів вільності, тим більше випадкова величина  $\chi^2$  підкоряється розподілу Пірсона;



3) за розрахованими  $\chi^2$  та  $R$  знаходять ймовірність  $P$  того, що величина, яка має розподіл Пірсона з  $R$  ступенями вільності, перевищить розраховане значення  $\chi^2$ .

Важко дати відповідь на питання, наскільки малою має бути ймовірність  $P$ , щоб відкинути гіпотезу про вибір того або іншого закону розподілу. На практиці, якщо  $P < 0,1$ , то рекомендується відкинути прийняту гіпотезу і підшукати інший закон розподілу.

У цілому за допомогою критерію згоди можна спростувати обрану гіпотезу, але якщо ймовірність  $P$  досить велика, то це не може бути доказом правильності гіпотези, а вказує лише на те, що гіпотеза не суперечить даним експерименту.

Для апроксимації реальних розподілів наробітку до відмови на ділянках приробітку, нормальної експлуатації і старіння використовують стандартні розподіли випадкових величин, які досліджуються в теорії ймовірності. Розглянемо математичні вирази для деяких використовуваних у теорії надійності розподілів і фізичні передумови, які пояснюють механізми їх виникнення. Для кожного розподілу розглядають чотири основні характеристики: функцію розподілу  $F(t)$ , щільність розподілу  $f(t)$ , математичне сподівання (середній наробіток до відмови)  $\bar{T}_0$  і дисперсію  $D$  [10; 12]. Експериментатор, який обирає математичну модель, може розглянути не одну, а дві–три гіпотези (вибрати не один, а два–три закони розподілу) і після порівняння розрахованих параметрів вибрати оптимальний.

## **2.2. Нормальний закон розподілу наробітку до відмови**

**Класичний нормальний розподіл.** Нормальний розподіл або розподіл Гауса – найбільш універсальний, зручний і широко застосовуваний.

Вважається, що наробіток підкоряється нормальному розподілу (нормально розподілений), якщо ЦРВ можна описати виразом

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right],$$

де  $a$  та  $\sigma$  – параметри розподілу, відповідно, МС і СКВ; вважають, що за результатами випробувань  $a \approx \hat{T}_0$ ;  $\sigma^2 \approx \hat{D}$ , де  $\hat{T}_0$ ,  $\hat{D}$  – оцінки середнього наробітку і дисперсії, а параметр  $\sigma$  фактично відображає СКВ  $S$ ,  $\sigma \approx \sqrt{\hat{D}} = \hat{S}$ , отже, у теорії надійності закон Гауса використовують у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-T_0)^2}{2S^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2D}}. \quad (2.1)$$

Графіки зміни показників безвідмовності за нормального розподілу зображено на рис. 2.8.

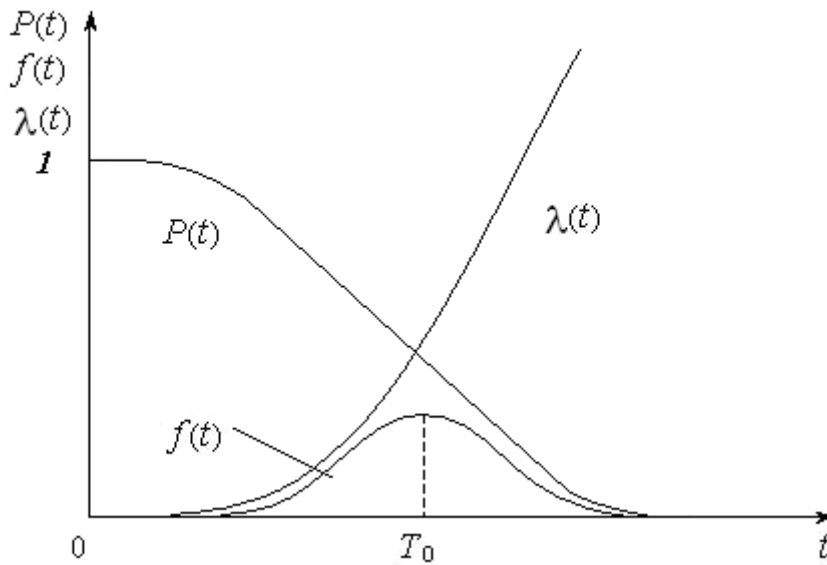


Рис. 2.8. Графіки показників безвідмовності для нормального розподілу

З'ясуємо зміст параметрів  $T_0$  і  $S$  нормального розподілу. Із графіка

$f(t)$  видно, що за  $t = T_0$  ЩРВ досягає свого максимуму:  $f(t)_{\max|_{t=T_0}} = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}}$ .

У разі зрушення  $T_0$  уліво/вправо по осі абсцис крива  $f(t)$  зміщується у той самий бік, не змінюючи своєї форми. Отже,  $T_0$  є центром розсіювання випадкової величини  $T$ , тобто МС. При цьому графік  $f(t)$  симетричний відносно значення  $T_0$ , тобто  $f(T_0 - t) = f(T_0 + t)$ .

Параметр  $S$  характеризує форму кривої  $f(t)$ , тобто ступінь розсіювання випадкової величини  $T$ . Крива ЩРВ  $f(t)$  тим вужча і гостріша, чим менше  $S$ . Зміну графіків  $P(t)$  і  $\lambda(t)$  за різних СКВ наробітків за умови  $S_1 < S_2 < S_3$  і  $T_0 = \text{const}$  зображено на рис. 2.9.

Використовуючи отримані раніше (глави 1.7 та 1.8) співвідношення між показниками безвідмовності, можна було б записати вирази для  $P(t)$ ,  $Q(t)$  і  $\lambda(t)$  за відомим виразом (2.1) для  $f(t)$ . Через велику громіздкість цих інтегральних виразів для практичного розрахунку показників безвідмовності обчислення інтегралів замінюють використанням таблиць. Крім того, для використання одних і тих самих уніфікованих таблиць для всіх нормально розподілених випадкових величин проводять *нормування*.

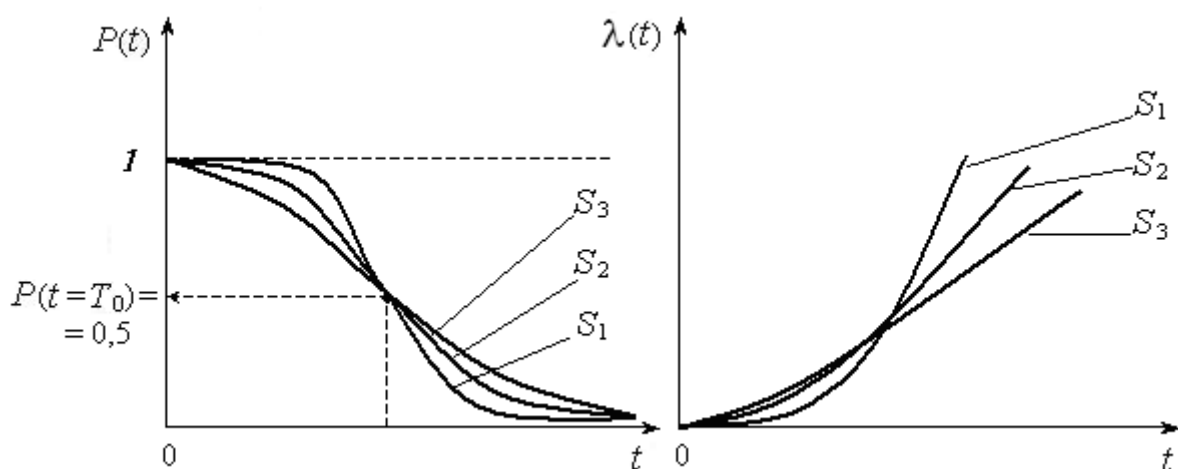


Рис. 2.9. Графіки ймовірності безвідмовної роботи  $P(t)$  та інтенсивності відмов  $\lambda(t)$  за різних СКВ ( $S_1 < S_2 < S_3$ ) і  $T_0 = \text{const}$

Із цією метою нормують змінну величину і переходять від випадкової величини  $T = \{t\}$  до деякої випадкової величини  $X = \{x\}$ ,

$x = \frac{t - T_0}{S}$ , яка розподілена нормально з параметрами МС  $M\{X\} = 0$ , СКВ

$S\{X\} = 1$  і щільністю розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (2.2)$$

Вираз (2.2) описує щільність нормованого нормального розподілу, графік якої зображено на рис. 2.10.

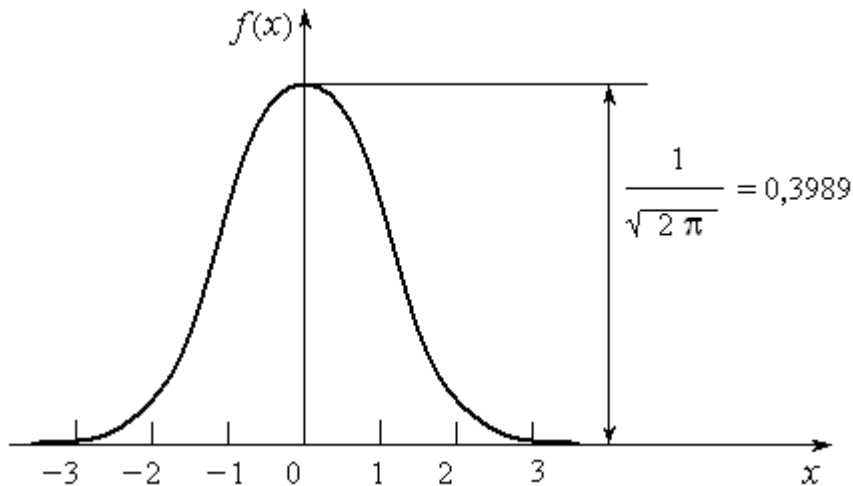


Рис. 2.10. Щільність розподілу випадкової величини для нормованого нормального розподілу

Нормована функція розподілу випадкової величини  $X$  має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

а із симетрії кривої  $f(t)$  відносно МС  $M\{X\} = 0$  випливає, що  $f(-x) = f(x)$ , звідки  $F(-x) = 1 - F(x)$ .

У довідковій літературі наведено розрахункові значення функцій  $f(x)$  і  $F(x)$  для різних  $x = \frac{t - T_0}{S}$ .

Показники безвідмовності об'єкта через табличні значення  $f(x)$  та  $F(x)$  знаходять за формулами

$$f(t) = \frac{f(x)}{S}; \quad (2.3)$$

$$Q(t) = F(x);$$

$$P(t) = 1 - F(x); \quad (2.4)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{f(x)}{S[1 - F(x)]}. \quad (2.5)$$

Оскільки нормована функція  $f(x)$  симетрична відносно осі ординат, у практичних розрахунках часто замість функції  $F(x)$  використовують функцію Лапласа як розподіл додатних значень випадкової величини  $X$  у вигляді

$$\Phi(x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx. \quad (2.6)$$

Очевидно, що  $F(x)$  пов'язана з  $\Phi(x)$  у такий спосіб:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = 0,5 + \Phi(x). \quad (2.7)$$

Функція  $\Phi(x)$  має властивості

$$\Phi(-\infty) = -0,5; \quad \Phi(\infty) = 0,5; \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Показники безвідмовності об'єкта можна визначити через  $\Phi(x)$ , використовуючи вирази (2.3)–(2.7):

$$Q(t) = 0,5 + \Phi(x);$$

$$P(t) = 0,5 - \Phi(x);$$

$$\lambda(t) = \frac{f(x)}{S[0,5 - \Phi(x)]}.$$

Найчастіше під час оцінювання безвідмовності об'єкта доводиться вирішувати **пряме завдання** – за заданих параметрів  $T_0$  і  $S$  нормально розподіленого наробітку до відмови визначати той або інший показник безвідмовності (наприклад, ІБР до наробітку  $t$ ).

