

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія аеронавігації

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни

«Гідравліка та гідропневмопристрої авіаційної техніки»

обов'язкових компонент

освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів

за темою № 3 - «Основи кінематики і гідродинаміки рідини»

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 № 8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії аеронавігації протокол від
15.08.2022 № 1

Розробник: викладач циклової комісії аеронавігації, проф., к.т.н.
Павленко О. В.

Рецензенти:

1. Викладач Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, к. т. н., с. н. с., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Тягній В. Г.

2. Доцент кафедри автомобілів і тракторів Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського, к.т.н., Черненко С. М.

План лекції

1. Основні поняття про кінематику і динаміку рідини.
2. Витрата. Рівняння витрати.
3. Рівняння Бернуллі для елементарної цівки ідеальної рідини.
4. Рівняння Бернуллі для потоку реальної (в'язкої) рідини.
5. Гідрравлічні втрати (загальні відомості).
6. Рівняння Бернуллі для відносного руху.
7. Приклади використання рівняння Бернуллі в техніці.
8. Застосування рівняння кількості руху до рідини.

Рекомендована література:

Основна література

1. Федорець В.О., Педченко М.Н., Федорець О.О. Технічна гідромеханіка. Гідрравліка та гідропневмопривод. Підручник. Житомир.: ЖІТІ, 1998. – 412 с.
2. Кулінченко, В. Р. Гідрравліка, гідрравлічні машини і гідропривід: підручник / В. Р. Кулінченко. — Київ: ІНКОС, Центр навчальної літератури, 2006. - 616 с.
3. Рогалевич Ю.П. Гідрравліка / Ю.П. Рогалевич. – К. : Вища шк., 1993. – 255 с.
4. Холоменюк М.В. Насосні та вентиляторні установки. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 330 с.
4. Навроцький Б. І. Механіка рідин : [підруч. для техн. вузів]/ Б.І. Навроцький, Є. Сухін. — К. : ДІА, 2003. — 416 с.
5. Гідрравліка та гідропривод: збірник задач і вправ : навч. посіб./ Л. В. Возняк, Р. Ф. Гімер, П. Р. Гімер [та ін.]. - Івано-Франківськ: Факел, 2018. - 283 с.

Допоміжна література

6. Расчет, проектирование и эксплуатация объемного гидропривода: учеб. пособие для студ. вузов / З.Л. Финкельштейн, О.М. Яхно, В.Г. Чебан и [др.]. — К.: КПИ, 2006. — 216 с.
7. Мандрус В.І., Лендій Н.П. Машинобудівна гідрравліка. Задачі та приклади. Навчальний посібник. Львів:, Світ, 1995.-264с.
8. Промисловий гідропривод : Практичний poradник / З.Л. Фінкельштейн, О.М. Яхно, І.С. Корошупов, К.С. Коваленко ; м-во освіти і науки, молоді та спорту України. ДонДТУ.НТУУ "КПІ". — Алчевськ : ДонДТУ ; К. : НТУУ "КПІ", 2012. — 176 с.
9. Башта Т.М. Надежность гидравлических систем ВС. Учебник. М.: Транспорт, 1986.-279с.
10. Артемьева Т.В., Лысенко Т.М. Гидравлика, гидромашины и гидропневмопривод. Учебник. М.: Изд. Центр "Академия", 2006.-336 с.
11. Справочник по гидравлике / В. А. Большаков, Ю. М. Константинов, В. Н. Попов и др. — 2-е изд. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 2004.
12. Мандрус В.І. Гідрравлічні та аеродинамічні машини. Підручник. Львів:, "Магнолія -2006", 2007.-340 с.

13. Сидоренко В.П., Яхно О.М. Гідравліка і гідроприводи. Навчальний посібник. К.: Університет "Україна", 2007.-164 с.
14. Схиртладзе А.Г. Гидравлические и пневматические системы. Учебник. М.: Высш. шк., 2006.-534 с.
15. Свешников, А.Г. Станочные гидроприводы / А.Г. Свешников. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с.
16. Металлорежущие станки : учеб. пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1990. – 500 с.
17. Д.Ю. Воронов, В.В. Волосков, А.О. Драчев, О.В. Бойченко. Гидроцилиндры: учеб.-метод. пособие / Д.Ю. Воронов [и др.]. – Тольятти : ТГУ, 2011. – 72 с.
18. Левицький Б. Ф. Гідравліка. Загальний курс / Б. Ф. Левицький. Н. П. Лещій. — Львів: Світ, 1994. — 264 с.
19. Гідравліка, гідро- та пневмопривод. Навчально-методичний посібник для студентів інженерних спеціальностей ЗДІА/ Укл. В.К. Тарасов, О.В. Новокщона. Запоріжжя: Видавництво ЗДІА, 2010. - 132 с.

Текст лекції

1. Основні поняття про кінематику і динаміку рідини

Кінематика рідини істотно відрізняється від кінематики твердого тіла. Якщо окремі частинки абсолютно твердого тіла жорстко пов'язані між собою, то в рухомому рідкому середовищі такі зв'язки відсутні; це середовище складається з безлічі частинок, що рухаються одна відносно іншої.

Швидкість в даній точці простору, зайнятого рідиною, що рухається є функцією координат цієї точки, а іноді і часу. Таким чином, завданням кінематики рідини є визначення швидкості в будь-якій точці рідкого середовища тобто знаходження *поля швидкостей*.

Спочатку розглянемо рух так званої ідеальної рідини, тобто такої уявної рідини, яка абсолютно позбавлена в'язкості, а потім перейдемо до вивчення реальних потоків. У такої нев'язкої рідини, так само як і в нерухомих реальних рідинах, можливий лише один вид напружень - нормальні напруження стиску тобто гідромеханічний тиск, або просто тиск.

Тиск в рухомій ідеальній рідині має ті ж властивості, що і в нерухомій рідині, тобто на зовнішній поверхні рідини тиск спрямовано по внутрішній нормалі, а в будь-якій точці всередину рідини - в усіх напрямах однаково.

Течія рідини може бути *усталеною* (стаціонарною) або *несталою* (нестационарною).

Сталим називається рух рідини, незмінний за часом, при якому тиск і швидкість є функціями тільки координат, і не залежать від часу. Тиск і швидкість можуть змінюватися при переміщенні частинки рідини з одного положення в інше, але в об'ємі нерухомому щодо русла тиск і швидкість при сталому русі не змінюються за часом, тобто

$$p = f_1(x, y, z); \quad \bar{v} = f_2(x, y, z);$$

$$\partial p / \partial t = 0; \quad \partial v_x / \partial t = 0; \quad \partial v_y / \partial t = 0; \quad \partial v_z / \partial t = 0,$$

де індекси у швидкості означають її проекції на відповідні осі, що жорстко пов'язані з руслом.

В окремому випадку усталена течія є рівномірною, коли швидкість кожної частки не змінюється зі зміною її координат, і поле швидкостей залишається незмінним уздовж потоку.

Несталим називається рух рідини, все характеристики якого (або деякі з них) змінюються за часом в точках розглянутого простору.

У загальному випадку несталої течії тиск і швидкість залежать як від координат, так і від часу

$$p = F_1(x, y, z, t); \quad \bar{v} = F_2(x, y, z, t).$$

Прикладами несталого руху рідини можуть бути швидке спорожнення судини через отвір в дні або рух у всмоктувальній або напірній трубі поршневого насоса, поршень якого здійснює зворотно-поступальний рух. Прикладом сталої течії може служити витікання рідини з посудини, в якому підтримується постійний рівень, або рух рідини в трубопроводі, що створюється відцентровим насосом з постійною частотою обертання валу.

Дослідження сталих течій набагато простіше, ніж несталих. Надалі будемо розглядати, головним чином, сталі течії і лише інколи окремі випадки несталої течії.

