МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Технології робіт та технологічне обладнання аеропортів

за темою − Диференціальне числення функцій двох змінних

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 26.09.2022 № 9

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 19.09.2022 № 2

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 23.09.2022 № 9

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 12.09.2022 № 3

Розробник: викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії Гусарова О.В.

Рецензенти:
1. Завідувач відділення фахової підготовки навчального відділу КЛК ХНУВС, старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С. І.
2. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, к.т.н., доцент Черниш А.А.

План лекції

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Частинні похідні. Мішані похідні.
3. Екстремуми функції двох змінних.
4. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Рекомендована література:

Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7 Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf
14. https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na

Текст лекції

1. Поняття функції багатьох змінних.

При вивченні багатьох процесів доводиться зустрічатися з функціями двох і більше незалежних змінних. Функції багатьох змінних будемо вивчати, спираючись на функції двох незалежних змінних.
Нехай задані три непорожні числові множини $X=\{x\},\ Y=\{y\},\ Z=\{z\}$.

Визначення. Якщо парі чисел $(x,\ y)\in D$ ставиться у відповідність за деяким законом чи правилом одне і тільки одне число *z*, то говорять, що задана функція і що *z* є *функцією двох незалежних змінних* *x* і *y*. Пишуть: $z=f\,(x,\ y)$.

Визначення. Множина пар чисел $(x,\ y)$, при яких існує функція $z=f\,(x,\ y)$, називається *областю визначення* або *областю існування* цієї функції і позначається $D(f)$.

<u>Приклад 1.</u> Знайти область визначення функції $z=2x-y$.

Розв’язання. Аналітичний вираз $2x-y$ має сенс при будь-яких значеннях x і y. Отже, областю визначення функції є вся площина $0xy$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти область визначення функції $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Розв’язання. Дана функція визначена при тих значеннях x і y, для яких має місце нерівність $1-x^2-y^2\ge 0$, тобто $x^2+y^2\le 1$. Цій нерівності задовольняє множина точок площини $M\,(x,\ y)$, що знаходяться усередині одиничного круга із центром в початку координат (рис. 1).

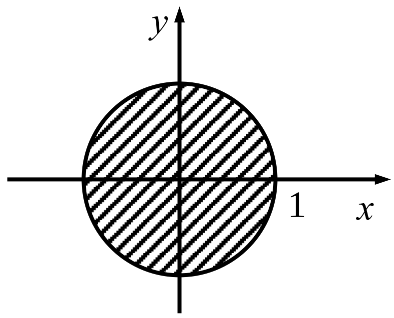

Рис. 1

Границя та неперервність функції багатьох змінних

Визначення. *Околом* точки $M_0(x_0, y_0)$ називається множина усіх точок площини $(x,\ y)$, які задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$. Геометрично це множина точок, що лежать усередині круга радіуса r із центром у точці $M_0(x_0, y_0)$. Позначається $r(M_0)$.

Нехай дана функція $z=f\,(x,\ y)$, визначена в деякій області D площини $0xy$. Розглянемо деяку точку $M_0(x_0, y_0)$, яка знаходиться в області D або на її межі.

Визначення. Число A називається *границею функції* $f\,(x,\ y)$ при прямуванні точки $M\,(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо для кожного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $r > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, для яких виконується нерівність $\left|\overrightarrow{MM_0}\right| < r$, має місце нерівність $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функції $f(x, y)$.

Визначення. Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо виконується умова $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Визначення. Функція називається *неперервною в області* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Визначення. Якщо в деякій точці $N(x_0, y_0)$ має місце $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$, то точка $N(x_0, y_0)$ називається *точкою розриву* функції $z = f(x, y)$.

2. Частинні похідні. Мішані похідні.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$.