Але під час проектних робіт доводиться вирішувати і **зворотне завдання** – визначати наробіток, потрібний за технічним завданням, за заданою ІБР  $P$  об'єкта.

Для розв'язання зворотного завдання використовують квантилі нормованого нормального розподілу.

*Квантиль* – значення випадкової величини, що відповідає заданій ймовірності.

Позначимо:

$t_p$  – значення наробітку, що відповідає ІБР  $P$ ;

$x_p$  – значення випадкової величини  $X$ , що відповідає ймовірності  $P$ .

Тоді з рівняння зв'язку  $x$  і  $t$  за  $x = x_p$ ;  $t = t_p$  отримуємо:

$$x_p = \frac{t_p - T_0}{S};$$

$$t_p = T_0 + x_p S,$$

де  $t_p$ ,  $x_p$  – відповідно *ненормована* і *нормована* квантилі нормального розподілу, що відповідають ймовірності  $P$ .

Значення квантилів  $x_p$  є в довідковій літературі для  $P \geq 0,5$ .

Якщо задана ймовірність  $P < 0,5$ , використовують співвідношення  $x_p = -x_{1-p}$ . Наприклад, якщо  $P = 0,3$ , маємо  $x_{0,3} = -x_{1-0,3} = -x_{0,7}$ .

Ймовірність влучення випадкової величини наробітку  $T$  у заданий інтервал  $[t_1, t_2]$  знаходять за формулою

$$P\{T \in [t_1, t_2]\} = F(x_2) - F(x_1) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.8)$$

$$\text{де } x_1 = \frac{t_1 - T_0}{S}, \quad x_2 = \frac{t_2 - T_0}{S}.$$

Зазначимо, що наробіток до відмови завжди додатний, а крива ЩРВ  $f(t)$  у загальному випадку починається від  $t = -\infty$  і поширюється до  $t = \infty$ .

Це не вважають істотним недоліком, якщо  $T_0 \gg S$ , оскільки за формулою (2.8) легко підрахувати, що з точністю до 1 % ймовірність влучення випадкової величини  $T$  в інтервал  $P\{T_0 - 3S < T < T_0 + 3S\} \approx 1,0$ . А це означає, що всі можливі значення (з похибкою не вище 1 %) нормально розподіленої випадкової величини зі співвідношенням характеристик  $T_0 > 3S$  перебувають на ділянці  $T_0 \pm 3S$ .

У разі більшого розкиду значень випадкової величини  $T$  область можливих значень обмежується лівою ділянкою  $(0, \infty)$ , і тоді використовують усічений нормальний розподіл.

**Усічений нормальний розподіл.** Відомо, що коректність використання класичного нормального розподілу наробітку досягається за  $T_0 \geq 3S$  з відносною точністю 0,01.

Якщо значення  $T_0$  мале і  $S$  велике, може виникнути ситуація, коли на ліву ділянку класичної кривої ЩРВ  $f(t)$  припадає зона від'ємних наробітків  $t < 0$  (рис. 2.11), яких насправді немає.

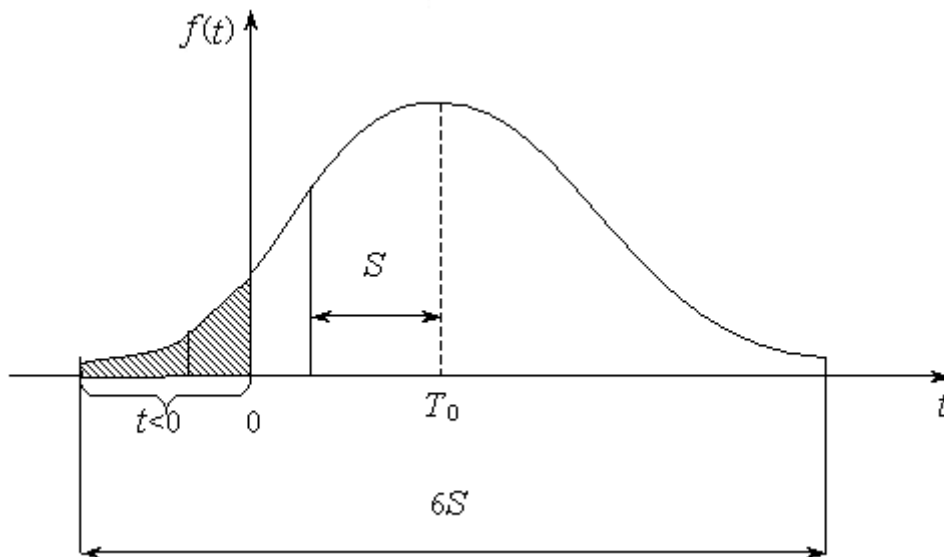


Рис. 2.11. Графік щільності усіченого нормального розподілу

Отже, нормальний розподіл як загальний випадок розподілу випадкової величини в діапазоні  $(-\infty; \infty)$  лише за певних умов може бути використаний для вибору моделей безвідмовності.

**Усіченим нормальним розподілом** (УНР) називають розподіл, отриманий із класичного нормального з обмеженням інтервалу можливих значень наробітку до відмови.

На відміну від нормального розподілу, який визначений на всій дійсній осі, зокрема і для негативних значень, усічений нормальний розподіл визначений лише на додатній півосі і може використовуватися

для опису розподілу наробітку до відмови. Розподіл має такі характеристики:

$$F(t) = \frac{\Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)}{A}; \quad f(t) = \frac{1}{A\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right); \quad A = 0,5 + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right);$$

$$\bar{T}_0 = a + \frac{\sigma \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)}{A\sqrt{2\pi}}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

де  $\Phi(x)$  – інтеграл Лапласа,  $A$  – сталий коефіцієнт.

Функцію усіченого нормального розподілу можна використовувати для апроксимації реальних розподілів на ділянці старіння. Якщо  $3a > \sigma$ , УНР стає дуже близьким до нормального розподілу ( $A = 1$ ), оскільки значення  $A$  дуже близьке до одиниці. Наприклад, якщо  $a = 3\sigma$ , то  $A = 0,99865$ .

Механізм виникнення нормального розподілу в технічних виробках, як і механізм виникнення гамма-розподілу, можна пояснити за допомогою моделі пошкоджень, що накопичуються. Неважко помітити, що із зростанням  $k$  щільність гамма-розподілу (функція частоти відмов) стає більш симетричною. Основою цієї властивості є те що із зростанням  $k$  функція частоти відмов наближається до функції

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\lambda^2}}} \exp\left(-\frac{\left(t - \frac{k}{\lambda}\right)^2}{\frac{2k}{\lambda^2}}\right). \quad (2.9)$$

Функція (2.9) збігається з функцією щільності нормального розподілу, якщо зробити заміну  $\frac{k}{\lambda} = a$  та  $\frac{k}{\lambda^2} = \sigma^2$ . Отже, нормальний розподіл можна розглядати як граничний розподіл моделі пошкоджень, що накопичуються, за досить високого порогу катастрофічного зношення. Зазначимо, що вже за  $k = 9$  у формулі (2.9) маємо  $a = 3\sigma$ , тобто



вже можна використовувати нормальний розподіл замість усіченого нормального. При цьому похибка від заміни гамма-розподілу нормальним в області значень ймовірності безвідмовної роботи  $P > 0,7$  не перевищує 4 %.

У загальному випадку усічення нормального розподілу може бути:

- лівим –  $(0, \infty)$ ;
- двобічним –  $(t_1, t_2)$ .

Розглянемо вміст УНР для випадку обмеження випадкової величини наробітку інтервалом  $(t_1, t_2)$ .

Нехай щільність розподілу для такого УНР  $f^*(t) = cf(t)$ , де  $f(t)$  – щільність неусіченого нормального розподілу,

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-T_0)^2}{2S^2}\right\};$$

$c$  – нормувальний множник, який визначають з умови, що площа під кривою  $f^*(t)$  дорівнює 1, тобто

$$\int_{t_1}^{t_2} f^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} cf(t)dt = c \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = 1.$$

$$\text{Звідси } c = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt},$$

$$\text{де } \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = P(t_1 < T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = Q(t_2) - Q(t_1).$$

Застосовуючи перехід від випадкової величини  $T = \{t\}$  до величини

$$X = \{x\}, \text{ тобто } x_1 = \frac{t_1 - T_0}{S}, \quad x_2 = \frac{t_2 - T_0}{S}, \text{ отримаємо}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = Q(t_2) - Q(t_1) = 0,5 + \Phi(x_2) - 0,5 - \Phi(x_1) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Звідси нормувальний множник  $c = \frac{1}{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)}$ .

Оскільки  $[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] < 1$ , то  $c > 1$ , тому  $f^*(t) > f(t)$ . Крива  $f^*(t)$  буде проходити вище, ніж  $f(t)$ , тому що площі під кривими  $f^*(t)$  та  $f(t)$  на інтервалі  $[t_1, t_2]$  однакові і дорівнюють одиниці (рис. 2.12).

Якщо покласти  $t_1 = T_0 - 3S$ ;  $t_2 = T_0 + 3S$ , то

$$\int_{T_0-3S}^{T_0+3S} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f^*(t)dt \quad (\text{з похибкою до } 1 \%).$$

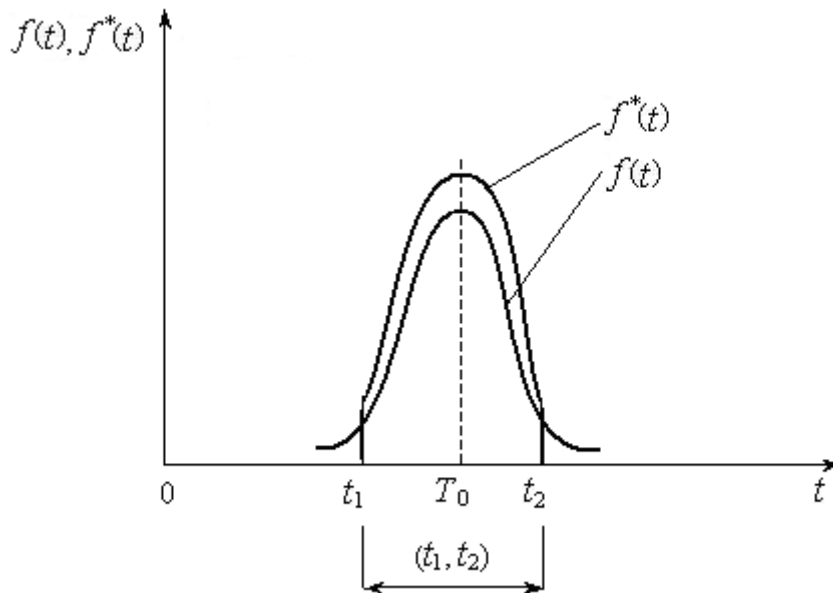


Рис. 2.12. Порівняння ЩРВ нормального та усіченого нормального розподілів

Показники безвідмовності для УНР у діапазоні  $(t_1, t_2)$ :

ЩРВ:  $f^*(t) = cf(t) = \frac{cf(x)}{S};$

ІБР:  $P^*(t) = \int_t^{\infty} cf(t)dt = c \int_t^{\infty} f(t)dt = c[0,5 - \Phi(x)];$

ІВ:  $Q^*(t) = 1 - c[0,5 + \Phi(x)];$

ІНВ:  $\lambda^*(t) = \frac{f^*(t)}{P^*(t)} = \frac{f(x)}{S[0,5 - \Phi(x)]} = \lambda(t).$

Розглянемо УНР для додатного наробітку до відмови в діапазоні  $(0; \infty)$ , для якого  $t_1 = 0$ ,  $t_2 \rightarrow \infty$ .

