МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

за темою − Диференціальні рівняння

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 26.09.2022 № 9

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 19.09.2022 № 2

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 23.09.2022 № 9

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 12.09.2022 № 3
.

Розробники:
1. викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії Гусарова О.В.;
2. викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії Подгорних Н.В.

Рецензенти:
1. Завідувач відділення фахової підготовки навчального відділу КЛК ХНУВС, старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С. І.
2. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, к.т.н., доцент Черниш А.А.

План лекції

1. Диференціальні рівняння, основні визначення.
2. Рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку. Задача Коші.
3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Рекомендована література:

Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7 Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних

інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf
14. https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na

Текст лекції

1. Диференціальні рівняння, основні визначення

Визначення. *Звичайним диференціальним рівнянням* називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні y', y'' ,…, $y^{(n)}$.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \text{або} \qquad F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0. \quad (1)$$

Визначення. *Порядком* диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що входить до рівняння.

Визначення. З*агальним розв'язком* диференціального рівняння називається функція

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (2)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ - довільні сталі, після підстановки якої рівняння і перетворюється на тотожність.

Визначення. Рівність вигляду $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, яка неявно задає загальний розв'язок, називається *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Задача Коші для диференціального рівняння *n*-го порядку полягає в тому, щоб знайти розв'язок рівняння, який задовольняє умовам $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0$,…, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$, де x_0, y_0, y'_0,…, $y_0^{(n-1)}$ - задані числа, які називають *початковими даними* або *початковими умовами.*

Визначення. Частинним *розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = f(x)$, при числових значеннях довільних сталих у розв'язку (9.2).

У загальному розв'язку рівняння (1) число довільних сталих дорівнює порядку рівняння. Диференціальне рівняння має нескінчену множину частинних розв'язків.

2. Рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.

Рівняння $y^{(n)} = f(x)$. (3)

Розв'язок цього рівняння знаходять *n-кратним* інтегруванням:

$y^{(n)} = f(x)$,

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1$,

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

……

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n,$$

де $f_n(x) = \underset{n \ раз}{\iiint} f(x)\,dx^n$.

Тому що $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$,...., є довільні сталі, то загальний розв'язок (3) може бути записаний у вигляді:

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n.$$

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Розв'язок. Знайдемо загальний розв'язок послідовним інтегруванням даного рівняння

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int [-xe^{-x} - e^{-x} + C_1]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

$$y = (x+2)e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Скористаємося початковими умовами: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$$y' = e^{-x} - (x+2)e^{-x} + C_1$$

$y'(0) = 0$: $\quad 0 = e^0 - 2e^0 + C_1, \quad C_1 = 1.$

$y(0) = 1$: $\quad 1 = 2e^0 + C_2, \quad C_2 = -1.$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y = (x+2)e^{-x} + x - 1.$$

Рівняння $y'' = F(x, y')$. Рівняння не містить змінної y. Заміна $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dx}$. Така заміна дозволяє звести дане рівняння до рівняння першого порядку $z' = f(x, z)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + y'\,tgx = \sin 2x$.

Розв'язок. Це рівняння не містить y. Вважаючи $y' = z$, перетворимо рівняння до виду $z' + z\,tgx = \sin 2x$. Ми отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно функції z. Інтегруємо його. Вважаючи в рівнянні $z = u\,v$, $z' = u'\,v + u\,v'$, одержимо:

$u'\,v + u\,v' + u\,v\,tgx = \sin 2x$, $\quad u'\,v + u\,(v' + v\,tgx) = \sin 2x$.

Визначаємо v, взявши $v' + v\,tgx = 0$, $\frac{dv}{dx} + v\,tgx = 0$, $\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{\sin x}{\cos x}dx$, звідки $\ln|v| = \ln|\cos x|$, або $v = \cos x$.

Визначимо $u(x)$:

$\cos x\dfrac{du}{dx}=2\sin x\cos x$, $du=2\sin x\,dx$, відкіля $u(x)=-2\cos x+C_1$; отже,

$z=-2\cos^2 x+C_1\cos x$.

Повертаючись до змінної y, маємо

$\dfrac{dy}{dx}=-2\cos^2 x+C_1\cos x$, $y=-2\int\cos^2 x\,dx+\int C_1\cos x\,dx+C_2$,

$y=-2\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}\,dx+C_1\sin x+C_2$, $y=-x-\dfrac{\sin 2x}{2}+C_1\sin x+C_2$.

Диференціальне рівняння $F(y,y',y'')=0$**,** яке не містить незалежної змінної.

Це рівняння допускає пониження порядку за допомогою заміни $y'=z(y)$, $y''=z\dfrac{dz}{dy}$, або $y''=zz'$. Тоді $F(y,y',y'')=\widetilde{F}(y,z,z')=0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2yy''=1+y'^2$.