Траєкторії часток рідини при сталій течії є незмінними за часом. При несталій течії траєкторії різних частинок, що проходять через дану точку простору, можуть мати різну форму. Тому для розгляду картини течії, що виникає в кожен даний момент часу, вводиться поняття лінії течії.

Лінією течії називається крива, в кожній точці якої вектор швидкості в даний момент часу спрямований по дотичній до траєкторії (рис. 1).

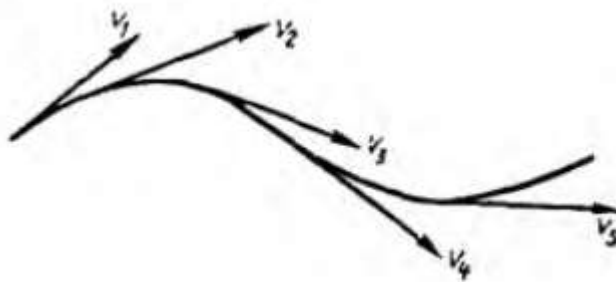


Рисунок 1 – Лінія течії

Очевидно, що в умовах сталої течії лінія течії збігається з траєкторією частинки і не змінює своєї форми з плином часу.

Якщо в рідині, що рухається взяти нескінченно малий замкнутий контур і через все його точки провести лінії струму, то утворюється трубчаста поверхня, звана *трубкою течії*. Частина потоку, що міститься усередині

трубки течії, називається *елементарною цівкою* (рис. 2). При наближенні поперечних розмірів цівки до нуля вона в межі стягується в лінію течії.

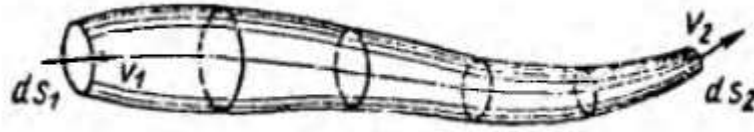


Рисунок 2 – Елементарна цівка

У будь-якій точці трубки струму, тобто на бічній поверхні цівки, вектори швидкості спрямовані по дотичній, а нормальні до цієї поверхні складові швидкості відсутні, отже, при сталому русі жодна частинка рідини ні в одній точці трубки течії не може проникнути всередину цівки або вийти назовні. Трубка течії, таким чином, є як би *непроникною стінкою*, а елементарна цівка є самостійним елементарним потоком.

Потоки кінцевих розмірів будемо спочатку розглядати як сукупність елементарних цівок, тобто будемо припускати течію струменевою (течение струйным, *рос.*). Через відмінності швидкостей сусідні струмки будуть ковзати одна за іншою, але не будуть перемішуватися одна з іншого.

Живим перерізом, або просто перетином потоку, називається в загальному випадку поверхня в межах потоку, проведена нормально до ліній струму. Далі будемо розглядати в потоках такі ділянки, в яких струмені можна вважати паралельними і, отже, живі перерізи - плоскими.

Розрізняють *напірні і безнапірні течії* рідини. *Напірними* називають течії в закритих руслах без вільної поверхні, а *безнапірними* - течії з вільною поверхнею. При напірних течіях тиск уздовж потоку зазвичай змінний, при безнапірному - постійний (на вільній поверхні) і найчастіше атмосферний. Прикладами напірного течії можуть служити течії в трубопроводах з підвищеним (або зниженим) тиском, в гідромашинах або інших гідроагрегатах. Безнапірними є течії в річках, відкритих каналах і лотках. В даному курсі розглянуті напірні течії.

2. Витрата. Рівняння витрати

Витратою називається кількість рідини, що протікає через живий перетин потоку (цівки) в одиницю часу. Цю кількість можна виміряти в одиницях об'єму, в вагових одиницях або в одиницях маси, в зв'язку з чим розрізняють об'ємну Q , вагову Q_G і масову Q_m витрати.

Для елементарної цівки, що має нескінченно малі площі перетинів, можна вважати справжню швидкість V однаковою у всіх точках кожного перетину. Отже, для цієї цівки об'ємна ($\text{м}^3/\text{с}$), вагова ($\text{Н}/\text{с}$) і масова ($\text{кг}/\text{с}$) витрати

$$dQ = v dS; \quad (1.36)$$

$$dQ_G = \rho g dQ; \quad (1.37)$$

$$dQ_m = \rho dQ = \rho v dS, \quad (1.38)$$

де dS – площа перерізу струменя.

Зазвичай вводять середню по перерізу швидкість

$$v_{\text{ср}} = Q/S, \text{ тоді } Q = v_{\text{ср}} S. \quad (1.40)$$

Ґрунтуючись на законі збереження речовини, на припущенні про суцільність (нерозривності) течії і на зазначеній вище властивості трубки течії, що полягає в її «непроникливості», для сталої течії нестисливої рідини можна стверджувати, що об'ємна витрата у всіх перетинах елементарної цівки (рис. 2) однакова

$$dQ = v_1 dS_1 = v_2 dS_2 = \text{const} \quad (\text{уздовж струменя}).$$

Це рівняння називається *рівнянням об'ємної витрати* для елементарної цівки. Хоча саме його використовують на практиці.

Аналогічне рівняння можна скласти і для потоку кінцевих розмірів, обмеженого непроникними стінками, тільки замість справжніх швидкостей слід ввести середні швидкості. В результаті

$$Q = v_{\text{ср}1} S_1 = v_{\text{ср}2} S_2 = \text{const} \quad (\text{уздовж потоку}).$$

З останнього рівняння випливає, що середні швидкості в потоці нестисливої рідини обернено пропорційні площам перетинів

$$v_{\text{ср}1}/v_{\text{ср}2} = S_2/S_1.$$

Рівняння витрати є наслідком загального закону збереження речовини для певних умов, зокрема для умов суцільності (нерозривності) течії.

3. Рівняння Бернуллі для елементарної цівки ідеальної рідини

Візьмемо одну з елементарних цівок, що становлять потік, і виділимо перетинами 1 і 2 ділянку цієї струмки довільної довжини (рис. 3). Нехай площа першого перетину дорівнює dS_1 швидкість в ньому v_1 , тиск p_1 , а висота розташування центру ваги перерізу, відрахувавши від довільної горизонтальної площини порівняння, z_1 . Для другого перетині відповідно dS_2 , v_2 , p_2 і z_2 .

За нескінченно малий відрізок часу dt виділена ділянка цівки переміститься в положення 1' -1'. В силу умови нерозривності струменя заштриховані об'єми матимуть однакову величину.