За аналогією з наведеним вище, отримаємо ЦРВ:

$$f^*(t) = c_0 f(t),$$

де  $c_0$  – нормувальний множник, який знаходять з умови  $c_0 \int_0^{\infty} f(t) dt = 1$ , він дорівнює (аналогічно попереднім викладкам)

$$c_0 = \frac{1}{\int_0^{\infty} f(t) dt} = \frac{1}{Q(\infty) - Q(0)} = \frac{1}{\Phi(\infty) - \Phi\left(-\frac{T_0}{S}\right)} = \frac{1}{0,5 + \Phi\left(\frac{T_0}{S}\right)}.$$

Вирази показників безвідмовності УНР з робочим діапазоном  $(0, \infty)$  аналогічні показникам безвідмовності для УНР в діапазоні  $(t_1, t_2)$ , відмінність полягає тільки у значеннях нормувального множника  $c_0$ :

$$f^*(t) = \frac{c_0 f(x)}{S}; \quad P^*(t) = c_0 [0,5 - \Phi(x)];$$

$$Q^*(t) = 1 - c_0 [0,5 - \Phi(x)]; \quad \lambda^*(t) = \frac{f(t)}{S[0,5 - \Phi(x)]}.$$

Графік залежності нормувального множника  $c_0$  від відношення  $\frac{T_0}{S}$  зображено на рис. 2.13.

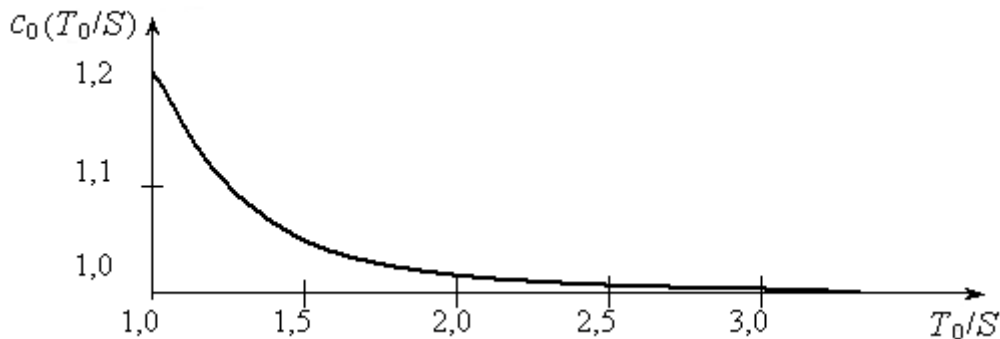


Рис. 2.13. Графік зміни нормувального множника  $c_0$  залежно від відношення  $\frac{T_0}{S}$

Якщо  $T_0 = S$ , маємо  $\frac{T_0}{S} = 1$ ,  $c_0 = \max \approx 1,2$ .

Якщо  $\frac{T_0}{S} \geq 2,5$ , маємо  $c_0 \approx 1,0$ ; тобто  $f^*(t) \approx f(t)$ .

### **2.3. Експоненціальний, логарифмічний, гамма-відсотковий та інші закони розподілу наробітку до відмови**

**Експоненціальний розподіл.** Експоненціальний розподіл описує наробіток до відмови об'єктів, у яких у результаті контрольних (здавальних) випробувань під час вихідного контролю немає періоду приробітку, а призначений ресурс установлений до закінчення періоду нормальної експлуатації.

Ці об'єкти можна віднести до «нестаріючих», оскільки їх експлуатують тільки на ділянці з  $\lambda(t) = \text{const} = \lambda$ . Таких об'єктів надзвичайно багато: складні технічні системи з великою кількістю компонентів, засоби обчислювальної техніки, радіоелектронні елементи та системи автоматичного регулювання тощо. Експоненціальний розподіл широко застосовують для оцінювання безвідмовності енергетичних об'єктів та елементів ЛА.

Експоненціальний розподіл має такі характеристики:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad T_0 = \text{МС} = \frac{1}{\lambda}; \quad D = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \lambda \geq 0.$$

Експоненціальний розподіл однопараметричний і має одну унікальну властивість, яку можна продемонструвати за допомогою розрахункових формул (1.9) і (1.13). Згідно з формулою (1.9), ймовірність

$$P(\tau, t) = \frac{e^{-\lambda(\tau+t)}}{e^{-\lambda\tau}} = e^{-\lambda t} \quad (2.10)$$

не залежить від того, скільки часу виріб пропрацював до інтервалу часу  $(\tau, \tau + t)$ . Згідно з формулою (1.13), середній залишковий (прийдешній, майбутній) наробіток до відмови

$$T_0(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda \tau}} dt = \frac{1}{\lambda} = T_0 \quad (2.11)$$

також не залежить від того, скільки часу виріб пропрацював раніше. Закономірності (2.10) та (2.11) – це прояв властивості, яку називають відсутністю післядії, за наявності якої показники надійності виробу залежать тільки від стану виробу на початку певного інтервалу часу, але не залежать від наробітку до цього інтервалу. Є фізичні передумови, що пояснюють цю властивість. Одне з пояснень таке. Будь-який виріб працює в умовах певного навантаження (електричного, механічного та ін.) і має обмежену «міцність», тому є деяке граничне навантаження, яке виріб здатний витримувати без відмови. Якщо навантаження перевищує граничне значення, то відбувається раптова відмова. Пікові значення навантажень виникають випадковим чином, і момент їх виникнення передбачити неможливо. У теорії випадкових процесів є доказ того, що за певних умов час до першого перетину випадковим процесом деякого граничного (порогового) рівня має якраз експоненціальний розподіл. У наведеному поясненні важливим є те, що відмова виникає не внаслідок поступової зміни внутрішнього стану виробу, а внаслідок зовнішньої випадкової дії, значення якої перевищує допустиме. З цього виходить, що для експоненціального розподілу наробітку до відмови профілактичні роботи, що включають заміну елементів або їх періодичний ремонт, втрачають усякий сенс, оскільки не можуть вплинути на причину відмови. Природний спосіб підвищення надійності елемента полягає або в його конструктивному поліпшенні, або у зниженні діючих навантажень.

Вважають, що випадкова величина наробітку об'єкта до відмови підлягає експоненціальному розподілу, якщо ЦРВ можна описати виразом

$$f(t) = \alpha \exp(-\alpha t), \quad (2.12)$$

де  $\alpha$  – параметр розподілу, який за результатами випробувань на надійність беруть  $\alpha \approx \frac{1}{\hat{T}_0} = \lambda$ ;  $\hat{T}_0$  – статистична оцінка середнього наробітку до відмови.

Інші показники безвідмовності, якщо відоме значення параметра  $\alpha = \lambda$ , наведено у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

**Показники безвідмовності експоненціального розподілу**

Показник безвідмовності	Математична модель показника
Імовірність безвідмовної роботи (ІБР)	$P(t) = \exp(-\alpha t) = \exp(-\lambda t)$ (2.13)
Імовірність відмови (ІВ)	$Q(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ (2.14)
Інтенсивність відмов (ІнВ)	$\lambda(t) = \frac{\alpha \exp(-\alpha t)}{\exp(-\alpha t)} = \alpha = \lambda$ (2.15)
Щільність розподілу відмов (ЩРВ)	$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$

З виразу (2.15) випливає, що ІнВ є постійною величиною, що не залежить від часу і яка обернено пропорційна оцінці середнього наробітку  $\lambda(t) = \lambda = \frac{1}{\hat{T}_0}$ .

Числові характеристики наробітку до відмови знаходять за формулами:

– середній наробіток (МС наробітку) до відмови:

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \frac{1}{\lambda};$$

– дисперсію наробітку до відмови:

$$D = D\{t\} = \int_0^{\infty} (t - T_0)^2 f(t) dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Графіки зміни показників безвідмовності для експоненціального розподілу зображено на рис. 2.14.

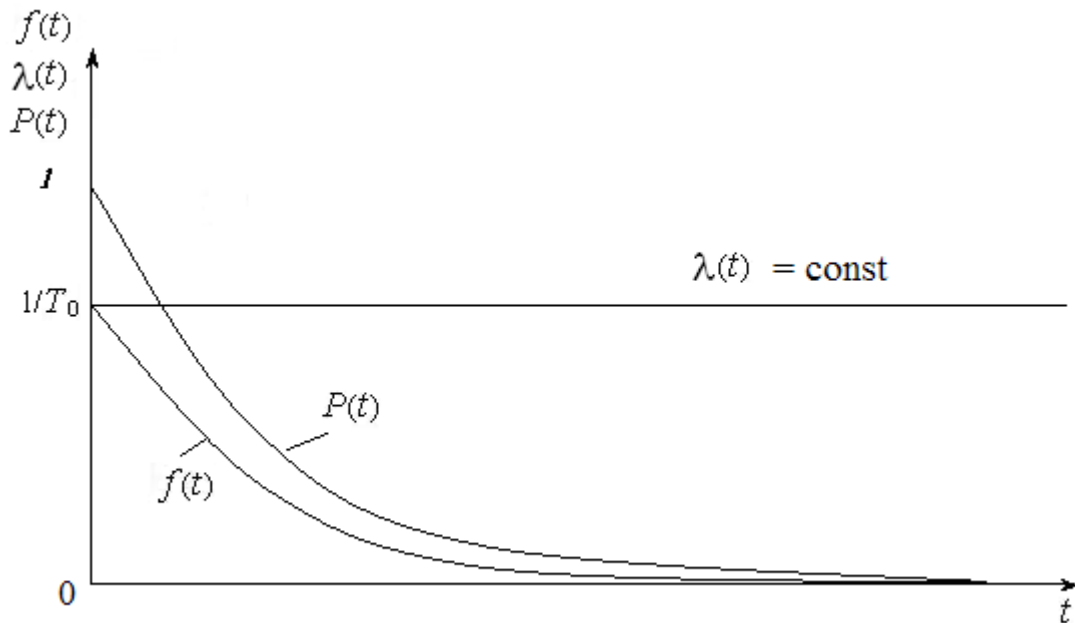


Рис. 2.14. Графіки показників безвідмовності (ІБР, ЩРВ, ІнВ)  
для експоненціального розподілу

Слід зазначити, що за  $\lambda t \ll 1$ , тобто за наробітку  $t$ , значно меншому, ніж середній наробіток  $T_0$ , вирази (2.12)–(2.15) можна спростити, замінивши  $e^{-\lambda t}$  двома першими членами розкладання  $e^{-\lambda t}$  у ступеневий ряд.

Наприклад, вираз для ІБР набуде вигляду

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \approx 1 - \lambda t,$$

при цьому похибка обчислення  $P(t)$  не перевищує  $0,5(\lambda t)^2$ .

Усі розглянуті далі закони розподілу наробітку до відмови використовують на практиці для описання надійності «старіючих» об'єктів, що піддаються відмовам від зношення.

