МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Факультет № 4

Кафедра інформаційних технологій

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

з дисципліни

«Теорія ймовірностей і математична статистика»

Галузь знань	**07 Управління та адміністрування**
Спеціальність	**072 Фінанси, банківська справа та страхування**
Ступень вищої освіти	**Бакалавр**
Форма навчання	**денна, заочна**

м. Харків
2018 р.

Передмова

СХВАЛЕНО Науково-методичною радою ХНУВС ______________ Протокол № _______ (дата, місяць, рік)	**ЗАТВЕРДЖЕНО** Вченою радою факультету № 4 ХНУВС ______________Протокол № _______ (дата, місяць, рік) ______________ ________________ (підпис) (П.І.Б.)
ПОГОДЖЕНО Секцією науково-методичної ради ХНУВС з технічних дисциплін ______________ Протокол № _______ (дата, місяць, рік) ______________ ________________ (підпис) (П.І.Б.)	**ЗАТВЕРДЖЕНО** На засіданні кафедри інформаційних технологій ______________Протокол № _______ (дата, місяць, рік) ______________ ________________ (підпис) (П.І.Б.)

Рецензенти:
Гнусов Ю.В., кандидат технічних наук, доцент, начальник кафедри кібербезпекі факультету № 4 Харківського національного університету внутрішніх справ

Яськов Г.М., кандидат технічних наук, доцент, науковий співробітник відділу математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Розробники: Мелащенко О.П., Шеховцов С.Б. - Харків, Харківський національний університет внутрішніх справ, 2018

Зміст

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Основні поняття і теореми теорії ймовірностей

1.1. Предмет теорії ймовірностей

У своїй практичній діяльності ми часто зустрічаємося з подіями і явищами, результат яких не визначений і залежить від випадку. Інакше кажучи, якщо таке явище спостерігати один раз, то не можна точно прогнозувати, як воно буде протікати. Але якщо це явище спостерігати багаторазово при незмінних умовах, то можна встановити певні закономірності, яким воно підкоряється. Так, якщо підкинути монету один раз, те не можна передбачити заздалегідь, що випаде - герб або цифра. Якщо ж зробити серію з досить великої кількості підкидань монети, то можна встановити закономірність, яка полягає в тому, що відношення числа випадків, коли випав герб, до загального числа підкидань тим менш відрізняється від 0.5, чим більше число підкидань монети. Про результати подібних явищ говорять, що вони мають статистичну сталість.

Випадкові явища й події, що характеризуються статистичною сталістю, широко поширені у фізиці, біології, психології, економіці, а також у різних сферах людської діяльності.

Теорія ймовірностей – розділ математики, у якому вивчаються статистично сталі випадкові події і явища незалежно від їхньої конкретної природи, а також виявляються закономірності при масовому їхньому повторенні.

1.2. Класифікація подій

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття події. Під *подією* розуміється будь-який результат випробування або експерименту. У свою чергу під *випробуванням* розуміється виконання певного комплексу умов, при яких проводиться спостереження, і який може бути відтворений як завгодно велику кількість разів.

Подіями можна вважати випадання герба, влучення в мішень, появу бракованого виробу й т.п. Випробуваннями в цих прикладах є, відповідно, кидок монети, постріл по мішені, здійснення контролю якості продукції.

Події будемо позначати великими буквами латинського алфавіту: $A,B,C,...$

Неподільні результати одного випробування, що виключають один одного, називаються *елементарними подіями* або *елементарними наслідками*. Усі разом вони поєднуються в множину, котра називається *простором елементарних подій.*

Так, при одному киданні гральної кістки елементарними подіями будуть випадання одного, двох, ... , шести очок.

Дві події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає можливість настання іншої. У протилежному випадку події називаються *сумісними*.

Влучення в мішень і промах при одному пострілі є несумісними подіями. Поява числа 2 і парне числа очок при однократному киданні гральної кістки - сумісні події.

Несумісність більш ніж двох подій означає їхню попарну несумісність.

Одні і ті самі події можуть бути несумісними в одному випробуванні й сумісними в іншому.

Наприклад, поява герба й поява цифри при киданні однієї монети - події несумісні. Ті ж події - поява герба й цифри - є сумісними, якщо кидаються дві монети.

Подія називається вірогідною, якщо воно обов'язково відбудеться при виконанні певних умов. Подія називається *неможливою*, якщо вона свідомо не може відбутися в умовах даного випробування.