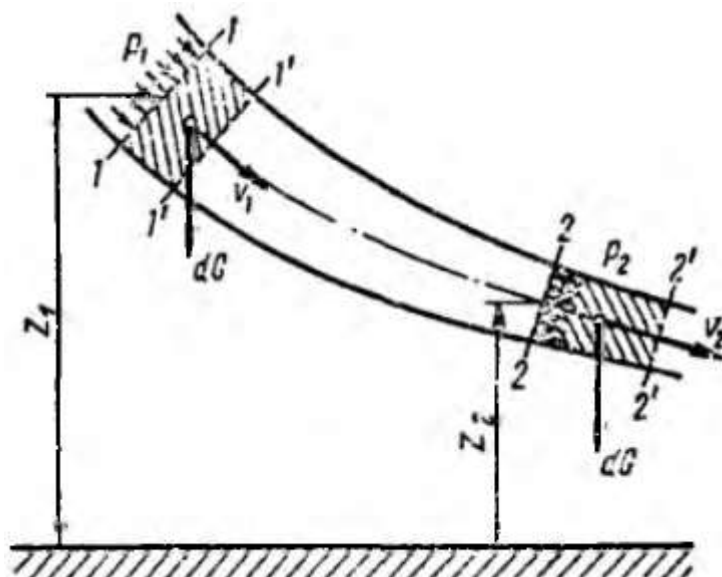
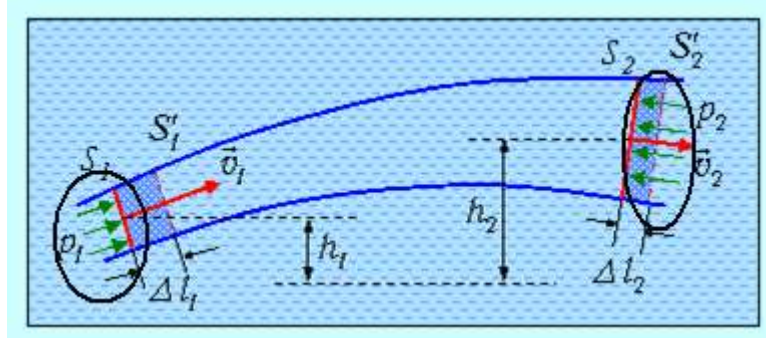
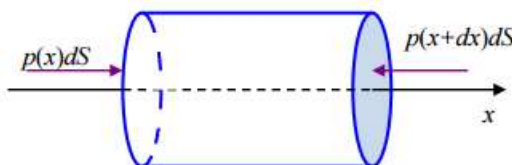


Рисунок 3 – Схема до виводу рівняння Бернуллі



Пояснення до того, що вектори тиску спрямовані в різні боки



$p(x)dS$ – сила, що діє на ліве основу циліндра, а $p(x+dx)dS$ – на праву. Умова рівноваги виділеного об'єму - рівність сил тиску зліва і справа, з цього на зустріч один одному

Рисунок 4 – Пояснення щодо рівноваги виділеного об'єму рідини

Застосуємо до маси рідини в об'ємі ділянки цівки теорему механіки про те, що **робота сил**, прикладених до тіла, **дорівнює приросту кінетичної енергії** цього тіла. Такими силами в даному випадку є сили тиску, що діють нормально до поверхні розглянутої ділянки струмка і сила тяжіння. Підрахуємо роботу сил тиску, сили тяжіння і зміна кінетичної енергії ділянки цівки за час dt .

Робота сили тиску в першому перетині позитивна, так як напрямок сили збігається з напрямом переміщення, і виражається як добуток сили ($p_1 dS$) на відстань $v_1 dt$:

Робота сили тиску у першому перерізі $= p_1 dS_1 v_1 dt$.

Робота сили тиску в другому перерізі має знак мінус, так як напрямок сили прямо протилежно напрямку переміщення, і визначається виразом

Робота сили тиску у другому перерізі $= - p_2 dS_2 v_2 dt.$

Сили тиску, що діють по бічній поверхні відрізка струмки, роботи не виконує, так як вони нормальні до цієї поверхні, а отже, нормальні і до переміщень.

Отже, сума робіт сил тиску буде дорівнює

$$p_1 v_1 dS_1 dt - p_2 v_2 dS_2 dt.$$

Робота сили тяжіння дорівнює зміні потенційної енергії положення ділянки струмки, тому треба з енергії положення рідини в об'ємі 1 - 2 відняти енергію положення рідини в обсязі 1' - 2'. При цьому енергія положення проміжного обсягу 1' - 2 скоротиться, і залишиться лише різниця енергій елементів 1 - 1', 2 - 2'. Зрозуміло, що об'ємі і сили тяжіння заштрихованих елементів 1 - 1' і 2 - 2' рівні між собою

$$dG = \rho g v_1 dS_1 dt = \rho g v_2 dS_2 dt.$$

Тоді робота сили ваги виразиться як добуток різниці висот на силу тяжіння dG

$$(z_1 - z_2) dG.$$

Щоб підрахувати приріст кінетичної енергії розглянутого ділянки цівки за час dt , необхідно з кінетичної енергії об'єму 1' - 2' відняти кінетичну енергію об'єму 1 - 2. При відніманні кінетична енергія проміжного об'єму 1' - 2 скоротиться, і залишиться лише різницю кінетичних енергій елементів 2 - 2' і 1 - 1' сила тяжіння кожного з яких дорівнює dG .

Таким чином, приріст кінетичної енергії дорівнює

$$(v_2^2 - v_1^2) dG / (2g).$$

Простіше суму енергій показати так

Переріз 1	Переріз 2	Вид енергії
$p_1 v_1 dS_1 dt$	$- p_2 v_2 dS_2 dt.$	Робота сил тиску
$z_1 dG.$	$- z_2 dG.$	Потенційна
$v_1^2 dG / (2g).$	$- v_2^2 dG / (2g)$	Кінетична
Закон збереження енергії - ні чого не зникає		

Графічно баланс енергії можна показати так, як показано на рис. 5.

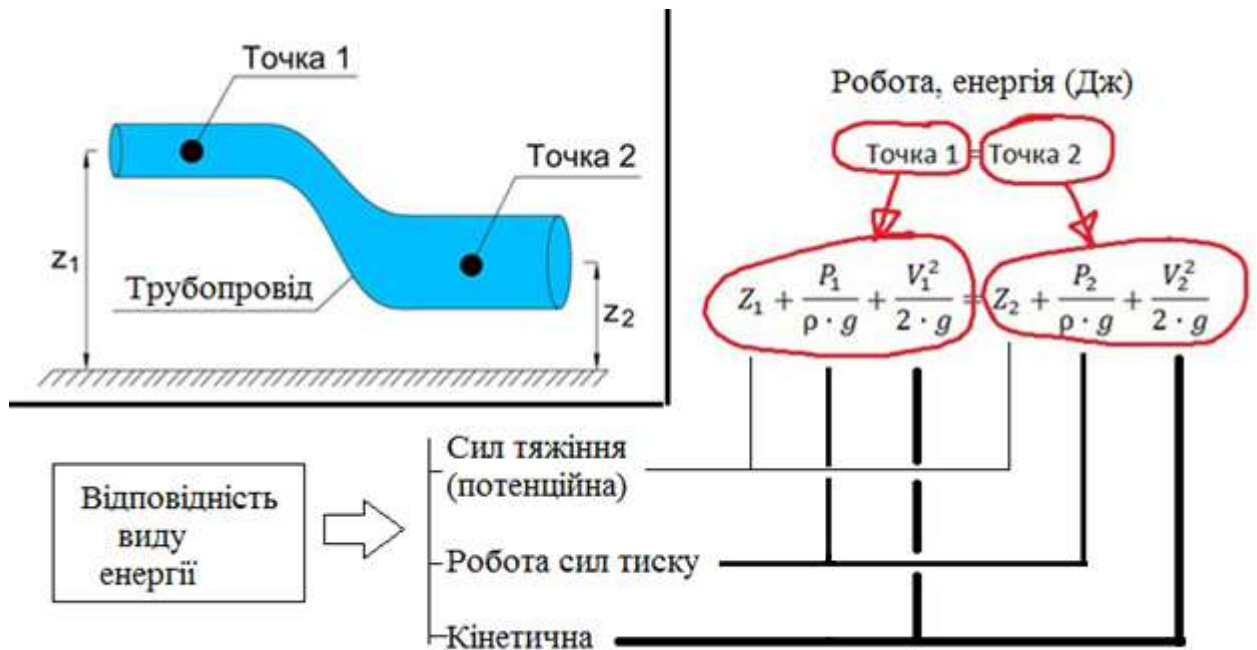


Рисунок 5 – Баланс енергії ідеальної рідини, яка рухається у трубопроводі

$$\begin{aligned}
 p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt + z_1 dG - z_2 dG + v_1^2 dG/(2g) - v_2^2 dG/(2g) &= 0 \\
 p_1 dS_1 v_1 dt + z_1 dG + v_1^2 dG/(2g) &= p_2 dS_2 v_2 dt + z_2 dG + v_2^2 dG/(2g)
 \end{aligned}
 \quad (1.46')$$

Розділимо це рівняння на dG [і пам'ятаючи що $dG = \rho g v_1 dS_1 dt = \rho g v_2 dS_2 dt$], і зробивши скорочення, отримаємо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}, \quad (1.47)$$

де z - геометрична висота, або геометричний напір; $p/\rho g$ - п'єзометрична висота, або п'єзометричний тиск; $v^2/2g$ - швидкісна висота, або швидкісний натиск.