**Логарифмічно нормальний розподіл.** У логарифмічно нормальному (логнормальному) розподілі нормально розподіленим є логарифм  $\ln(t)$  випадкової величини  $T$ , а не сама ця величина.

Випадкова величина має логарифмічно нормальний розподіл, якщо логарифм цієї величини має нормальний розподіл, і вона визначена на додатній півосі. Розподіл має такі характеристики:

$$F(t) = 0,5 + \Phi\left(\frac{\ln t - a}{\sigma}\right); \quad f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}\right);$$

$$T_0 = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad D\{T_0\} = \exp(2a + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1].$$

Логарифмічно нормальний розподіл є двопараметричним розподілом, його можна використовувати у моделях надійності старіючих систем. Тобто логарифмічно нормальний розподіл багато в чому більш точно, ніж нормальний, описує наробіток до відмови тих об'єктів, у яких відмова виникає внаслідок втоми, наприклад, механічних деталей, підшипників кочення, електронних ламп та ін.

Якщо логарифм  $\ln t$  має нормальний розподіл з параметрами МС  $U$  і СКВ  $V$ , то величина  $T$  вважається логарифмічно нормально розподіленою із ЩРВ вигляду  $f(t) = \frac{1}{Vt\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - U)^2}{2V^2}\right)$ .

Параметри  $U$  та  $V$  за результатами випробувань беруть

$$U \approx \hat{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln t_i;$$

$$V \approx \hat{V}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\ln t_i - \hat{U})^2,$$

де  $\hat{U}$  та  $\hat{V}$  – оцінки параметрів  $U$  та  $V$ .

Показники безвідмовності можна розрахувати за наведеними у главі 1.6 виразами, використовуючи табульовані функції  $f(x)$  і, відповідно,  $F(x)$  та  $\Phi(x)$  для нормального розподілу за  $x = \left(\frac{\ln t - U}{\sqrt{2}V}\right)$ .

Графіки зміни показників безвідмовності для логарифмічно нормального розподілу зображено на рис. 2.15.

Числові характеристики наробітку до відмови:

– середній наробіток (МС наробітку) до відмови:



$$T_0 = \exp\left(U + \frac{V^2}{2}\right);$$

– дисперсія наробітку до відмови:

$$D = D\{T\} = \exp(2U + V^2)[\exp(V^2) - 1].$$

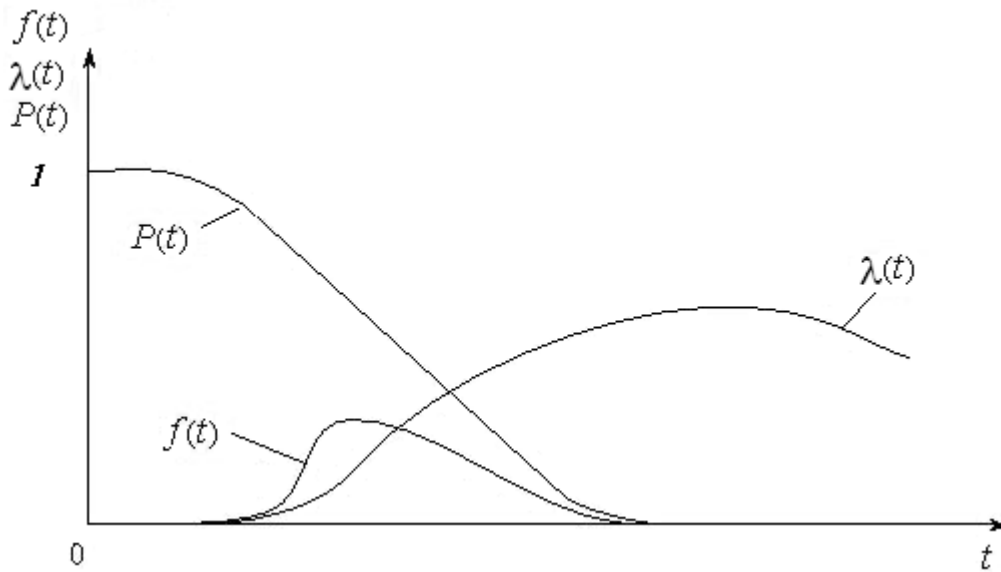


Рис. 2.15. Графіки показників безвідмовності (ІБР, ЦРВ, ІнВ)  
для логарифмічно нормального розподілу

**Гамма-розподіл.** Випадкова величина наробітку до відмови  $T$  має гамма-розподіл з параметрами  $\lambda$  (масштабний параметр) і  $\beta$  (параметр форми), де  $\lambda > 0$ , причому  $\beta$  – ціле число, якщо її ЦРВ описують виразом

$$f(t) = \frac{\lambda^\beta t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-\lambda t), \quad (2.16)$$

де  $\Gamma(\beta)$  – гамма-функція Ейлера або факторіальна функція,  $\Gamma(\beta) = (\beta - 1)!$ . Очевидно, що за  $\beta = 1$  вираз (2.16) спрощується до вигляду (2.12), що відповідає експоненціальному розподілу.

Гамма-розподіл найбільш точно описує розподіл суми незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом.

Якщо  $\beta$  великі, гамма-розподіл зводиться до нормального розподілу з параметрами  $a = \beta\lambda$ ,  $b = \beta\lambda^2$ .

Графіки зміни показників безвідмовності для гамма-розподілу зображено на рис. 2.16.

Числові характеристики наробітку до відмови для гамма-розподілу знаходять за такими формулами:

– середній наробіток (МС наробітку) до відмови:

$$T_0 = \frac{\beta}{\lambda};$$

– дисперсія наробітку до відмови:

$$D = D\{T\} = \frac{\beta}{\lambda^2}.$$

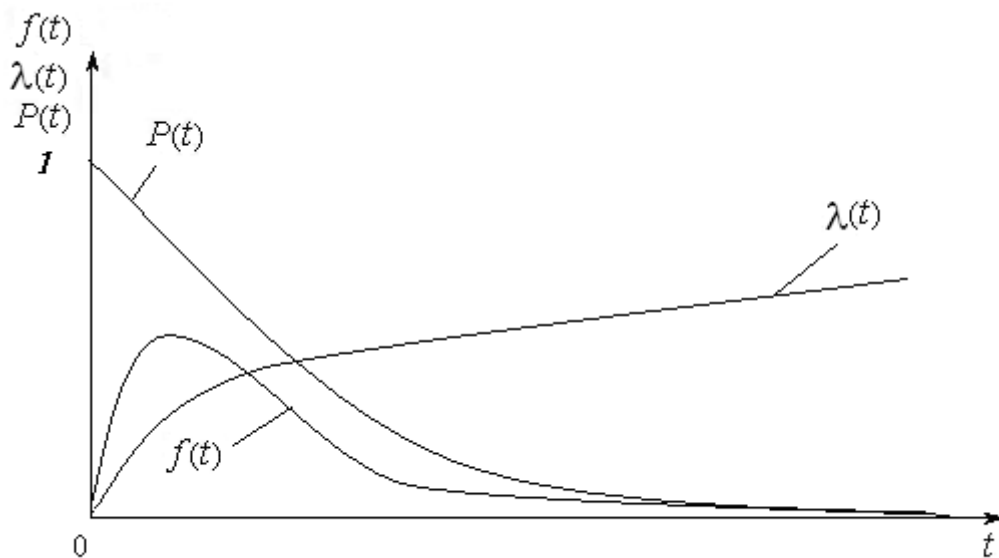


Рис. 2.16. Графіки показників безвідмовності (ІБР, ЦРВ, ІнВ) для гамма-розподілу

Частота відмов для гамма-розподілу залежить від двох параметрів: параметра форми  $\beta$  і параметра масштабу  $\lambda$ . У загальному випадку, якщо  $\beta > 0$ , функцію розподілу можна виразити за допомогою спеціальної функції  $I(\beta, \lambda t)$ , яку називають неповною гамма-функцією, її не можна виразити через елементарні функції. Проте вона протабульована [36], і за таблицями можна знайти її значення для будь-яких  $\beta$  та  $\lambda t$ .

Гамма-розподіл має таку функцію розподілу:

$$F(t) = I(\beta, \lambda t) = 1 - \sum_{i=0}^{\beta-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \quad (2.17)$$

Для цілих  $\beta$  гамма-розподіл перетворюється на розподіл Ерланга, для якого функція розподілу виражається через суму, вказану у формулі (2.17), а за  $\beta = 1$  розподіл Ерланга (як і гамма-розподіл, про що зазначалось вище) стає експоненціальним розподілом.

Вигляд залежності інтенсивності відмов від часу істотно залежить від значення параметра форми. За  $\beta > 1$  інтенсивність відмов – це спадна функція часу, що змінюється зі збільшенням  $t$  від нескінченності до нуля. За  $\beta < 1$  вона зростає від нуля до нескінченності, а за  $\beta = 1$  не залежить від часу, залишаючись сталою величиною. Отже, гамма-розподіл можна використовувати для апроксимації реальних розподілів часу безвідмовної роботи на всіх трьох ділянках життєвого циклу виробу: приробітку ( $\beta > 1$ ), нормальної експлуатації ( $\beta = 1$ ) і старіння ( $\beta < 1$ ). За цілого  $\beta$  виникнення розподілу Ерланга можна пояснити за допомогою моделі пошкоджень, котрі накопичуються, яка полягає в тому, що через випадкові інтервали часу, які мають експоненціальний розподіл, у виробі виникають одиничні пошкодження, а у разі накопичення  $\beta$  пошкоджень він відмовляє.

**Розподіл Вейбулла.** Розподіл Вейбулла добре описує наробіток об'єктів до відмови для руйнувань від «втоми».

Розподіл Вейбулла має такі характеристики:

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^m}; \quad f(t) = m\lambda(\lambda t)^{m-1} e^{-(\lambda t)^m}; \quad T_0 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\lambda};$$

$$D\{T\} = \frac{1}{\lambda^2} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right].$$

Як і гамма-розподіл, це двопараметричний розподіл з параметрами  $m$  та  $\lambda$ . За  $m=1$  він перетворюється на експоненціальний, а за  $m=2$  – у розподіл Релея. Розподіл Вейбулла можна використовувати для

апроксимації реальних розподілів на ділянках приробітку ( $m < 1$ ), нормальної експлуатації ( $m = 1$ ) і старіння ( $m > 1$ ).

Є ймовірнісні схеми, які можна застосовувати до багатьох технічних пристроїв і які будуть мати розподіл Вейбулла. Розглянемо одну з них. Схема є сукупністю великої кількості елементів, в кожному з яких спостерігається гамма-розподіл наробітку до відмови. Під час переходу від елемента до елемента спостерігаються коливання у невеликих межах параметра форми. Тоді пристрій, який створений з цих елементів, можна розглядати як один структурний елемент, що матиме розподіл, близький до розподілу Вейбулла.

**Рівномірний розподіл.** За рівномірного розподілу область допустимих значень випадкової величини перебуває в інтервалі  $[a, b]$ . Розподіл має такі характеристики:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}; \quad f(t) = \frac{1}{b-a}; \quad T_0 = \frac{a+b}{2}; \quad D\{T\} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Функція розподілу дорівнює нулю за  $t < a$  та одиниці за  $t > a$ . Лінійне зростання ймовірності відмови можна використовувати для апроксимації реальних розподілів або для наближеного оцінювання розподілів на основі центральної граничної теореми.