Якщо в урні є тільки білі кулі, то виймання білої кулі - вірогідна подія, а виймання чорної кулі - неможлива подія.

Подія називається *випадковою*, якщо в результаті випробування вона може або відбутися, або не відбутися.

Поява певного числа очок, наприклад трьох, при киданні гральної кістки - випадкова подія.

Подія A називається сприятливою щодо події B, якщо з того, що відбулася подія A, випливає, що відбулася подія B.

Поява числа 2 при киданні гральної кістки є сприятливою подією щодо появи парного числа очок.

Події A, B, C,... називаються *єдиноможливими*, якщо при випробуванні обов'язково відбудеться одна й тільки одна з них.

Якщо в урні знаходяться білі й чорні кулі, то при вийманні двох куль єдиноможливими будуть події: A – обидві кулі білі, B – обидві кулі чорні, C – одна куля біла, інша чорна.

Якщо при випробуванні може відбутися кілька подій і немає підстав вважати появу однієї з них більш можливою, чим поява інших, то події називаються *рівноможливими*.

Поява герба й цифри при киданні монети є рівноможливими подіями.

Множина подій даного випробування утворює *повну групу подій*, якщо вони є несумісними і єдиноможливими.

Нехай в урні знаходяться кулі трьох кольорів - білого, червоного й синього. Навмання виймають одну кулю. Тоді події, що складаються в вийманні білої, червоної або синьої кулі, утворюють повну групу подій.

Дві події, одна й яких обов'язково повинна відбутися в даному випробуванні, але поява однієї з них виключає появу іншої події, називаються *протилежними*.

Наприклад, події "випав герб" і "випала цифра" - протилежні при киданні однієї монети.

Ясно, що протилежні події є несумісними і єдиноможливими, тобто утворюють повну групу подій.

Події, протилежні подіям A, B, C,... будемо позначати через $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$...

1.3. Класичне визначення ймовірності події

Для визначення числової характеристики міри можливості появи будь-якої події в тому або іншому випробуванні, введемо поняття ймовірності події.

Нехай у результаті випробування може відбутися кінцеве число n елементарних подій, серед яких є m $(m \le n)$ подій, сприятливих щодо події A.

Імовірністю подїї A називають відношення числа m сприятливих цій події результатів випробування, до загального числа n всіх несумісних, єдиноможливих і рівноможливих елементарних результатів випробування.

Імовірність події позначається символом $P(A)$ (від слова probabilities – імовірність). Читається: імовірність події A.
Таким чином, за визначенням

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де m – число елементарних результатів, сприятливих щодо події A; n – число всіх єдиноможливих, рівноможливих і несумісних наслідків випробування.

Приклад. При киданні гральної кістки можливі шість елементарних наслідків – випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок. Яка ймовірність появи парного числа очок?
Рішення. Всі $n = 6$ наслідків рівноможливі і утворюють повну групу, тобто є несумісними, єдиноможливими й рівноможливими. Події A – появі парного числа очок сприяє 3 результати – випадання 2, 4 і 6 очок. За формулою (1.1)

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Властивості ймовірності події:

1. Імовірність будь-якої події належить проміжку від 0 до 1.

Дійсно, оскільки $0 \le m \le n$, то $0 \le P(A) \le 1$.

2. Імовірність вірогідної події E дорівнює одиниці. Доказ очевидний, тому що достовірній події повинні сприяти всі n елементарних наслідків випробування, тобто $m = n$ і $P(E) = \frac{m}{m} = 1$.

3. Імовірність неможливої події U дорівнює нулю. Неможливій події не може сприяти жоден з елементарних наслідків випробування, тобто $m = 0$. Звідси визначаємо, що $P(U) = \frac{0}{n} = 0$.

4. Імовірність настання подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці, тому що поява хоча б однієї з них у результаті випробування є вірогідною подією.

5. Імовірність події $\overline{A}$ протилежної до події A дорівнює

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Оскільки події A сприяють m з n елементарних наслідків випробування, то події

$\overline{A}$ сприяє $(n-m)$ елементарних наслідків. Тоді

$$P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A),$$

що й було потрібно довести.

1.4. Статистичне визначення ймовірності подій

Класичне визначення ймовірності події має низку істотних недоліків. Воно дає можливість розглядати лише події, що можна розбити на кінцеве число рівноможливих і несумісних подій. Однак, при розгляді соціально-економічних задач та задач природничо-наукового характеру число елементарних наслідків найчастіше необмежено й, крім того ймовірності появи елементарних подій, як правило, різні, тобто вони не є рівноможливими. Із цієї причини використовується й інше, *статистичне* визначення ймовірності.