Отримане рівняння називається **рівнянням Бернуллі** для елементарної цівки ідеальної нестисливої рідини. Воно було виведено Данилом Бернуллі в 1738 г.

Рівняння Бернуллі можна записати в двох інших формах.

Розділимо рівняння (1.46') на масу dm відрізка, що дорівнює $\rho v_1 dS_1 dt = \rho v_2 dS_2 dt$ і перетворимо рівняння подібно до попереднього. Тоді замість виразу (1.47) будемо мати

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (1.48)$$

Рівняння Бернуллі часто пишуть ще й у третьій формі. Розділивши всі члени рівняння (1.46') на об'єм $dV = dG/(\rho g)$. Після перетворень отримаємо

$$\rho gz_1 + p_1 + \rho v_1^2/2 = \rho gz_2 + p_2 + \rho v_2^2/2. \quad (1.49)$$

Тепер члени рівняння Бернуллі мають розмірність тиску (Па) і називаються так: $\rho g z$ — тиск від ваги рідини; p - гідромеханічний тиск (або просто тиск); $\rho v^2/2$ — динамічний тиск

Тричлен виду

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H$$

називається повним напором.

Рівняння Бернуллі (1.47) записано для двох довільно взятих перетинів струмки і висловлює рівність повних напорів H у всіх перетинах то для будь-якого іншого перетину цієї ж цівки повний напір буде мати те ж значення

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const} \quad (\text{уздовж струменю})$$

Висновок - для ідеальної рідини, що рухається сума трьох напорів (висот): геометричного, п'єзометричного і швидкісного є величина постійна уздовж цівки.

Це положення ілюструється графіком, наведеним на рис. 6, де показано зміна всіх трьох висот уздовж цівки. Лінія зміни п'єзометричних висот називається *п'єзометричною лінією*, її можна розглядати як геометричне місце рівнів в п'єзометрах, встановлених уздовж цівки. Для горизонтальної ділянки цівки з рівняння Бернуллі і рівняння витрати слідує, що якщо площа поперечного перерізу цівки зменшується, тобто цівка звужується, то швидкість течії рідини збільшується, а тиск зменшується, і навпаки, якщо цівка розширюється, то швидкість зменшується, а тиск зростає.

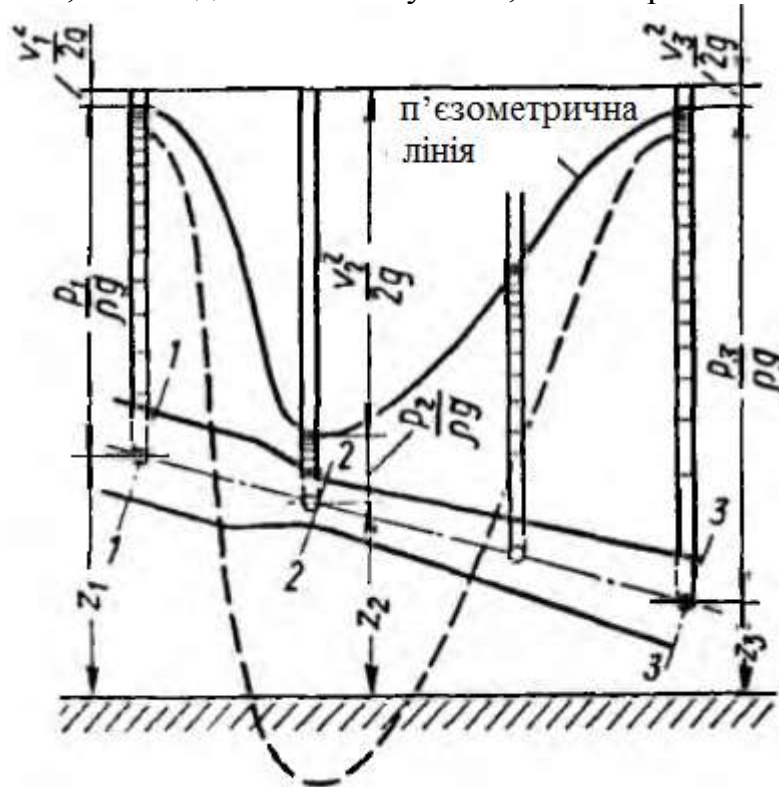


Рисунок 6 – Зміна п'єзометричного і швидкісного напорів уздовж цівки ідеальної рідини

Штриховий лінією показано п'єзометричну лінію при збільшенні витрати в $\sqrt{2}$ раз, внаслідок чого швидкісні висоти збільшуються в 2 рази, а у вузькій частині цівки тиск стає менше атмосферного.

Зауваження

1) Енергія тиску є специфічною для рухомих рідин.

2) В процесі руху ідеальної рідини одна форма енергії може перетворюватися в іншу, проте повна питома енергія при цьому, як впливає з рівняння Бернуллі, залишається без змін - закон збереження працює скрізь!

Ефект Бернуллі можна спостерігати, сидячи біля каміна. Під час сильних поривів вітру швидкість повітряного потоку зростає, а тиск падає. У кімнаті тиск повітря вище. І язики полум'я спрямовуються вгору в димар.

За допомогою цього закону дуже просто пояснити, як виникає підйомна сила для літального апарату важче повітря.

Під час польоту крило літака як би розрізає повітряний потік на дві частини. Одна частина обтікає верхню поверхню крила, а інша нижню. Форма крила така, що верхній потік повинен подолати більший шлях для того, щоб з'єднатися з нижнім в одній точці. Значить, він рухається з більшою швидкістю. А раз швидкість більше, то і тиск над верхньою поверхнею крила менше, ніж під нижньою. За рахунок різниці цих тисків і виникає підйомна сила крила.

4. Рівняння Бернуллі для потоку реальної (в'язкої) рідини

При переході від елементарної цівки ідеальної рідини до потоку реальної (в'язкої) рідини, що має кінцеві розміри і обмежено стінками, необхідно врахувати нерівномірність розподілу швидкостей по перетину, а також втрати енергії (напору). Те й інше є наслідком в'язкості рідини.

При русі в'язкої рідини уздовж твердої стінки, наприклад, в трубі, відбувається гальмування потоку внаслідок впливу в'язкості, а також через дію сил молекулярного зчеплення між рідиною і стінкою. Тому найбільшого значення швидкість досягає в центральній частині потоку, а в міру наближення до стінки вона зменшується практично до нуля. Виходить розподіл швидкостей, подібне до того, який показано на рис. 7.

