МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

за темою − Елементи аналітичної геометрії

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 26.09.2022 № 9

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 19.09.2022 № 2

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 23.09.2022 № 9

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 12.09.2022 № 3
.

Розробники:
1. викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії Гусарова О.В.;
2. викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії Подгорних Н.В.

Рецензенти:
1. Завідувач відділення фахової підготовки навчального відділу КЛК ХНУВС, старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С. І.
2. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, к.т.н., доцент Черниш А.А.

План лекції

1. Пряма у просторі.
2. Площина у просторі.

Рекомендована література:

Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7 Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf

14. https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na

Текст лекції

1. Пряма у просторі.

Види рівнянь прямої у просторі.

Канонічне рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (1)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить пряма, а *m, n, p* – координати напрямного вектора прямої.

Визначення. Кожний вектор, що не дорівнює нулю, який лежить на прямій або паралельній їй, називається *напрямним вектором прямої*.

Загальне рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\vec{a}(m,n,p), \quad m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$ і $A_2(x_2,y_2,z_2)$, має вигляд :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3)$$

Косинус кута між двома прямими $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ визначають за формулою:

$$\cos\varphi=\pm\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \qquad (4)$$

Умова перпендикулярності двох прямих у просторі має вигляд: $mm_1+nn_1+pp_1=0.$ (5)

Умова паралельності двох прямих у просторі має вигляд:

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}. \qquad (6)$$

2. Площина у просторі.

Основні означення та співвідношення площини.

Загальне рівняння площини - $Ax + By + Cz + D = 0$. (7)

Косинус кута між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ визначають за формулою:

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (8)$$

Умова перпендикулярності двох площин має вигляд: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Умова паралельності двох площин має вигляд: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

Відстань від точки $N(x_1, y_1, z_1)$ *до площини* $Ax + By + Cz + D = 0$ визначають за формулою:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \qquad (9)$$

Рівняння площини, що проходить через три дані точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Взаємне розміщення прямої та площини у просторі.

Гострий кут між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ *і площиною* $Ax + By + Cz + D = 0$ визначають як кут між прямою та проекцією цієї прямої на площину.

Синус цього кута визначають за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (11)$$

Умова паралельності прямої та площини у просторі має вигляд:

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (12)$$

Умова перпендикулярності прямої та площини у просторі має вигляд:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (13)$$

Приклад 1. Дано чотири точки $A_1(1, 2, 3)$, $A_2(4, -1, -2)$, $A_3(4, 0, 3)$, $A_4(2, 1, 6)$. Скласти рівняння: а) площини $A_1A_2A_3$; б) прямої A_1A_2; в) прямої A_4M, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$; г) прямої A_3N, паралельної прямій A_1A_2; д) площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2. Обчислити: е) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$; ж) косинус кута між координатною площиною *0xy* і площиною $A_1A_2A_3$.

Розв'язок. а) Складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$ як площини, що проходить через три точки A_1, A_2, A_3. Скористаємось формулою (4.12)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Обчисливши визначник, отримаємо загальне рівняння площини в загальному вигляді: $10x + 15y - 3z - 31 = 0.$

б) Складемо рівняння прямої A_1A_2 як прямої, що проходить через дві точки A_1 і A_2, скориставшись формулою (4.15):

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z-3}{-2-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}.$$

в) Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку $A_4(2,1,6)$:

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-6}{p}.$$

Направляючий вектор прямої $\vec{a}(m,n,p)$ колінеарний нормальному вектору площини $\overrightarrow{N}(A,B,C)$. Тому з умови колінеарності двох векторів можемо записати, що $m=10,\ n=15,\ p=-3$, а отже, рівняння прямої A_4M, що перпендикулярна до площини $A_1A_2A_3$, має вигляд :

$$\frac{x-2}{10} = \frac{y-1}{15} = \frac{z-6}{-3}.$$

г) Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку $A_3(4,0,3)$:

$$\frac{x-4}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

З умови паралельності прямої A_1A_2 випливає, що $m=3,\ n=-3,\ p=-5$. Тому рівняння прямої A_3N, що паралельна прямій A_1A_2, має вигляд:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{-5}.$$

д) Рівняння в'язки площин, що проходять через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Звідси рівняння в'язки площин, що проходять через точку $A_4(2,\ 1,\ 6)$, буде мати вигляд:

$$A(x-2) + B(y-1) + C(z-6) = 0.$$

Направляючий вектор прямої A_1A_2 є нормальним вектором площини, а тому можемо записати, що $A=m,\ B=n,\ C=p$, або $A=3,\ B=-3,\ C=-5$.

$$3(x-2) - 3(y-1) - 5(z-6) = 0 ,$$

$$3x - 3y - 5z + 27 = 0.$$

е) Синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$ обчислимо, використовуючи формулу для обчислення $\sin\varphi$ між прямою і площиною.

Складемо рівняння прямої A_1A_4:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-3}{6-3}, \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{3}.$$

Рівняння площини $A_1A_2A_3$: $-10x-15y+3z+31=0$

$m = 1,\ n = -1,\ p = 3,\ A = -10,\ B = -15,\ C = 3.$

$$\sin\varphi=\frac{1\cdot(-10)-1\cdot(-15)+3\cdot 3}{\sqrt{1+1+9}\sqrt{100+225+9}}=\frac{-10+15+9}{\sqrt{11}\sqrt{334}}=\frac{14}{\sqrt{3674}}.$$

ж) Рівняння координатної площини *0xy* має вигляд: $z = 0.$

Обчислимо косинус кута між координатною площиною *0xy* і площиною $A_1A_2A_3$, використовуючи формулу для обчислення кута між двома площинами:

$$A_1=0,\quad B_1=0,\quad C_1=1,\quad A_2=-10,\quad B_2=-15,\quad C_2=3.$$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{3}{\sqrt{100+225+9}}=\frac{3}{\sqrt{334}}.$$

Контрольні питання:

1. Запишіть умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
2. Запишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
3. Запишіть формулу, за якою знаходять кут між площинами.
4. Запишіть умову паралельності та перпендикулярності площин.
5. Запишіть формулу для обчислення відстані від точки до площини.
6. Запишіть канонічне рівняння прямої у просторі та вкажіть геометричний зміст параметрів, що входять до цих рівнянь.
7. Запишіть рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки.
8. Запишіть умову паралельності й перпендикулярності прямих у просторі.
9. Запишіть формулу, за якою знаходять кут між прямою у просторі та площиною.
10. Запишіть умову паралельності й перпендикулярності прямої у просторі та площини.