Надамо незалежній змінній x приріст Δx, а y залишимо без змін; тоді функція z отримає приріст, який називають *частинним приростом функції* z *по змінній* x і позначають через

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогічно, якщо x зберігає стале значення, а y одержує приріст Δy, то функція z отримає *частинний приріст z по змінній y*

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Нарешті, якщо аргументу x надамо приріст Δx, а аргументу y – Δy, то отримаємо *повний приріст* функції z

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Визначення. *Частинною похідною* від функції $z = f(x, y)$ *за змінною* x називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту аргументу Δx при $\Delta x \to 0$, якщо ця границя існує і скінченна.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

При обчислюванні частинних похідних справедливі теореми та формули диференціювання функції однієї змінної. Під час обчислення *частинної похідної по x або по y* від функції $z = f(x, y)$ друга змінна вважається сталою.

<u>Приклад 3.</u> Знайти частинні похідні функції $z = x^2 \sin y$.

Розв'язання. При обчисленні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ множник $\sin y$ виносимо за знак похідної як сталу величину. При обчисленні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ множник x^2 виносимо за знак похідної як сталу величину. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Мішані похідні

Нехай $z = f(x, y) \in D$ неперервна та диференційована функція. Тоді $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ називаються *частинними похідними першого порядку*. Якщо їх в свою чергу можна диференціювати, то існують другі похідні і т.д. Для них можемо записати наступний ланцюжок похідних

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

і т.д.

Похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ та $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ називають прямими похідними по змінним. Похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ називають мішаними похідними. Для функції двох незалежних змінних існують дві прямі та дві мішані похідні другого порядку.

<u>Приклад 4.</u> Знайти частинні похідні другого порядку функції

$z = x^2 y + y^3$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x, y)$ є двічі диференційована і неперервна в області D, то в цій області мішані похідні другого порядку рівні між собою

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

3. Екстремуми функції двох змінних.

Визначення. Функція $z = f(x, y)$ набуває максимального значення точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо у околі $r(M_0)$ справедлива нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)\ \forall (x, y) \in D(f)$.

Визначення. Функція $z = f(x, y)$ набуває мінімального значення у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо у околі $r(M_0)$ справедлива нерівність $f(x_0, y_0) < f(x, y)\ \forall (x, y) \in D(f)$.

Визначення. Максимум і мінімум функції називаються *екстремумами* функції.

Теорема 2 (необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ досягає екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$, то частинні похідні першого порядку функції z в цій точці обертаються в нуль або не існують.

Визначення. Точки, у яких частинні похідні першого порядку функції обертаються в нуль або не існують, називаються *критичними точками* функції $z = f(x, y)$.

Отже, якщо функція досягає екстремуму, то це може трапитися лише в критичній точці.

Теорема 3 (достатні умови існування екстремуму). Нехай у деякій області D, що містить точку $M_0(x_0, y_0)$, функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно; нехай, крім того, точка $M_0(x_0, y_0)$ є критичною точкою перших похідних функції $f(x, y)$, тобто

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тоді, якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$:

1) $rt - s^2 > 0$ і $r < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимуму,

2) $rt - s^2 > 0$ і $r > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка мінімуму,

3) $rt - s^2 < 0$ – екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$ немає,

4) $rt - s^2 = 0$ – потрібні додаткові дослідження,

де $\quad r=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\qquad s=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\,\partial y},\qquad t=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}.$

<u>Приклад 5.</u> Дослідити на екстремум функцію $z=x^2-xy+y^2+3x-$ $-2y+1$.

Розв'язання. 1) Знаходимо критичні точки першої похідної

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-2.$$

$$\begin{cases} 2x-y+3=0,\\ -x+2y-2=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

2) Знаходимо похідні другого порядку в критичній точці $M_0\left(-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$ і визначаємо характер екстремуму:

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1,\qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2.$$

Отже, $M_0\left(-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$ – точка мінімуму. $\quad z_{\min}=-\dfrac{4}{3}$.

<u>Приклад 6.</u> Дослідити на екстремум функцію $z=x^3+y^3-3xy$.