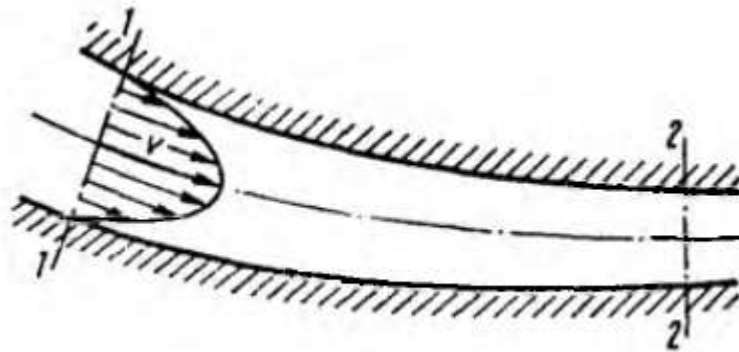


Рисунок 7 - Розподіл швидкостей в реальному потоці

Нерівномірний розподіл швидкостей означає ковзання (зрушення, сдвиг – *рос.*) одних слоїв або частин рідини відносно інших, внаслідок чого виникають дотичні напруження (напруження тертя). Крім того, рух в'язкої рідини часто супроводжується обертанням частинок, вихроутворенням і перемішуванням. Все це вимагає витрати енергії, тому питома енергія в'язкої рідини, що рухається не залишається постійною, як у випадку ідеальної

рідини, а поступово витрачається на подолання опорів і, отже, зменшується уздовж потоку.

Через нерівномірний розподіл швидкостей доводиться вводити в розгляд середню по перетину швидкість v_{cp} (я про це говорив - про середню витрату!), А також середнє значення питомої енергії рідини в даному перетині.

Зробимо наступне припущення: будемо вважати, що в межах розглянутих поперечних перерізів потоку справедливий основний закон гідростатики, тобто гідростатичний напір в межах перетину є величина, однакова для всіх точок даного перетину: наприклад в такій формі **$z + p/(\rho g) = \text{const}$** , або як варіант $P = P_0 + \rho gh$, отже припускаємо, що при русі рідини *окремі струмки впливають одна на одну* в поперечному напрямку з таким же тиском, як шари рідини в нерухомому стані.

Саме час згадати про поняття *потужності потоку*. *Потужністю потоку в даному перетині будемо називати повну енергію, яку проносить потік через цей перетин в одиницю часу* (Дж/с). Так як в різних точках поперечного перерізу потоку частинки рідини мають різн енергією, спочатку виразимо елементарну потужність dN (потужність елементарний цівки) у вигляді добутку повної питомої енергії рідини gH в даній точці на елементарну масову витрату dQ_m

$$dN = gH dQ_m = (gz + p/\rho + v^2/2) \rho v dS. \quad (M.1)$$

Пам'ятаємо, що $\rho v dS = Q$ а рівняння Бернуллі як сума енергій

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2},$$

де gz - питома енергія положення;

p/ρ - питома енергія тиску рідини, що рухається, $\frac{v^2}{2}$.

Питома кінетична, тому що віднесена 1 кг маси (тому немає маси).

Доведеться інтегрувати по всій площі S перетину (постійне число за дужки)

$$N = \rho \int_S (gz + p/\rho + v^2/2) v dS,$$

Розкриваємо дужки і постійні параметри виносимо за знак інтеграла, і тоді буде так

$$N = \rho \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \int_S v dS + \frac{\rho}{2} \int_S v^3 dS.$$

Знайдемо середнє по перетину значення повної питомої енергії рідини діленням повної потужності потоку на масову витрату з (M.1)

$$dN = gH dQ_m \longrightarrow gH_{cp} = \frac{N}{Q}, \quad Q = \int_S v dS. \quad \text{Тоді}$$

$$\frac{\rho \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \int v \cdot dS + \frac{\rho}{2} \int v^3 dS}{Q\rho} = \frac{\left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \int v \cdot dS}{Q} + \frac{\frac{1}{2} \int v^3 dS}{Q}$$

і вийде середнє по перетину значення повної питомої енергії рідини

$$gH_{cp} = \frac{N}{Q\rho} = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2Q} \int_S v^3 dS.$$

Останній доданок можна так $\frac{\int v^3 dS}{2 \cdot v_{cp} S}$.

Розділимо все на g і останній доданок множимо і ділимо на v_{cp}^2 , отримаємо

$$H_{cp} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\int_S v^3 dS}{v_{cp}^3 S} \frac{v_{cp}^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{v_{cp}^2}{2g},$$

В результаті ми перейшли до напору (що б вийти на величину втрат) і отримали якийсь коефіцієнт α , який дорівнює

$$\alpha = \frac{\int_S v^3 dS}{v_{cp}^3 S}. \quad (1.54)$$

α – коефіцієнт Коріоліса

Якщо помножити чисельник і знаменник виразу (1.54) на $\rho/2$, то побачимо, що коефіцієнт α являє собою відношення дійсної кінетичної енергії потоку в даному перетині до кінетичної енергії того ж потоку і в тому ж перерізі, но при рівномірному розподілі швидкостей.

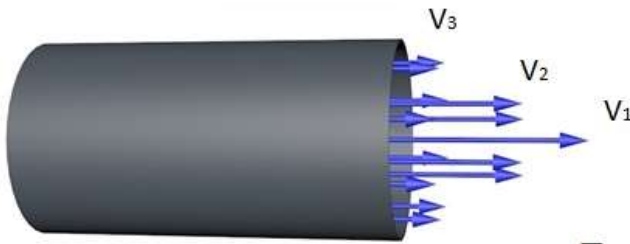
Для нормального розподілу швидкостей (див. рис. 7) коефіцієнт, α завжди більший одиниці, а при рівномірному розподілі швидкостей дорівнює одиниці.

Фізичну сутність коефіцієнту Коріоліса показано на ис. 8.

Формула коефіцієнту Коріоліса

Реальна епюра швидкостей рідини у перерізі

$$V_3 < V_2 < V_1$$



Теоретичне представлення епюри швидкостей рідини у перерізі

$$V_3 = V_2 = V_1$$



$$\alpha = \frac{E_{кр}}{E_{кт}}$$

Діапазон значень $\alpha = (1,05 - 2)$ При ламінарній течії $\alpha = 2$ При турбулентній течії наближається до 1. У розрахунках приймають $\alpha = 1,05$.

Рисунок 8 - Фізична сутність коефіцієнту Коріоліса

Це означає, що для переходу від ідеальної рідини до реальної треба врахувати чинники:

1) Відмінність реальної швидкості течії від рівномірного закону розподілу швидкості по перетину - коефіцієнт α

2) якось врахувати немінучі втрати напору (тиску) по довжині струменя (труби) – Σh_n .

Σh_n – сума втрат повного напору по довжині.

Тоді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_{cp2}^2}{2g} + \Sigma h_n. \quad (1.55)$$

Це і є рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини.

Коефіцієнт Коріоліса α враховує нерівномірність розподілу швидкості по живому перерізу потоку. Він завжди більший за одиницю, але для спрощення з допустимою похибкою при рішенні інженерних задач, може бути прийнятим рівним одиниці. При звуженні потоку збільшується швидкість руху і, як наслідок, швидкісний напір. Це призводить до зменшення п'єзометричної висоти (а отже, і гідродинамічного тиску) та зниженню п'єзометричної лінії. Розширення потоку навпаки – зменшує швидкість і швидкісний напір, тиск же і п'єзометрична висота збільшуються, а п'єзометрична лінія зростає. Це явище широко використовується в техніці. На ньому заснована робота інжекторів, ежекторів, гідроелеваторів та інших пристроїв.

Наочно баланс енергій потоку реальної рідини, який рухається у трубопроводі показано на рис. 9.