Припустимо, що в n проведених випробуваннях подія наступила m раз і не наступила $(n-m)$ раз. Тоді число m називається *частотою* події A, а відношення $\frac{m}{n}$ – *відносною частотою* у серії випробувань.

Таким чином, відносна частота W обчислюється за формулою

$$W(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

Відомо, що відносна частота появи події A у результаті випробувань, які можуть повторюватися необмежене число раз, прагне до деякого постійного значення. Під *статистичною ймовірністю* події A розуміється відносна частота появи події A в n проведених випробуваннях, тобто величина

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Можна показати, що ймовірності, визначені статистично, мають такі ж властивості, як і ймовірності, отримані за допомогою класичного визначення.

Приклад. Монета підкинута п'ять разів. Герб випав два рази. Яка ймовірність і відносна частота випадання герба?

Рішення. Імовірність випадання герба дорівнює $P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$ (із двох можливих наслідків при підкиданні монети випаданню герба сприяє один), а відносна частота випадання герба дорівнює $W(A) = \frac{2}{5} = 0,4$ (подія наступила два рази в п'яти випробуваннях).

Порівнюючи визначення ймовірності й відносної частоти події, слід зазначити, що для обчислення ймовірності не потрібно, щоб випробування проводилися в дійсності, знаходження ж відносної частоти припускає, що випробування вже проведені.

Як наближене значення ймовірності події приймається його відносна частота в серії з досить великої кількості випробувань. При збільшенні числа випробувань n відносна частота наближається до ймовірності події, а границя відносної частоти при $n \to \infty$ повинна практично збігатися з нею. Цей факт теоретично доведений у законі великих чисел.

Таким чином, статистичне визначення ймовірності, як і поняття й методи теорії ймовірностей у цілому, можуть бути застосовані не до будь-яких подій з невизначеним результатом, а тільки до тих з них, які мають певні властивості.

1. Розглянуті події повинні бути наслідками тільки тих випробувань, які можуть бути відтворені необмежене число раз при тому самому комплексі умов.

2. Події повинні мати так звану *статистичну сталість* або *сталість відносних частот*. Це означає, що в різних серіях випробувань відносна частота події змінюється незначно (тим менше, чим більше число випробувань), коливаючись біля постійного числа - імовірності події.

Факт наближення відносної частоти події до його ймовірності при збільшенні числа випробувань підтверджується численними масовими експериментами, проведеними різними особами із часів виникнення теорії ймовірностей. Так, наприклад, у експериментах Бюфона (XVIII в.) відносна частота появи герба при 4040 підкиданнях монети виявилася рівної 0,5069; у випробуваннях Пірсона (XIX в.) при 23000 підкиданнях - 0,5005, практично не відрізняючись від імовірності цієї події, рівної 0,5.

3. Число випробувань, у результаті яких з'являється подія A, повинне бути досить велике, тому що тільки в цьому випадку можна вважати ймовірність події $P(A)$ приблизно рівній його відносній частоті.

Питання для самоперевірки

1. Що вивчає теорія імовірності?
2. Що називається подією? Які події називаються вірогідними, неможливими, випадковими. Наведіть приклади вірогідних, неможливих і випадкових подій.
3. Дайте визначення несумісних подій. Які події називаються сумісними? Наведіть приклади.
4. Які події називаються рівноможливими?
5. Які події називаються протилежними?
6. Які події називаються єдиноможливими?
7. Яка множина подій утворює повну групу подій? Наведіть приклад.
8. Сформулюйте класичне визначення ймовірності. Чому дорівнює ймовірність достовірної й неможливої подій?
9. Запишіть формулу, за якою обчислюється ймовірність.
10. Чи може ймовірність події бути більше одиниці? Чи може ймовірність події бути від’ємним числом?
11. Чому дорівнює сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу?

12. Чому дорівнює ймовірність протилежної події?
13. Сформулюйте статистичне визначення ймовірності.
14. Що розуміють під статистичної сталістю подій?
15. Чи наближається відносна частота події до її ймовірності при збільшенні числа випробувань?

Задачі

1. Куб, усі грані якого пофарбовано, розпиляний на 1000 кубиків однакового розміру. Отримані кубики ретельно перемішані. Визначити ймовірність того, що кубик, витягнутий навмання, буде мати 2 пофарбовані сторони.