Розв'язання. 1) Знаходимо критичні точки

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0.$$

$$\begin{cases}3x^2-3y=0,\\ 3y^2-3x=0.\end{cases}\qquad \begin{cases} x_1=1, & y_1=1.\\ x_2=0, & y_2=0.\end{cases}\qquad \begin{matrix} A(1,\ 1)\\ B(0,\ 0)\end{matrix}$$

2) Знаходимо значення похідних другого порядку в критичних точках:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

$$r\big|_A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_A=6,\ \ s\big|_A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_A=-3,\ \ t\big|_A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_A=6.$$

Отже, в точці A маємо

$rt-s^2=27>0,\quad r>0$. Точка A є точкою мінімуму.

$z_{\min}=-1$.

$$r\big|_B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_B=0,\ \ s\big|_B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_B=-3,\ \ t\big|_B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_B=0.$$

$rt-s^2=-9<0$.

Згідно достатньої умови, у точці B екстремуму немає.

Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Теорема 4. Якщо в замкненій області D функція $z = f(x, y)$ неперервна та двічі диференційована, то в ній вона набуває свого найбільшого $\sup\limits_D z$ та найменшого $\inf\limits_D z$ значення.

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області, необхідно:

1) знайти критичні точки, розташовані в даній області, і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на лініях, які утворюють границю області;

3) із усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше. Це і буде $\sup\limits_D z$ та $\inf\limits_D z$.

Приклад 7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ у трикутнику з вершинами $O(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$.

Розв'язання. Тут область D – трикутник OBC.

1. Знайдемо критичні точки перших похідних функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$$

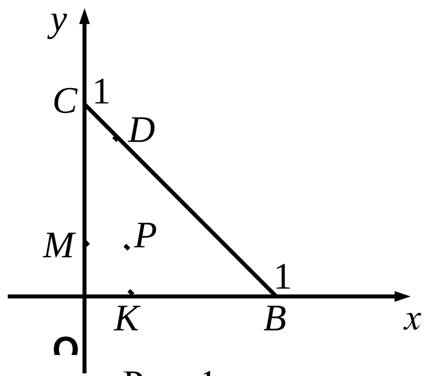

Рис. 1

Точка P знаходиться в середині трикутника OBC.

Обчислимо значення функції в точці P:

$$z(P) = z\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

2. Знайдемо найбільше і найменше значення на стороні OB трикутника OBC. Для цього підставимо рівняння границі $y = 0$ в функцію z і в результаті маємо функцію однієї змінної $z = 3x^2 - 2x + 2$.

Критичні точки знаходимо з рівняння $z'(x) = 0$:

$$6x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad K\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$$

Отже, найбільше і найменше значення на стороні OB досягається або на кінцях відрізка, тобто в точках O і B, або в точці K. Підставляємо отримані координати в функцію.

$$z(K) = z\left(\frac{1}{3},\ 0\right) = \frac{5}{3}.$$

3. Знайдемо найбільше і найменше значення на стороні OC трикутника OBC. Для цього підставимо рівняння границі $x = 0$ в функцію z і в результаті маємо функцію однієї змінної $z = 3y^2 - 2y + 2$.

Критичні точки визначаємо з рівняння $z'(y) = 0$:

$$6y - 2 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad M\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$$

$$z(M) = z\left(0,\ \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

4. Знайдемо найбільше і найменше значення на стороні BC трикутника OBC. На ній $x + y = 1 \quad (0 \le x \le 1)$ і $z = 6x^2 - 6x + 3$.

Критичні точки визначаємо з рівняння $z'(x) = 0$:

$$12x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad D\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right)$$

$$z(D) = z\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right) = \frac{30}{16}.$$

5. Обчислюємо значення функції в вершинах трикутника:

$z(O) = z(0,\ 0) = 2$

$z(B) = z(1,\ 0) = 3$

$z(C) = z(0,\ 1) = 3$

Отже, $\sup\limits_D z = z(B) = z(C) = 3$, а $\inf\limits_D z = z(P) = \dfrac{4}{3}$.

Контрольні питання:

1. Функція двох змінних.
2. Область визначення функції двох змінних.
3. Неперервність функціїдвох змінних.
4. Що таке частинні похідні?
5. Що таке мішані похідні?
6. Як знайти екстремум функції багатьох змінних?