Крім розглянутих законів розподілу можна використовувати також інші моделі безвідмовності об'єктів, наприклад: розподіл Релея, розподіл Лапласа (двосторонній експоненціальний розподіл) і т. п.

## **2.4. Моделі надійності відновлюваного об'єкта**

Модель надійності відновлюваного об'єкта (ВО) включає три складові частини: модель безвідмовності, модель відновлюваності і модель контролю працездатності [3]. Це пов'язане з тим, що процес функціонування об'єкта містить певну послідовність інтервалів безвідмовного наробітку, часу відновлення і часу виявлення прихованих відмов. Якщо всі ці інтервали мають експоненціальні розподіли і

властивість незалежності в сукупності, то модель надійності зводиться до *марковської* моделі функціонування, в якій поведінка об'єкта в майбутньому залежить лише від його стану у певний момент часу і не залежить від передісторії об'єкта. Якщо ж будь-які інтервали, наприклад інтервали часу відновлення, мають не експоненціальний розподіл або ж не мають властивості незалежності, то модель надійності буде напівмарковською або немарковською.

#### 2.4.1. Моделі безвідмовності відновлюваного об'єкта

Модель безвідмовності ВО відрізняється від моделі надійності невідновного об'єкта тим, що у цьому випадку треба розглядати не лише наробіток до першої відмови, але й наробіток між сусідніми відмовами. Якщо розмістити інтервали наробітку один за одним у тій послідовності, в якій наставали відмови, то вийде *потік відмов* як різновид потоку випадкових подій. Вивчення моделі безвідмовності ВО якраз і зводиться до вивчення потоку відмов, адекватного реальному процесу функціонування. У теорії потоків випадкових подій аналізують характеристики двох випадкових величин: кількості подій  $n$  в інтервалі  $(0, t)$  або  $(\tau, \tau + t)$  і наробітку до  $n$ -ї події (у нашому випадку – відмови).

Характеристиками потоку відмов є:

1. Ймовірність настання рівно  $n$  відмов до наробітку  $t$ :

$$P_n(t) = P(n(t) = n); P_n(\tau, \tau + t) = P(n(\tau, t) = n). \quad (2.18)$$

2. Ймовірність того, що до наробітку  $t$  настане більше ніж  $n$  відмов:

$$\pi_n(t) = P(n(t) > n) = \sum_{i=n}^{\infty} P_i(t); \quad (2.19)$$

$$\pi_n(\tau, t) = P(n(\tau, t) > n) = \sum_{i=n}^{\infty} P_i(\tau, t).$$

3. Середня кількість відмов до заданого наробітку, або провідна функція потоку відмов:

$$H(t) = M\{n(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n(t); \quad (2.20)$$

$$H(\tau, t) = M\{n(\tau, t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n(\tau, t) = H(\tau + t) - H(\tau).$$

4. Інтенсивність потоку відмов:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{P_n(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{dH(t)}{dt}; \quad (2.21)$$

$$\omega(\tau, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{P_n(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial H(\tau, t)}{\partial t}.$$

5. Параметр потоку відмов:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial \pi_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0};$$

$$\begin{aligned} v(\tau, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_1(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial \pi_1(\tau + t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = v(\tau + t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

6. Дисперсія кількості відмов до заданого наробітку:

$$\begin{aligned} D\{n(t)\} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - H^2(t); \\ D\{n(\tau, t)\} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(\tau, t) - H^2(\tau, t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

7. Розподіл наробітку до  $n$ -ї відмови:

$$F_n(t) = P(T_{in} < t) = \pi_n(t). \quad (2.24)$$

У моделях безвідмовності ВО використовують декілька класів потоків відмов. Щоб сформулювати їх класифікаційні ознаки, потрібно визначити деякі *властивості* потоків, які потоки можуть мати [3]:

1. Потік відмов називають *стаціонарним*, якщо ймовірність настання певної кількості відмов у заданому проміжку часу (або до заданого наробітку) залежить лише від значення цього проміжку і не залежить від його розташування на осі часу. Математично цю властивість відображають формулою

$$P_n(\tau, t) = P_n(0, t) = P_n(t). \quad (2.25)$$

2. Потік відмов називають *ординарним*, якщо ймовірність настання двох або більше подій в малому проміжку часу є величиною вищого порядку малості, ніж величина цього проміжку:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_2(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_2(t, \Delta t)}{\pi_1(t, \Delta t)} = 0. \quad (2.26)$$

Інакше цю властивість можна виразити так:  $\pi_2(t, \Delta t) = \varepsilon(\Delta t)$ . Застосовуючи властивість (2.26) у формулах (2.21) і (2.22), встановлюємо, що для будь-якого ординарного потоку інтенсивність і параметр потоку збігаються кількісно:

$$\omega(t) = \nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t, \Delta t)}{\Delta t} = \left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (2.27)$$

3. Потік відмов називають *потокем без післядії*, якщо ймовірність настання деякої кількості відмов у заданому проміжку часу не залежить від того, скільки відмов і в які моменти часу настало до цього проміжку. Це означає, що умовна ймовірність настання  $n$  відмов у проміжку  $(\tau, \tau + t)$ , визначена з довільним припущенням передісторії  $A$  про настання відмов до цього проміжку, збігається з безумовною ймовірністю:

$$P_n(\tau, t | A) = P_n(\tau, t). \quad (2.28)$$

4. Потік відмов називають *потокем з обмеженою післядією*, якщо з передісторії  $A$  істотно лише те, в який момент часу  $x$  настала остання відмова перед цим проміжком часу:

$$P_n(\tau, t|A) = P_n(\tau, t|x). \quad (2.29)$$

Звідси випливає, що для потоку з обмеженою післядією інтервали наробітку між сусідніми відмовами незалежні в сукупності.

5. Потік відмов, що не має властивостей, описаних у пп. 3 та 4 (без післядії та обмеженої післядії), називають *поток*ом зі складною післядією.

За наявності вказаних властивостей виділяють п'ять *класів* потоків відмов (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

**Класифікація потоків відмов**

Найменування потоку відмов	Позначення	Властивості				
		1	2	3	4	5
1. Стаціонарний пуасонівський потік	СПП	+	+	+	–	–
2. Нестационарний пуасонівський потік	НПП	–	+	+	–	–
3. Узагальнений пуасонівський потік	УПП	+	+	–	–	+
4. Рекурентний потік	РП	–	+	–	+	–
5. Стаціонарний рекурентний потік	СРП	+	+	–	+	–

Стаціонарний і нестационарний пуасонівські потоки відповідають марковській моделі безвідмовності, рекурентний і стаціонарний рекурентний потоки відповідають напівмарковській моделі, а узагальнений пуасонівський потік – немарковській моделі безвідмовності.

#### 2.4.2. Характеристики потоків відмов

Для кожного класу потоків можуть бути знайдені основні характеристики відповідно до формул (2.18)–(2.24). Подамо



розрахункові формули для характеристик без детального виведення, яке можна знайти в роботі [3].

**Найпростіший потік відмов.** Найпростіший потік відмов є стаціонарним ординарним потоком без післядії, тобто є СПП. Використовуючи ці властивості у формі формул (2.25)–(2.29), можна встановити, що кількість відмов в інтервалі  $(0, t)$  має пуасонівський розподіл з параметром  $\alpha = \lambda t$ , тобто

$$P_n(\tau, t) = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Середнє значення і дисперсію кількості відмов до наробітку  $t$  знаходять за формулою

$$H(\tau, t) = H(t) = D\{n(t)\} = \lambda t.$$

Звідси випливає, що інтенсивність і параметр потоку відмов збігаються з параметром  $\lambda$  пуасонівського розподілу, тобто  $\omega(t) = \nu(t) = \lambda$ .

Використовуючи вираз (2.24), знаходимо:

$$F_n(t) = P(T_{in} < t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Наробіток до  $n$ -ї відмови має розподіл Ерланга з параметрами  $n$  та  $\lambda$ . Оскільки цей розподіл є розподілом суми  $n$  незалежних доданків, кожний з яких має експоненціальний розподіл з параметром  $\lambda$ , наробіток між відмовами має розподіл

$$F_1(t) = P(T_H < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Звідси випливає, що для визначення всіх характеристик простого потоку досить знати числове значення параметра  $\lambda$ .

**Нестаціонарний пуасонівський потік відмов.** Нестаціонарний пуасонівський потік (НПП) відмов є ординарним потоком без післядії. Із цих двох властивостей за заданої функції інтенсивності потоку  $\omega(t)$  можна знайти решту всіх характеристик. Розподіл кількості відмов в інтервалі  $(\tau, \tau + t)$  є пуасонівським з параметром  $\alpha = H(\tau, t)$ , тобто

$$P_n(\tau, t) = \frac{H^n(\tau, t)}{n!} e^{-H(\tau, t)};$$

$$H(\tau, t) = D\{n(\tau, t)\} = H(\tau + t) - H(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+t} \omega(x) dx.$$

Якщо  $\tau = 0$ , провідна функція потоку  $H(0, t) = H(t)$ . Зокрема, якщо  $H(t) = \lambda t$ , то НПП стає найпростішим потоком.

**Узагальнений пуасонівський потік відмов.** Узагальнений пуасонівський потік відмов отримують як СПП з випадковим параметром  $\lambda$ , що має відомий розподіл  $\Phi(\lambda)$ . Тому ймовірність настання  $n$  відмов до наробітку  $t$  можна знайти за формулою

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda). \quad (2.30)$$

Зокрема, за  $n = 0$  маємо:

$$P_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda) = \Phi^*(t), \quad (2.31)$$

де  $\Phi^*(t)$  – операційне перетворення Лапласа–Стільтєса функції розподілу  $\Phi(\lambda)$ . Диференціюючи формулу (2.31) за часом і порівнюючи результат з формулою (2.30), отримаємо співвідношення

$$P_n(t) = \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} P_0(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.32)$$

Початкові моменти розподілу для УПП і СПП пов'язані співвідношенням

$$M\{n^k(t)\} = \int_0^{\infty} M\{n^k(t, \lambda)\} d\Phi(\lambda), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Зокрема, за  $n = 1$  та  $n = 2$  з урахуванням формули (2.32) маємо

$$H(t) = \int_0^{\infty} \lambda t d\Phi(\lambda) = \bar{\lambda}t; \quad \bar{\lambda} = \int_0^{\infty} \lambda d\Phi(\lambda); \quad (2.33)$$

$$M\{n^2(t)\} = \int_0^{\infty} (\lambda t + \lambda^2 t^2) d\Phi(\lambda) = \bar{\lambda}t + \alpha_{2\lambda}t^2, \quad \alpha_{2\lambda} = \int_0^{\infty} \lambda^2 d\Phi(\lambda), \quad (2.34)$$

де  $\bar{\lambda}$  та  $\alpha_{2\lambda}$  – перший і другий початкові моменти розподілу  $\Phi(\lambda)$ .

З формул (2.33) та (2.34) знаходимо інтенсивність потоку відмов і дисперсію кількості відмов до наробітку  $t$ :

$$\omega(t) = \omega = \bar{\lambda}; \quad D\{n(t)\} = \bar{\lambda}t + (\alpha_{2\lambda} - \bar{\lambda}^2)t^2.$$

Звідси випливає, що інтенсивність потоку відмов не залежить від часу. Це доводить стаціонарність УПП. Крім того, УПП ординарний за побудовою, оскільки усереднювання за формулою (2.30) характеристик ординарного потоку СПП не може порушити ординарності потоку. З формул (2.30) та (2.32) також випливає, що способи завдання УПП за допомогою  $\Phi(\lambda)$  і  $P_0(t)$  еквівалентні один одному.