Розв'язок. Уважаючи $y'=z$, $y''=z\,z'$, отримаємо рівняння I порядку відносно невідомих z як функції від y.

$2y\,z\,z'=1+z^2$.

Розділимо змінні й проінтегруємо:

$\dfrac{2z}{1+z^2}\,dz-\dfrac{dy}{y}=0$, $\ln|1+z^2|-\ln|y|=\ln|C_1|$,

$\dfrac{1+z^2}{y}=C_1$, $1+z^2=yC_1$, $z=\pm\sqrt{yC_1-1}$.

Повертаючись до змінної x, отримаємо:

$y'=\pm\sqrt{yC_1-1}$, $\pm\dfrac{dy}{\sqrt{yC_1-1}}=dx$, $\pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{yC_1-1}=x+C_2$,

$\pm 2\sqrt{yC_1-1}=C_1(x+C_2)$, $4(yC_1-1)=C_1^2(x+C_2)^2$,

$4yC_1=C_1^2(x+C_2)^2+4$, $y=\dfrac{C_1^2(x+C_2)^2+4}{4C_1}$.

Задача Коші для рівняння другого порядку полягає в розв'язанні рівняння $F(x,y,y',y'')=0$ за початкових умов $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$. З геометричної точки зору ці умови означають, що з множини інтегральних кривих загального розв'язку рівняння потрібно виділити одну єдину криву, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ і має в цій точці заданий кут нахилу дотичної $y'(x_0)=y_0'$ до додатнього напрямку осі $0x$.

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші: $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\ln 2}{2}$,

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

Розв'язок. Спочатку знайдемо загальний розв'язок.

$y'=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C,\quad y'=tgx+C,$

$y=\int(\mathrm{tg}x+C)dx \quad\Rightarrow\quad y=-\ln\cos x+Cx+C_1.$

Підставляємо до загального розв'язку початкові умови та знаходимо C_1 і C.

$$\begin{cases} y=-\ln\cos x+Cx+C_1 \\ y'=\mathrm{tg}x+C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln 2}{2}=-\ln\cos\frac{\pi}{4}+C\frac{\pi}{4}+C_1 \\ 1=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+C \end{cases} \Rightarrow \quad C=0.$$

$$\frac{\ln 2}{2}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=0.$$

Отже, частинний розв'язок задачі після підстановки до загального розв'язку значень C_1 і C має вигляд $y=-\ln\cos x$.

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Визначення. Рівняння вигляду $ay''+by'+cy=0,$ (4)

де *a, b, c* - сталі, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Теорема. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - два лінійнонезалежні частинні розв'язки рівняння $ay''+by'+cy=0,$ $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const,$ то загальний розв'язок цього рівняння $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$ (5)

Для визначення частинних розв’язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (4) складаємо характеристичне рівняння

$$ak^2+bk+c=0,\qquad (6)$$

де k - корінь, який визначають за формулою

$$k=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\quad D=b^2-4ac.$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння (6) загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

а) якщо корені рівняння $k_1\neq k_2$ - дійсні різні, то загальний розв'язок $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x};$ (7)

б) якщо корені рівняння $k_1=k_2=k$ - дійсні й рівні, то загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}=e^{kx}(C_1+C_2x);\qquad (8)$$

в) якщо корені рівняння $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ - комплексно спряжені, то загальний розв'язок $y=C_1e^{\alpha x}\sin\beta x+C_2e^{\alpha x}\cos\beta x$. (9)

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-7y'+6y=0$.

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння $k^2-7k+6=0$; його корені $k_1=6$, $k_2=1$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}$.

Приклад 6. Знайти розв'язок задачі Коші: $y''-2y'+y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=2$.

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння $k^2-2k+1=0$; його корені $k_1=k_2=1$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}$.

Підставляючи початкові умови до загального розв'язку і його похідну, одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2.

$y'=C_1e^{x}+C_2e^{x}+C_2xe^{x}$

$$\begin{cases}4=C_1,\\2=C_1+C_2,\end{cases}\qquad\begin{cases}4=C_1,\\-2=C_2.\end{cases}$$

Звідси розв'язок, який задовольняє поставлені початкові умови, має вигляд:

$y=4e^{x}-2xe^{x}$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+6y'+13y=0$.

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння $k^2+6k+13=0$; його корені $k_{1,2}=-3\pm2i$. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені, а тому загальний розв'язок є:

$y=C_1e^{-3x}\sin 2x+C_2e^{-3x}\cos 2x$.

4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$ay''+by'+cy=f(x)$, (10)

$a,b,c\in const$ і з неперервною правою частиною $f(x)$.