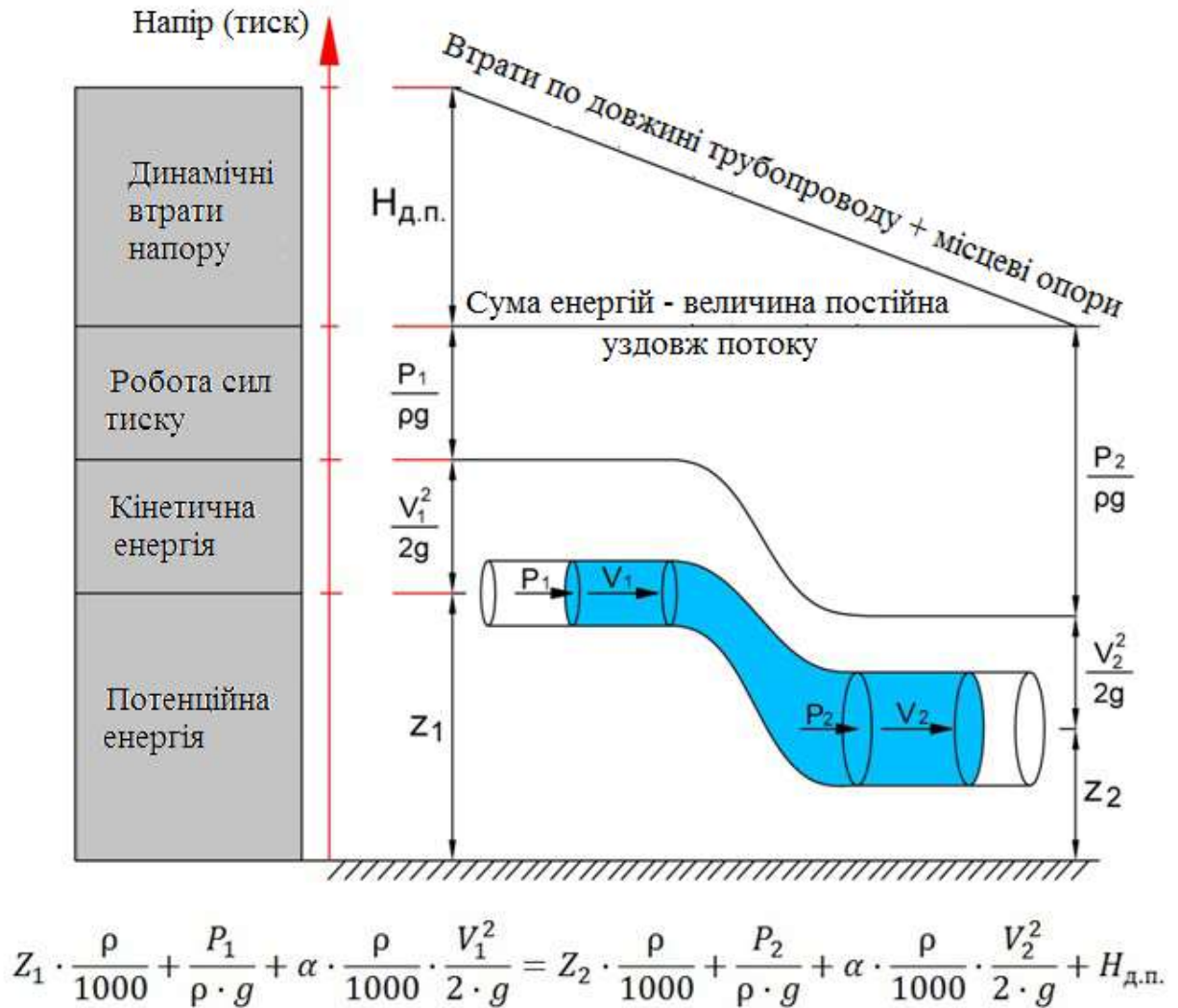


Рисунок 9 – Баланс енергій потоку реальної рідини, який рухається у трубопроводі

5. Гідравлічні втрати (загальні відомості)

Втрати питомої енергії (напору), або, як їх часто називають, гідравлічні втрати, залежать від форми, розмірів русла, швидкості течії і в'язкості рідини, а іноді і від абсолютного тиску в ній. В'язкість рідини, хоча і є першопричиною всіх гідравлічних втрат, але далеко не завжди робить істотний вплив на їх величину.

Як показують досліди, в багатьох, але не у всіх випадках гідравлічні втрати приблизно пропорційні швидкості течії рідини в другому ступені, тому в гідравліці прийнято наступний загальний спосіб вираження гідравлічних втрат повного напору в лінійних одиницях

$$h_{\text{м}} = \zeta v^2 / (2g),$$

- формула Вейсбаха

або в одиницях тиску $p_{\text{м}} = \zeta_{\text{м}} \rho v^2 / 2.$

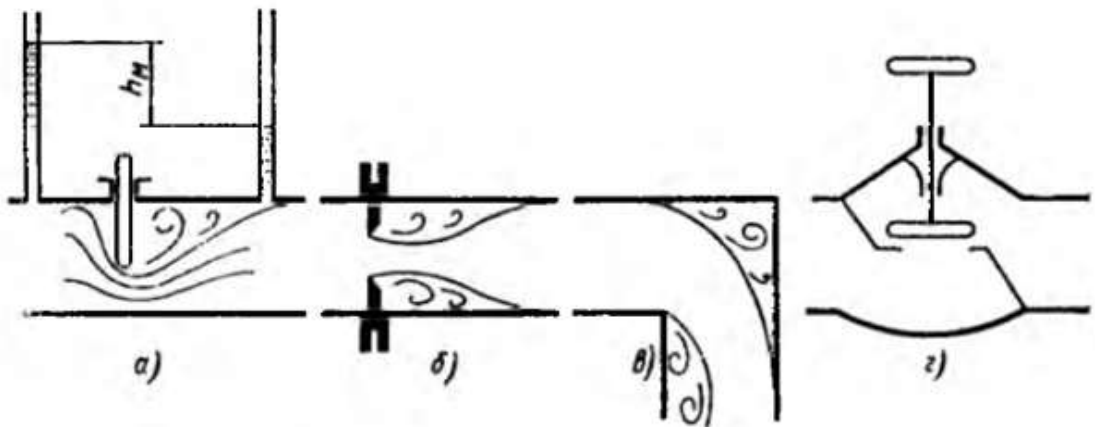
v — середня по перетину швидкість в трубі, в якій встановлено даний місцевий опір. Якщо ж діаметр труби i , отже, швидкість в ній змінюється по довжині, то за розрахункову швидкість зручніше приймати більшу з швидкостей тобто ту, яка відповідає меншому діаметру труби.

Такий вираз зручний тим, що включає в себе безрозмірний коефіцієнт пропорційності ζ , званий *коефіцієнтом втрат*, або *коефіцієнтом опору*, значення якого для даного русла в першому грубому наближенні постійно.

Коефіцієнт втрат ζ таким чином, є відношенням втраченого напору до швидкісного напору. Гідравлічні втрати зазвичай поділяють на місцеві втрати і втрати на тертя по довжині.

Місцеві втрати енергії зумовлені так званими місцевими гідравлічними опорами тобто місцевими змінами форми і розміру русла, що викликають деформацію потоку. При протіканні рідини через місцеві опори змінюється її швидкість і зазвичай виникають великі вихори. Останні утворюються за місцем відриву потоку від стінок і являють собою області, в яких частинки рідини рухаються в основному по замкнутих кривих або близьким до них траєкторіях.

Прикладами місцевих опорів можуть служити пристрої, зображені на рис. 10. Там же показані відриви потоку і вихроутворення.



а - засувка; б - діафрагма; в - коліно; з – вентиль

Рисунок 10 - Схеми місцевих гідравлічних опорів

Кожний місцевий опір характеризується своїм значенням коефіцієнта опору ζ , яке в багатьох випадках наближено можна вважати постійним для даної форми місцевого опору.

Втрати на тертя по довжині, - це втрати енергії, які в чистому вигляді виникають в прямих трубах постійного перерізу тобто при рівномірній течії, і зростають пропорційно довжині труби (рис. 11).