**Рекурентний потік відмов.** Рекурентний потік відмов задають за допомогою функції розподілу наробітку між відмовами  $F(t)$  або його зображення за Лапасом–Стільтєсом:

$$F^*(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(t).$$

Враховуючи, що наробіток до  $n$ -ї відмови  $T_{nn}$  є сумою незалежних доданків (наробітків між відмовами), і кожен доданок має розподіл  $F(t)$ , використовуємо для знаходження розподілу  $T_{nn}$  операцію декомпозиції:

$$F_n(t) = \int_0^{\infty} F_{n-1}(t-x) dF(x).$$

Застосовуючи тут операційне перетворення Лапласа–Стільтєса і знижуючи індекс  $n$ , отримаємо зображення функції розподілу:

$$F_n^*(s) = (F^*(s))^n = \pi_n^*(s). \quad (2.35)$$

$$\text{Звідси } P_n^*(s) = \pi_n^*(s) - \pi_{n+1}^*(s) = (1 - F^*(s))(F^*(s))^n.$$

Обернене перетворення у функції (2.35) дає можливість знайти явний вигляд функції  $F_n(t)$ . З допомогою рівнянь (2.20) і (2.35) знайдемо зображення для провідної функції потоку:

$$H^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (F^*(s))^n = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}. \quad (2.36)$$

Формулі (2.36) у комплексній області відповідає інтегральне рівняння у часовій області:

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x). \quad (2.37)$$

Помножуючи складові функції (2.36) почленно на  $s$  і диференціюючи формулу (2.37) справа і зліва, отримаємо рівняння для інтенсивності потоку відмов і формулу для її зображення:

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t \omega(t-x) f(x) dx; \quad \omega^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)}. \quad (2.38)$$

У виразі (2.38)  $f(t)$  – щільність розподілу наробітку між відмовами,  $f(t) = F'(t)$ .

**Стаціонарний рекурентний потік відмов (типу Пальма).** Характеристики стаціонарного рекурентного потоку (СРП) отримують з характеристик рекурентного потоку за допомогою граничного переходу за  $t \rightarrow \infty$  або  $\tau \rightarrow \infty$ . Граничний перехід за  $\tau \rightarrow \infty$  дає вираз для ймовірності відсутності відмов в інтервалі тривалістю  $t$ :

$$P_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P_0(\tau, t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} (1 - F(\tau + t - x)) dH(x). \quad (2.39)$$

Використовуючи теорему Сміта за  $Q(x) = 1 - F(\tau + t)$ , з формули (2.39) отримаємо

$$P_0(t) = \omega \int_t^{\infty} [1 - F(x)] dx = \frac{\int_t^{\infty} [1 - F(x)] dx}{\int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx}. \quad (2.40)$$

Функція розподілу наробітку до першої відмови

$$F_1(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau, t) = 1 - P_0(t) = \omega \int_0^t [1 - F(x)] dx. \quad (2.41)$$

Звідси випливає, що СРП складається з послідовності інтервалів наробітку між відмовами, з яких перший має розподіл вигляду функції (2.41), а останній – розподіл  $F(t)$ .

### 2.4.3. Моделі відновлюваності

Процес відновлення працездатності передбачає виконання декількох різних за призначенням операцій, а тому час відновлення можна подати у вигляді суми:

$$T_{\text{в}} = T_{\text{в.від}} + T_{\text{лок}} + T_{\text{ус}} + T_{\text{нал}} + T_{\text{п.п}}, \quad (2.42)$$

де  $T_{\text{в.від}}$  – час виявлення відмови;  $T_{\text{лок}}$  – час локалізації відмови;  $T_{\text{ус}}$  – час усунення відмови;  $T_{\text{нал}}$  – час налагодження апаратури об'єкта після усунення відмови;  $T_{\text{п.п}}$  – час передпускової перевірки об'єкта.

Розглядаючи кожну з цих операцій як випадковий процес, можна вважати доданки у формулі (2.42) випадковими величинами з функціями розподілу, що залежать від ремонтпридатності, алгоритмів функціонування і правил технічного обслуговування об'єкта. Час виявлення відмови обчислюють від моменту виникнення відмови до вироблення сигналу про появу відмови, він залежить від методу контролю працездатності. У ЛА контроль може здійснювати або оператор – без спеціального контрольного устаткування, за непрямыми ознаками, або система автоматичного контролю працездатності. В

останньому випадку розрізняють контроль апаратурний – за допомогою засобів, вбудованих в контрольовану апаратуру, і контроль програмний, що використовує основну апаратуру і спеціальні контрольні програми, реалізовані в спеціалізованих логічних пристроях або комп'ютерах. За регламентом проведення розрізняють контроль періодичний і неперервний. Час виявлення відмови буде найменшим, коли все устаткування ЛА має неперервний апаратурний контроль, а найбільшим – коли контроль періодичний з великим періодом або контроль за непрямыми ознаками.

Локалізацію відмови, тобто визначення місця відмови з точністю до змінного модуля, можна здійснювати як вручну з допомогою обслуговуючого персоналу, так і автоматично, за допомогою засобів технічної діагностики. І в тому, і в іншому випадку час локалізації істотно залежить від стратегії пошуку несправності. Розробляють методи пошуку та аналізують їх ефективність у процесі технічної діагностики.

Час усунення відмови обчислюють від моменту локалізації відмови до її усунення (ремонт або заміна елемента, який відмовив, працездатним). У нього входять час доставки модуля, що відмовив, до місця ремонту, час чекання початку обслуговування, викликане причинами, не пов'язаними з доставкою, і власне час ремонту або заміни елемента, котрий відмовив. Зрозуміло, що час усунення істотно залежить від організації системи технічного обслуговування, від розташування і продуктивності ремонтних органів, підготовки ремонтного персоналу.

Налагодження і передпускова перевірка працездатності об'єкта – завершальні операції. Вони включають вимірювання і регулювання значень контрольних параметрів і тестову перевірку, що полягає у виконанні контрольних завдань.

Під час побудови моделі відновлюваності потрібно знайти розподіл часу відновлення за заданих умов технічного обслуговування і ремонту. Хоча принципово і є можливість теоретично проаналізувати вплив

названих чинників на розподіл часу відновлення, не завжди вдається зробити це на практиці повною мірою. Особливо важко врахувати кваліфікацію та умови роботи ремонтного персоналу. Тому частіше знаходять розподіл, використовуючи статистичні дані журналів ремонтних органів і підприємств. Інколи вдається пояснити механізм виникнення спостережуваних закономірностей зміни часу відновлення.

Якщо зі всіх доданків формули (2.42) основним є час усунення, та апаратуру конструюють так, що її елементи, які часто виходять з ладу, вимагають найменшого часу ремонту порівняно з елементами, які відмовляють рідко, то, найімовірніше, спостерігатиметься експоненціальний розподіл часу відновлення

$$F_B(t) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-\frac{t}{\bar{T}_B}},$$

де  $\mu$  – інтенсивність відновлення;  $\bar{T}_B$  – середній час відновлення. Експоненціальний розподіл спостерігається також у тому випадку, якщо відмова усувається досить швидко заміною елемента, що відмовив, працездатним, а визначальним у формулі (2.42) є час пошуку несправності. При цьому ремонтний персонал, який набув певний досвід, веде пошук несправностей цілеспрямовано, перевіряючи спочатку «слабкі» елементи, які відмовляють частіше, а потім вже елементи з меншою інтенсивністю відмов.

Якщо усі складові частини об'єкта мають однакову інтенсивність відмов і приблизно однакове значення часу усунення відмов, то в обслуговуючого персоналу немає підстав віддавати перевагу тій або іншій частині. Тоді для побудови моделі можна використовувати рівномірний розподіл

$$F_B(t) = \begin{cases} 0, & t < a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq b; \\ 1, & t > b. \end{cases}$$

Якщо у формулі (2.42) дві або більше складових роблять в середньому однаковий внесок під час відновлення і мають експоненціальні розподіли з параметром  $\mu$ , а решта доданків малі, то час відновлення має розподіл Ерланга (2.17) з параметрами  $k$  та  $\mu$ :

$$F_B(t) = I(k, \mu t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t},$$

де  $k$  – кількість доданків.

В об'єктах, в яких конструктивними та алгоритмічними прийомами не вдається забезпечити малий час відновлення у елементів, які відмовляють частіше, спостерігається нормальний (симетричний) або логарифмічно нормальний (асиметричний) розподіли. У деяких випадках задовільною є модель з постійним часом відновлення  $T_B$  і виродженою функцією розподілу:

$$F_B(t) = \begin{cases} 0, & t < T_B; \\ 1, & t \geq T_B. \end{cases}$$

Моделі відновлюваності можна підбирати окремо для кожного елемента, модуля, вузла, для груп вузлів або для всіх елементів системи. В них можуть використовуватися різні розподіли або один клас розподілів і розрізнятися лише значеннями параметрів.

#### **2.4.4. Моделі контролю і діагностування відновлюваних об'єктів**

Тривалість контролю і діагностування під час виявлення і локалізації відмови включені в час відновлення [4], проте не вказується, якими ресурсами і в якій кількості забезпечуються ці характеристики, якими є повнота і достовірність контролю і діагностування. Відповіді на ці питання повинна дати модель контролю і діагностування. Важливість цієї моделі визначають два аспекти. З одного боку, контроль і діагностування покращують показники надійності, оскільки дають



можливість зменшити частку прихованих відмов або навіть виключити їх і поліпшити показники відновлюваності. З другого боку, на організацію і проведення контролю і діагностування витрачаються певні ресурси (апаратура, місткість пам'яті, час функціонування), і це знижує показники надійності, оскільки апаратура контролю сама може відмовляти, збільшення часу функціонування збільшує ризик відмови основної апаратури, вимушене підвищення продуктивності пристроїв для компенсації втрат часу може зумовлювати зростання інтенсивності відмов. Неідеальність контролю знижує ефективність структурного резервування і змушує збільшувати кратність резервування, тобто спричиняє додаткові витрати ресурсів.

Вибір та оптимізація параметрів системи контролю і діагностування можуть бути виконані під час аналізу комплексної моделі надійності. Перед моделлю контролю ставляться обмежені завдання, а саме: встановлення залежності помилок першого і другого роду (невиявлення виниклих відмов і видача помилкового сигналу про відмову) від виділених ресурсів. Для оцінювання апаратурних витрат на організацію вбудованого контролю зазвичай використовують евристичні моделі. З них найбільш відомі логарифмічна і ступенева моделі. Згідно з логарифмічною моделлю, коефіцієнт повноти контролю  $\alpha$  пов'язаний з коефіцієнтом відносних витрат апаратури на систему контролю  $\delta = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$  співвідношенням

$$\delta = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{1-\alpha}; \alpha = 1 - e^{-a\delta},$$

де  $\lambda_k$  та  $\lambda_0$  – інтенсивності відмов контрольного та основного устаткування;  $a$  – параметр моделі, що змінюється для різних пристроїв у межах (5...10). З цією моделлю добре узгоджуються експериментальні дані за  $\alpha < 0,98$ . Узагальненням логарифмічної моделі є двопараметрична модель типу Вейбулла

$$\delta = \frac{1}{a} \left( \ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^m; (b-a)\alpha = 1 - \exp[-(a\delta)^m], \quad (2.43)$$

де параметр  $m$  підбирають у діапазоні  $0,8 < m < 1,2$ . Ступенева модель встановлює співвідношення  $\delta = \alpha^m$ ;  $\alpha = \delta^{\frac{1}{m}}$ ;  $m \gg 1$ .