Визначення. Якщо в (9.29) $f(x)=0$, то рівняння $ay''+by'+cy=0$ називається *відповідним однорідним рівнянням*.

Загальний розв'язок Y рівняння (10) є сумою частинного розв'язку $\bar{y}$ неоднорідного рівняння і загального розв'язку y відповідного однорідного рівняння $ay''+by'+cy=0$, тобто

$$Y=y+\bar{y}. \qquad (11)$$

Якщо y_1 - частинний розв'язок рівняння $ay''+by'+cy=f_1(x)$, а y_2 -

частинний розв'язок рівняння $ay'' + by' + cy = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ - частинний розв'язок рівняння $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$. (12)

Коли функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, то загальний розв'язок рівняння (10) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

1. Якщо права частина лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами має вигляд $e^{\alpha x}P(x)$, де $P(x)$ - многочлен *n*-ого степеня й α не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв'язок вигляду $\bar{y} = e^{\alpha x}M(x)$, де $M(x)$ - деякий многочлен *n*-ого степеня:

$$M(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n.$$

Коефіцієнти A_i визначають із системи рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.

Якщо ж α є коренем характеристичного рівняння кратності k ($k = 1$ або $k = 2$), то шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $\bar{y} = x^k e^{\alpha x}M(x)$.

Зокрема, при $\alpha = 0$ права частина - многочлен *n*-ого степеня, та якщо $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $M(x)$ - є також многочлен того самого степеня. Якщо ж $\alpha = 0$ - корінь кратності *k*, то частинний розв'язок має вигляд: $\bar{y} = x^k M(x)$.

2. Якщо ж права частина лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x],$$

де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ - многочлени (*n* - найбільший з їх степенів) і $z = \alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв'язок вигляду:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x],$$

де $M(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$

і $N(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + ... + B_nx^n$ -

многочлени степеня *n*. Якщо ж $z = \alpha \pm \beta i$ є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв'язок вигляду:

$$\bar{y} = xe^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x].$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 3y = x$.

Розв'язок. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 4y' + 3y = 0$. Відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 3 = 0$, а його корені $k_1 = -1$, $k_2 = -3$. Загальний розв'язок є $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

Оскільки права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд xe^{0x} (тобто вигляд $P_1(x)e^{0x}$), причому 0 не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + 4k + 3 = 0$, то частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$\bar{y} = Ax + B$.

Підставимо цей вираз до заданого рівняння:

$\overline{y'} = A$, $\overline{y''} = 0$.

$4A + 3(Ax + B) = x$, $3Ax + 4A + 3B = x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, отримаємо систему для визначення коефіцієнтів A і B

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} 3A = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases}$$

Звідси $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{4}{9}$. Отже, $\bar{y} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$. Загальний розв'язок із (3.25) $Y = y + \bar{y}$ буде:

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.

Розв'язок. Відповідне однорідне рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0$; його корені $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$.

Тут права частина має вигляд $P_1(x)e^{1x}$, причому коефіцієнт 1 у показнику степеня є простим коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$\bar{y} = x(Ax + B)e^x$, $\bar{y} = (Ax^2 + Bx)e^x$,

$\overline{y'} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$,

$\overline{y''} = 2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$.

Підставляючи $\bar{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$ до заданого рівняння, будемо мати:

$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) +$

$+ 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x$,

$-10Ax - 5B + 2A = x - 2$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо:

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases},$$

звідки $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. Отже, частинним розв'язком є:

$$\bar{y} = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x,$$

а загальним - $Y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x} + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^{x}$.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$ має корені $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є:

$$y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$\bar{y} = A\cos x + B\sin x$,

де A і B - сталі коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Підставляючи $\bar{y}$ до заданого рівняння, будемо мати:

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x+) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержимо систему двох рівнянь для визначення A і B:

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 2, \\ -B - 2A + 5B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$. Загальний розв'язок даного рівняння $Y = y + \bar{y}$, тобто

$$Y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \cos 2x$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має корені $k_1 = 2i$; $k_2 = -2i$; тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі:

$\bar{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Тоді $\bar{y}' = 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\sin 2x)$,

$\bar{y}'' = 4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4(-A\sin 2x + B\cos 2x)$.

Підставляючи ці вирази для похідних до даного рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$, одержуємо систему рівнянь для визначення A і B:

$$\begin{cases} 4B = 1, \\ -4A = 0, \end{cases}$$

звідки $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$.

Таким чином, загальний інтеґрал даного рівняння

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x .$$

Контрольні питання:

1. Наведіть типи диференціальних рівнянь, які допускають зниження порядку.

2. Як записують загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?

3. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

4. Запишіть частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку для випадків, коли $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, $f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x]$.