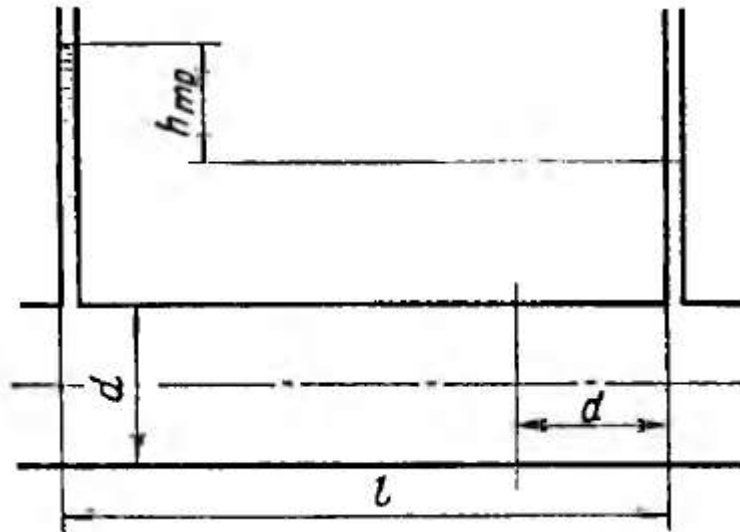


Рисунок 11 – Втрати напору на тертя по довжині труби

Розглянуті втрати обумовлені внутрішнім тертям в рідині, а тому мають місце не тільки в шорстких, але і в гладких трубах.

Втрату напору на тертя можна виразити за загальною формулою (як для місцевих) для гідравлічних втрат

$$h_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} v^2 / (2g), \quad (1.58)$$

проте зручніше коефіцієнт ζ пов'язати з відносною довжиною труби l/d . Візьмемо ділянку круглої труби довжиною, рівній її діаметру, і позначимо його коефіцієнт втрат, що входить в формулу (1.58), через λ . Тоді для всієї труби довжиною l і діаметром d коефіцієнт втрат буде в l/d разів більше:

$$\zeta_{\text{тр}} = \lambda l / d.$$

Тоді

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (1.59)$$

Це є формула Вейсбаха-Дарсі.

Або та сама формула у одиницях тиску

$$p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho. \quad (1.60)$$

Безрозмірний коефіцієнт λ називають коефіцієнтом втрат на тертя по довжині, або коефіцієнтом Дарсі.

6. Рівняння Бернуллі для відносного руху

Рівняння Бернуллі в формулах справедливо в тих випадках сталого течії рідини, коли з масових сил на рідину діє лише сила тяжіння. Однак іноді доводиться розглядати такі течії, при розрахунку яких крім сили тяжіння слід враховувати сили інерції переносного руху (наприклад, коли русло, по якому рухається рідина, переміщається в просторі з прискоренням). Якщо інерційна

сила постійна за часом, то при течії рідини відносно стінок русла може бути сталим, і для нього можна вивести рівняння Бернуллі так само, як це було зроблено раніше - все точно так же.

Різниця полягає лише в тому, що в ліву частину рівняння до роботи сил тиску і тяжіння слід додати роботу сили інерції, що діє на елемент цівки вагою dG при його переміщенні з перетину 1-1 в перетин 2-2. Потім цю роботу, так само як і раніше, як і інші члени рівняння ділимо на dG , тобто відносимо до одиниці ваги, і, отримавши певний натиск, переносимо його в праву частину рівняння. Отримаємо рівняння Бернуллі для відносного руху, яке в разі реального потоку набуває вигляду

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h_{\Pi} + \Delta H_{\text{ин}}, \quad (1.62)$$

де $\Delta H_{\text{ин}}$ - так званий інерційний напір, який представляє собою роботу сили інерції, віднесену до одиниці ваги і взятий з протилежним знаком (зворотний знак обумовлений тим, що ця робота перенесена з лівої частини рівняння в праву).

Розглянемо визначення інерційного напору для двох основних випадків відносного руху рідини.

1. *Прямолінійний рівноприскорений рух русла.* Якщо русло, по якому тече рідина, рухається прямолінійно з постійним прискоренням a (рис. 12, а), то на всі частинки рідини діє однакова і постійна за часом сила інерції переносного руху, яка може сприяти або перешкоджати течії. Робота цієї сили при переміщенні рідини з перетину 1-1 в перетин 2-2 (так само, як і робота сили тяжіння) не залежить від форми шляху, а визначається лише різницею координат, що обчислюються в напрямку прискорення a , отже,

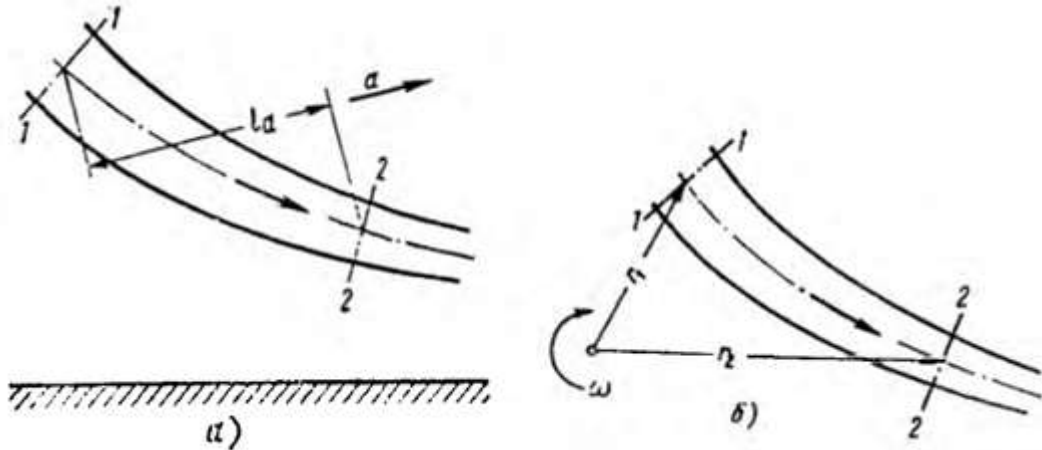


Рисунок 12 – Схема для виведення рівняння Бернуллі для відносного руху

$$\Delta H_{\text{ин}} = a l_a / g, \quad (1.63)$$

де l_a — проекція розглянутої ділянки русла на напрям прискорення a .

Щоб не помилитися в знаку, з яким величина $\Delta H_{\text{ин}}$ повинна бути записана в правій частині рівняння Бернуллі можна керуватися таким правилом, яке безпосередньо впливає з фізики явища. Якщо прискорення a

направлено від перетину 1-1 до перетину 2-2, а сила інерції - навпаки, то ця сила перешкоджає течії рідини, і інерційний напір повинен мати знак плюс.

2. Обертання русла навколо вертикальної осі. Нехай русло, по якому рухається рідина, обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 1.30, б). Тоді на рідину діє сила інерції обертального руху, що є функцією радіуса. Тому для підрахунку роботи цієї сили або зміни потенційної енергії, обумовленої її дією, необхідно застосувати інтегрування.

На одиницю ваги буде діяти сила інерції $\omega^2 r/g$. Робота цієї сили при переміщенні уздовж радіуса на відстань dr дорівнює $\omega^2 r dr/g$, а при переміщенні від радіуса r_1 до радіуса r_2 (по будь-якій кривій) роботу знаходять інтегруванням цього виразу в межах від r_1 до r_2 . Виконавши інтегрування, знайдемо інерційний напір, тільки знак слід змінити на зворотний (як зазначалося вище):

$$\Delta H_{ин} = - \frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} r dr = - \frac{\omega^2}{2g} (r_2^2 - r_1^2), \quad (1.64)$$

7. Приклади використання рівняння Бернуллі в техніці

Витратомір потоку Вентурі являє собою пристрій, що встановлюється в трубопроводах і здійснює звуження потоку - дроселювання (рис. 13). Витратомір потоку складається з двох ділянок - плавно звужується (сопла) і поступово розширюється (дифузора). Швидкість потоку в звуженому місці зростає, а тиск падає. Виникає різниця (перепад) тисків, яка вимірюється двома п'єзометрами або диференціальним U-подібним манометром і певним чином пов'язана з витратою.