Ця модель добре узгоджується з експериментальними даними за великих  $\alpha$  ( $\alpha > 0,98$ ). Під час програмного контролю коефіцієнт повноти тестування  $\alpha$  залежить від тривалості тестування  $t_k$ . Така залежність може бути подана у вигляді

$$t_k = t_k^0 f(\alpha), \quad \alpha = \varphi(t_k), \quad t_k \leq t_k^0, \quad (2.44)$$

де  $t_k^0$  – тривалість повного тесту. Залежності (2.44) істотно нелінійні, і для їх опису можна використовувати залежність типу (2.43), в якій  $\delta = \frac{L}{L_0}$  знаходять як відношення тривалостей неповного і повного тестів.

У ступеневій моделі  $\delta = \frac{L}{L_0}$  також знаходять як відношення тривалостей неповного і повного тестів. Параметри  $a$  та  $m$  визначають з експериментальних даних методом найменших квадратів.

## 2.5. Розрахунок показників надійності

Метод розрахунку показників надійності і розрахункові формули визначають за типом використовуваної моделі надійності, залежним, у свою чергу, від типу моделей безвідмовності, відновлюваності і діагностування.

### 2.5.1. Марковська модель

Оскільки одиничні показники надійності, зокрема показники безвідмовності, були розглянуті у розд. 1, для марковської моделі проаналізуємо деякі комплексні показники і знайдемо розрахункові

формули для нестационарного  $K_r(t)$  та стаціонарного  $K_r$  коефіцієнтів готовності, нестационарного  $K_{o.r}(\tau, t)$  і стаціонарного  $K_{o.r}(t)$  коефіцієнтів оперативної готовності, середньої кількості відновлень  $H_2(t)$  за час  $t$  та інтенсивності потоку відновлення  $\omega_2(t)$ . Вважаємо, що потік відмов елемента найпростіший з параметром  $\lambda$ , розподіл часу відновлення експоненціальний з параметром  $\mu$ , контроль працездатності ідеальний, тобто всі відмови, що виникають, виявляються миттєво і достовірно.

Елемент, для якого дотримані ці умови, може перебувати в одному з двох станів: «0» (працездатний) або «1» (непрацездатний і ремонтується). Інтенсивності переходів з одного стану в інший постійні і дорівнюють  $\lambda$  для переходу  $0 \rightarrow 1$  і  $\mu$  для переходу  $1 \rightarrow 0$ . Ймовірності  $P_i$   $t$  виявити (застати) елемент у стані  $i=0$  або  $i=1$  знаходять із системи диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \quad \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \quad (2.45)$$

з початковими умовами  $P_0(0)=1$ ,  $P_1(0)=0$ . Виконуючи у рівнянні (2.45) операційне перетворення Лапласа–Карсона, отримаємо

$$K_r^*(s) = P_0^*(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -\mu \\ 0 & s + \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + \lambda & -\mu \\ -\lambda & s + \mu \end{vmatrix}} = \frac{s + \mu}{s + \mu + \lambda} = 1 - \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu}. \quad (2.46)$$

Після оберненого перетворення формула (2.46) матиме вигляд

$$K_r^*(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (2.47)$$

Звідси коефіцієнт готовності

$$K_r = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Щоб знайти  $H_2(t)$ , виконаємо у рівнянні (1.24a) операційне перетворення

$$H_2^*(s) = \frac{V^*(s)}{1 - V^*(s)}, \quad (2.48)$$

де

$$V^*(s) = F^*(s)F_b(s) = \frac{\lambda\mu}{(s + \mu)(s + \lambda)}. \quad (2.49)$$

Підставимо вираз (2.49) у формулу (2.48):

$$H_2^*(s) = \frac{\lambda\mu}{s(s + \lambda + \mu)} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda + \mu} \right).$$

$$\text{Звідси } H_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \left( t - \frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right).$$

Диференціюючи  $H_2(t)$  за часом, знайдемо інтенсивність потоку відновлень:

$$\omega_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}). \quad (2.50)$$

Порівнюючи формули (2.47) та (2.50), отримаємо зв'язок між характеристиками:

$$K_r(t) = 1 - \frac{\omega_2(t)}{1 - \omega_2(t)} = 1 - \bar{T}_b \omega_2(t).$$

Використовуючи основну властивість експоненціального розподілу, згідно з яким ймовірність безвідмовної роботи елемента у проміжку тривалістю  $t$  не залежить від того, скільки часу елемент пропрацював до досягнення цього проміжку, можна подати нестационарний коефіцієнт оперативної готовності у вигляді добутку нестационарного коефіцієнта готовності та ймовірності безвідмовної роботи:

$$K_{o.\Gamma}(\tau, t) = K_{\Gamma}(\tau)e^{-\lambda t} = \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)\tau} \right) e^{-\lambda t}. \quad (2.51)$$

$$\text{Стаціонарне значення } K_{o.\Gamma}(t) = K_{\Gamma}e^{-\lambda t} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-\lambda t}.$$

Якщо в елементі можуть бути приховані відмови і їх частка від загальної кількості відмов становить  $\beta = 1 - \alpha$ , а час виявлення (проявлення) прихованої відмови має експоненціальний розподіл з параметром  $\nu$ , то у графі станів з'являється один додатковий стан «2» (елемент непрацездатний, але відмова не виявлена). Інтенсивності переходів мають такі значення:  $\alpha\lambda$  для переходу  $0 \rightarrow 1$ ;  $\beta\lambda$  для переходу  $0 \rightarrow 2$ ;  $\nu$  для переходу  $2 \rightarrow 1$ ;  $\mu$  для переходу  $1 \rightarrow 0$ .

Стаціонарні ймовірності станів знаходять із системи алгебраїчних рівнянь Колмогорова:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0; \quad \alpha\lambda p_0 + \nu p_2 - \mu p_1 = 0; \quad \beta\lambda p_0 - \nu p_2 = 0; \quad p_0 + p_1 + p_2 = 0.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт готовності і коефіцієнт контрольованої готовності:

$$K_{\Gamma} = p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \beta \frac{\lambda}{\nu}}; \quad K_{\kappa.\Gamma} = p_0 + p_2 = \frac{1 + \frac{\beta\lambda}{\nu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \beta \frac{\lambda}{\nu}}. \quad (2.51a)$$

Згідно з формулою (1.33a), ймовірність безвідмовного використання (застосування)

$$P_3(t) = \frac{K_{\Gamma}e^{-\lambda t}}{K_{\kappa.\Gamma}} = \frac{\nu}{\nu + \beta\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{1}{1 + \frac{\beta\lambda}{\nu}} e^{-\lambda t}. \quad (2.52)$$

Як впливає з виразів (2.51a) та (2.52), міра впливу прихованих відмов на показники надійності залежить від відношення  $\frac{\beta}{\nu} = \beta \bar{T}_{\text{в.від}}$ , тобто від частки прихованих відмов і середнього часу їх виявлення

непрямими методами. Якщо значення  $T_{\text{в.від}}$  велике порівняно з  $\beta$ , то зниження ймовірності безвідмовної роботи буде значним навіть за невеликої частки прихованих відмов.

### 2.5.2. Напівмарковська модель

Модель надійності відновлюваного елемента називають напівмарковською, якщо потік відмов рекурентний із заданою функцією розподілу наробітку між сусідніми відмовами  $F(t)$ , а час відновлення має довільний розподіл  $F_{\text{в}}(t)$ . Розглянемо випадок, коли контроль працездатності ідеальний і всі відмови виявляють у момент їх виникнення. Тоді, згідно з формулами (2.48) та (2.49), функція середньої кількості відновлень за час  $t$  має операційне зображення

$$H_2^*(s) = \frac{F^*(s)F_{\text{в}}^*(s)}{1 - F^*(s)F_{\text{в}}^*(s)}. \quad (2.53)$$

Підставляючи у функцію (2.53) зображення відомих функцій  $F(t)$  та  $F_{\text{в}}(t)$  і переходячи до оригінала, отримаємо спочатку  $H_2(t)$ , а потім інтенсивність потоку відновлень  $\omega_2(t)$ .

Щоб отримати вираз для нестационарного коефіцієнта готовності, врахуємо, що у момент  $t$  елемент може опинитися у працездатному стані двома несумісними способами: або за час  $t$  елемент жодного разу не відмовить (з імовірністю  $1 - F(t)$ ), або до моменту  $t$  станеться, принаймні, одна відмова і ця відмова буде усунена у момент  $x < t$  (ймовірність цієї події  $dH_2(t)$ ), а після моменту  $x$  протягом інтервалу  $t - x$  елемент пропрацює безвідмовно (з імовірністю  $1 - F(t - x)$ ). Підсумовуючи ймовірність неспільних подій, отримаємо

$$K_T(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t - x)] dH_2(x). \quad (2.54)$$

Виконаємо в рівнянні (2.54) операційне перетворення і врахуємо вираз (2.53). Тоді

$$K_{\Gamma}^*(s) = \frac{1 - F^*(s)}{1 - F^*(s)F_B^*(s)}. \quad (2.55)$$

Використовуючи тауберову теорему, з виразу (2.55) легко знайти стаціонарне значення коефіцієнта готовності:

$$\begin{aligned} K_{\Gamma} &= \lim_{s \rightarrow 0} K_{\Gamma}^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - F^*(s)}{1 - F^*(s)F_B^*(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - s\bar{T}_0 + o(s)]}{1 - [1 - s\bar{T}_0 + o(s)][1 - s\bar{T}_B + o(s)]} = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_0 + \bar{T}_B}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Завдяки рекурентному потоку відмов тут середній наробіток на відмову збігається з середнім наробітком до першої відмови.

Щоб знайти нестаціонарний коефіцієнт оперативної готовності, використовуємо формулу (2.41), замінивши у ній  $H(t)$  і  $\omega(t)$  на  $H_2(t)$  і  $\omega_2(t)$ . Тоді

$$K_{\text{оп.}\Gamma}(\tau, t) = 1 - F(\tau + t) + \int_0^{\tau} [1 - F(\tau + t - x)] dH_2(x). \quad (2.57)$$

Щоб отримати стаціонарне значення, треба у формулі (2.57) виконати граничний перехід  $\tau \rightarrow \infty$ . Використовуючи теорему Сміта, з виразу (2.40) за  $Q(t) = 1 - F(\tau + t)$  знаходимо

$$\begin{aligned} K_{\text{оп.}\Gamma}(t) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{\text{оп.}\Gamma}(\tau, t) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} [1 - F(\tau + t - x)] dH_2(x) = \frac{1}{\bar{T}_{\text{ср}}} \int_0^{\infty} [1 - F(\tau + t)] dx, \end{aligned} \quad (2.57a)$$

де  $\bar{T}_{\text{ср}} = \bar{T}_0 + \bar{T}_B$  – середнє значення часу між моментами відновлення, яке є першим моментом розподілу  $V(t)$ . Перетворюючи вираз (2.57a), отримаємо

$$K_{\text{оп.г}}(t) = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_0 + \bar{T}_B} \frac{1}{\bar{T}_0} \int_0^\infty [1 - F(\tau + t)] dx = K_{\Gamma} P_0(t). \quad (2.58)$$

Вираз для знаходження  $P_0(t)$  беруть з формули (2.40). Отже, коефіцієнт оперативної готовності отримують як добуток коефіцієнта готовності на ймовірність безвідмовної роботи на стаціонарній ділянці експлуатації.