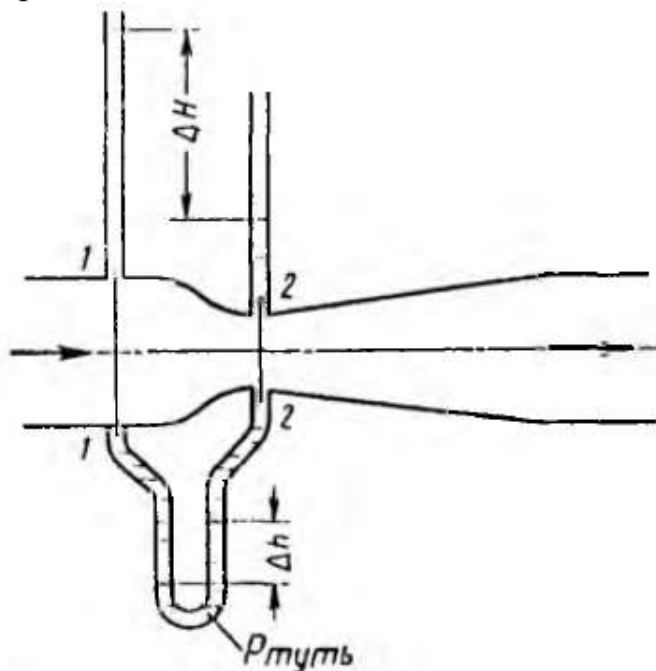


Рисунок 13 – Схема витратоміру Вентурі

Карбюратор поршневих двигунів внутрішнього згоряння служить для підсосу бензину і змішання з потоком повітря (рис. 14). Потік повітря, що всмоктує в двигун, звужується в тому місці, де встановлений розпилювач бензину (обріз трубки діаметром d). Швидкість повітря в цьому перерізі зростає, а тиск за законом Бернуллі падає. Завдяки зниженому тиску бензин витікає в потік повітря.

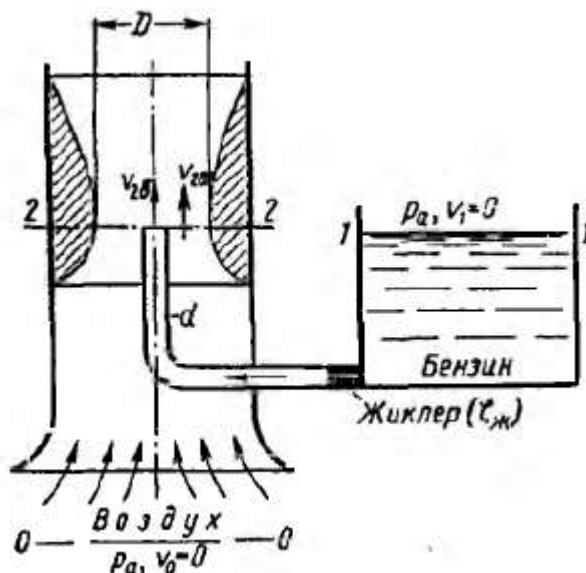


Рисунок 14 – Схема карбюрації

Трубка повного напору (або трубка Піто) служить для вимірювання швидкості, наприклад, в трубі (рис. 15). Якщо встановити в цьому потоці трубку, зігнуту під кутом 90° , отвором назустріч потоку і п'єзометр, то рідина в цій трубці піднімається над рівнем в п'єзометрі на висоту, рівну швидкісному напору. Пояснюється це тим, що швидкість v частинок рідини, що потрапляють в отвір трубки, зменшується до нуля, а тиск, отже, збільшується на величину швидкісного напору. Вимірявши різницю висот підйому рідини в трубці Піто і п'єзометрі, легко визначати швидкість рідини в даній точці.

На цьому ж принципі засновано вимірювання швидкості польоту літака. На рис. 16 показана схема літакової швидкісної трубки (насадка) для вимірювання малих порівняно зі швидкістю звуку швидкостей польоту.

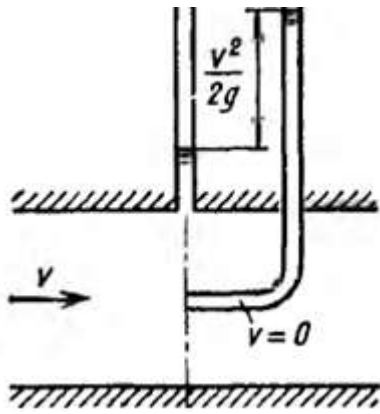


Рисунок 15 - Схема трубки повного напору

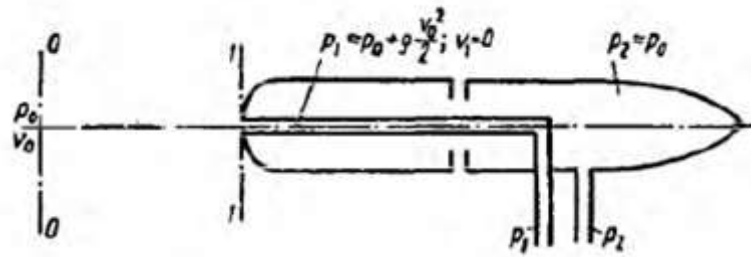


Рисунок 16 - Схема насадка для вимірювання швидкості

8. Застосування рівняння кількості руху до рідини

У деяких випадках у гідравліці зручно застосовувати рівняння кількості руху (імпульсу сил), наприклад коли треба знайти силу впливу потоку на перешкоду або русло, не розглядаючи процеси, що відбуваються всередині потоку рідини.

Як приклад визначимо *силу впливу потоку рідини на перешкоду*. Нехай рідина витікає в атмосферу і наштовхується на безмежну стінку, встановлену нормально до потоку. В результаті рідина розтікається по стінці, змінюючи напрямок своєї течії на 90° (рис. 17). Відомі площа перетину потоку S , швидкість витікання v і щільність рідини ρ .

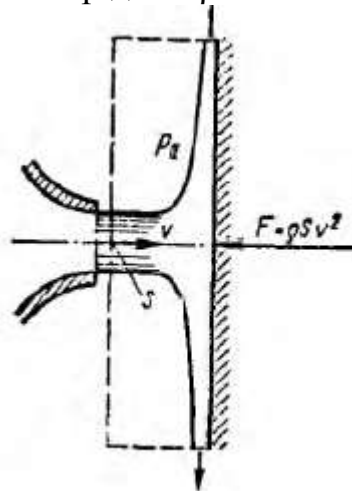


Рисунок 17 – Вплив струменя на перешкоду

Для вирішення даного завдання беремо фіксований об'єм, показаний штриховою лінією, і застосовуємо теорему Ейлера. Так як тиск всередині струменя і по поверхні рідини дорівнює атмосферному, тобто надлишковий тиск дорівнює нулю, рівняння, що виражає теорему Ейлера, для напрямку, що збігається з вектором швидкості витікання v_1 , матиме вигляд $-F = -\rho v S v$ или $F = \rho v^2 S$.

Це i є сила впливу потоку рідини на перешкоду. При іншому куті установки стінки або інших її формах i раз заходи в праву частину формули вводится безрозмірний коефіцієнт, відмінний від одиниці, але пропорційність сили F потоку $\rho S v^2$ зберігається

$$-F = -\rho v S v \quad \text{или} \quad F = \rho v^2 S.$$