## 2.6. Приклади розв'язання задач

**Приклад 2.1.** Нехай  $F(t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$ ,  $F_B(t) = 1 - e^{-\mu t}$ . Треба знайти  $H_2(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $K_{\Gamma}(t)$ ,  $K_{\text{оп.г}}(t)$ .

**Р о з в' я з а н н я.** Знаходимо зображення

$$F^*(s) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^2; \quad F_B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s}. \quad (2.59)$$

Якщо підставити формули (2.59) у вираз (2.53), отримаємо

$$H_2^*(s) = \frac{\lambda^2 \mu}{s(s^2 + s(2\lambda + \mu) + \lambda^2 + 2\lambda\mu)} = \frac{\lambda^2 \mu}{s(s + s_1)(s + s_2)}, \quad (2.60)$$

де  $s_{1,2} = \frac{s\lambda + \mu}{2} \pm \sqrt{\frac{(2\lambda + \mu)^2}{4} - \lambda(\lambda + 2\mu)}$ . У формулі (2.60) є два простих полюси й один двократний. Визначаючи в них лишки, отримаємо



$$\begin{aligned}
H_2(t) &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \lambda t - \frac{\lambda}{s_2 - s_1} (e^{-s_2 t} - e^{-s_1 t}) - \frac{\lambda(2\lambda + \mu)}{s_2 - s_1} \left( \frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 t}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 t}) \right) \right) = \\
&= \frac{\lambda \mu t}{\lambda + 2\mu} - \frac{\mu(2\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} - \frac{\lambda \mu}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) \left( \frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 t}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 t}) \right) = \quad (2.61) \\
&= \frac{\lambda \mu t}{\lambda + 2\mu} - \frac{\mu(2\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} - \frac{\lambda \mu}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) - \\
&- \frac{2\lambda + \mu}{\lambda(\lambda + 2\mu)} (s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}).
\end{aligned}$$

Диференціювання у формулі (2.61) дає

$$\omega_2(t) = \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda \mu(2\lambda + \mu)}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) + \frac{\lambda \mu}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (s_1 e^{-s_1 t} - s_2 e^{-s_2 t}).$$

Знайдемо тепер нестационарний коефіцієнт готовності. Підставимо формулу (2.60) у вираз (2.55):

$$K_{\Gamma}^*(s) = 1 - \frac{F^*(s)[1 - F_B^*(s)]}{1 - F^*(s)F_B^*(s)} = 1 - \frac{\lambda^2}{(s + s_1)(s + s_2)}.$$

$$\text{Звідси } K_{\Gamma}(t) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( 1 - \frac{s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1} \right).$$

Нарешті, враховуючи, що  $\bar{T}_0 = \frac{1}{2\lambda}$ ,  $\bar{T}_B = \frac{1}{\mu}$ , з рівняння (2.58) отримаємо

$$K_{\text{оп.г}}(t) = \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} \int_t^{\infty} (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} dx = \frac{\mu(2 + \lambda t)}{\lambda + 2\mu} e^{-\lambda t}.$$

Якщо контроль працездатності неідеальний, і частка прихованих відмов дорівнює  $\beta$ , то нестационарний коефіцієнт готовності знаходять з інтегрального рівняння

$$K_{\Gamma}(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \alpha \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{t-x} K_{\Gamma}(t-x-y) dF_{\text{B}}(y) + \\ + \int_0^t \beta \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{t-x} dG(y) \int_0^{t-x-y} K_{\Gamma}(t-x-y-z) dF_{\text{B}}(z). \quad (2.62)$$

У рівнянні (2.62) враховано три неспільних випадки: а) протягом часу  $t$  елемент не відмовляє; б) у момент  $x$  виникає виявлена відмова і через час  $y$  вона усувається; в) у момент  $x$  виникає прихована відмова, через час  $y$  вона виявляється непрямими (побічними) засобами і через час  $z$  усувається. Виконуючи у рівнянні (2.62) операційне перетворення Лапласа–Стільтєса, знайдемо

$$K_{\Gamma}^*(s) = \frac{s}{s + \lambda \{1 - F_{\text{B}}^*(s)[\alpha + \beta G^*(s)]\}}. \quad (2.63)$$

Виконуючи у рівнянні (2.63) граничний перехід  $s \rightarrow 0$ , згідно з тауберовою теоремою отримаємо стаціонарний коефіцієнт готовності

$$K_{\Gamma} = \frac{1}{1 + \lambda(\bar{T}_{\text{B}} + \beta \bar{T}_3)}.$$

Звідси за  $\beta = 0$  отримаємо вираз (2.56), а за  $\bar{T}_{\text{B}} = \frac{1}{\mu}$ ,  $\bar{T}_3 = \frac{1}{\nu}$  – формулу (2.51).

**Приклад 2.2.** Кількість однакових пристроїв для аеронавігаційної системи літака, які поставлені на випробування надійності, становить  $N = 40$  штук. Тривалість спостереження або експерименту  $t = 100$  год. Під час спостереження відмовило  $n = 3$  пристроїв, при цьому отримані такі значення наробітку до відмови кожного  $i$ -го пристрою,  $i = 1 \dots 3$ :  $t_1 = 81$  год,  $t_2 = 89$  год,  $t_3 = 94$  год відповідно. Знайти середнє значення наробітку до відмови випробуваного пристрою.

**Р о з в' я з а н н я.** Розрахунок середнього значення наробітку до відмови знаходимо за формулою

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n t_i + t(N - n)}{n}.$$

Підставляючи дані, отримані під час експерименту, отримаємо

$$T = \frac{81 + 89 + 94 + 100 \cdot 37}{3} = 1321 \text{ год/відмову}.$$

**Приклад 2.3.** Електронна схема технічної системи ЛА складається з подібних елементів. Імовірність того, що один елемент системи ЛА відмовить,  $q = \frac{1}{100} = 0,01$ .

Кількість таких елементів у системі ЛА  $n = 300$ . Яка ймовірність того, що протягом однієї години відмовлять чотири елементи? Відомо, що  $P(x = m)$  розподіляється за законом Пуассона.

**Р о з в' я з а н н я.** За законом Пуассона  $P(x = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ , тоді  $P(x = 3) = \frac{a^4}{4!} e^{-a}$ . Знайдемо  $a$  за умовою задачі:  $a = nq = 300 \frac{1}{100} = 3$ .

Тоді ймовірність того, що за одну годину відмовлять чотири елементи цієї системи ЛА, така:

$$P(x = 4) = \frac{3^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} e^{-3} \approx \frac{81}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0,05 \approx 0,168.$$

**Приклад 2.4.** Елемент має нормальне розподілення наробітку до відмови з параметрами: МС становить  $a = T_0 = 20000$  циклів, СКВ  $\sigma = S = 2000$  циклів. Знайти надійність елемента та інтенсивність відмов для наробітку, який не перевищує  $t = 19000$  циклів.

**Р о з в' я з а н н я.** Ймовірність безвідмовної роботи пов'язана з нормованою випадковою величиною  $X$ , розподіленою за нормальним законом, таким виразом

$$P(t) = F\left(x > \frac{t-a}{b}\right),$$

де функція розподілу випадкової величини  $X$  задана формулою (2.6). У такому випадку маємо

$$P(19000) = F\left(x > \frac{19000 - 20000}{2000}\right) = F(x > -0,5) = \Phi(0,5),$$

де значення функції  $\Phi(x)$  знаходять за допомогою таблиць (див. дод. 5 з [10]). Тоді  $P(19000) = 0,69146$ .

Значення інтенсивності відмов може бути знайдене за допомогою співвідношення  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{SP(t)}$ , де щільність нормованого нормального розподілу відмов  $f(t)$  визначають за формулою (2.2), значення якої знаходять за допомогою таблиць (див. дод. 4 з [10]). У такому випадку

$$\lambda(19000) = \frac{f(-0,50)}{SP(t)} = \frac{0,3521}{2000 \cdot 0,69146} = 0,000254 \text{ відмов/цикл.}$$

**Приклад 2.5.** На випробування поставлено 1000 однотипних об'єктів. За перші 3000 годин відмовило 80 об'єктів, а за інтервал часу 3000...5000 год відмовило ще 50 об'єктів. Треба визначити щільність розподілу та інтенсивність відмов об'єктів у проміжку часу 3000...4000 год.

**Р о з в' я з а н н я.** З підрозділу 2.1.2. відомо, що статистична оцінка щільності розподілу відмов

$$\bar{f}(4000) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t N_0} = \frac{50}{2000 \cdot 1000} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ год}^{-1},$$

де  $N_0$  – кількість об'єктів на початку випробування.

Статистичну оцінку інтенсивності відмов знаходять за формулою

$$\bar{\lambda}(3500) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t N_{\text{сеп}}} = \frac{50}{2000 \left( \frac{920 + 870}{2} \right)} \approx 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ год}^{-1},$$

де  $N_{\text{сер}}$  – середня кількість об’єктів, що працювали безвідмовно в інтервалі 3000...4000 год.

**Приклад 2.6.** На випробування було поставлено  $N_0 = 400$  приладів. За час  $t = 3000$  год відмовило  $n(t) = 300$  приладів, за інтервал часу  $\Delta t = 100$  год відмовило ще  $n(\Delta t) = 50$  приладів. Треба встановити оцінки ймовірності безвідмовної роботи приладу  $\bar{P}(3000)$ ,  $\bar{P}(3100)$ ,  $\bar{P}(3050)$ , а також частоту відмов  $\bar{f}(3050)$  та інтенсивність відмов  $\bar{\lambda}(3050)$ .

**Р о з в’ я з а н н я.** Статистичну оцінку ймовірності безвідмовної роботи знаходять за формулою  $\bar{P}(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0}$ , тому

$$\bar{P}(3000) = \frac{N_0 - n(3000)}{N_0} = \frac{400 - 300}{400} = 0,25;$$

$$\bar{P}(3100) = \frac{N_0 - n(3100)}{N_0} = \frac{400 - 350}{400} = 0,125.$$

Кількість приладів, що відмовили за час  $t = 3050$  год:

$$n(3050) = N_0 - N_{\text{сер}} = 400 - 75 = 325.$$

Тоді

$$\bar{P}(3050) = \frac{N_0 - n(3050)}{N_0} = \frac{400 - 325}{400} = 0,1875;$$

$$\bar{f}(3050) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t N_0} = \frac{50}{100 \cdot 400} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1};$$

$$\bar{\lambda}(3050) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t N_{\text{сер}}} = \frac{50}{100 \left( \frac{100 + 50}{2} \right)} \approx 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ год}^{-1}.$$

## 2.7. Запитання для самоконтролю

1. Назвіть складові частини моделі надійності елементів.
2. Назвіть закони розподілу наробітку до відмови, що найбільш поширені в теорії надійності.

3. Назвіть властивості потоків відмов, дайте їх класифікацію.
4. Які ознаки та властивості простого потоку відмов?
5. Охарактеризуйте рекурентний потік відмов, які його властивості?
6. Назвіть моделі відновлюваності і діагностування.
7. Відтворіть формули розрахунку надійності елемента для марковської моделі.
8. Відтворіть формули розрахунку надійності елемента для напівмарковської моделі.