2. Лотерея випущена на загальну суму 100000 гривень. Ціна одного квитка 20 гривень. Коштовні виграші мають 500 квитків. Визначити ймовірність коштовного виграшу на 1 квиток.

3. У колоді 36 карт чотирьох різних мастей. Після виймання й повернення однієї карти колода перемішується й знову витягають одну карту. Визначити ймовірність того, що обидві витягнуті карти однієї масті.

4. Монета кинута 2 рази. Знайти ймовірність того, що хоча б 1 раз з'явиться герб.

5. Монета кидається 3 рази підряд. Визначити всі можливі наслідки цих трьох послідовних кидань. Знайти ймовірність наступних подій:

а) число випадань герба більше випадань цифри;

б) випадає 2 герби;

в) результати всіх кидань однакові.

6. У групі 6 юнаків і 18 дівчат. Жеребкуванням розігрується 1 квиток у театр. Яка ймовірність того, що квиток одержить дівчина?

7. З 35 екзаменаційних квитків, пронумерованих за допомогою цілих чисел від 1 до 35, навмання витягають один. Яка ймовірність того, що номер витягнутого квитка є число, кратне 3?

8. Дано числа від 1 до 30 включно. Яка ймовірність того, що навмання обране число є дільником числа 30?

9. Яка ймовірність того, що число на вирваному навмання аркуші календаря:

а) кратне 5;

б) дорівнює 29, якщо в році 365 днів?

10. У колекції 200 монет, з яких 25 монет 18 століття. Яка ймовірність того, що навмання обрана монета датована 18 століттям?

11. Зі слова НАВЧАННЯ вибирається навмання одна буква. Яка ймовірність того, що це буде гласна буква?

12. Кинуті 2 гральні кості. Знайти ймовірності наступних подій:

а) сума очок, що випали, дорівнює семи;

б) сума очок, що випали, дорівнює восьми, а різниця - чотирьом;

в) сума очок, що випали, дорівнює восьми, якщо відомо, що їхня різниця дорівнює чотирьом.

13. В урні 3 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того, що обрана навмання куля буде чорною?

14. Кинуто дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює 3?

15. Задумане двохзначне число. Знайти ймовірність того, що задумане число виявиться:

а) випадково названим числом;

б) випадково названим числом, цифри якого різні.

16. Кидають гральну кістку. Знайти ймовірність того, що на верхній грані з'явиться парне число очок.

17. На чотирьох картках написані числа 1, 2, 3 і 4. Яка ймовірність того, що сума чисел на трьох навмання обраних картках ділиться на 3?

18. Під час перевезення ящика, у якому знаходилися 21 стандартна й 10 нестандартних деталей, загублена 1 деталь, причому невідомо яка. Навмання з ящика витягають стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що була загублена:

а) стандартна деталь;

б) нестандартна деталь.

19. Кидають дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що на верхніх гранях з'являться тільки парні числа.

20. З ящика де є 3 квитки з номерами 1, 2, 3 виймають по одному всі квитки. Передбачається, що всі послідовності номерів квитків мають однакові ймовірності. Знайти ймовірність того, що хоча б в одного квитка порядковий номер збігається із власним.

21. Кидають дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що на верхніх гранях з'являться числа, сума яких менше 6.

22. При перевірці верстата у відібраній партії з 200 виготовлених на ньому деталей, 190 виявилися придатними. Знайти відносну частоту появи бракованих деталей у даній партії. Результат записати у відсотках.

23. По мішені зроблено 20 пострілів, причому зареєстровано 18 влучень. Знайти відносну частоту влучення в мішень й частоту промахів.

24. При випробуванні партії приладів відносна частота придатних приладів дорівнювала 0,9. Знайти число придатних приладів у даній партії, якщо всього було перевірено 200 приладів.

1.5. Елементи комбінаторики

Для успішного вирішення задач за класичним визначенням ймовірності необхідно використовувати основні правила і формули *комбінаторики* – розділу математики, що вивчає методи рішення комбінаторних задач – задач на підрахунок числа різних комбінацій.

Нехай $A_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ – елементи кінцевої множини. Сформулюємо два важливі правила, що часто використовують при рішенні комбінаторних задач.

Правило суми. Якщо елемент A_1 може бути обраний n_1 засобами, елемент A_2 - іншими n_2 засобами, A_3 – відмінними від перших двох n_3 засобами й так далі, A_k відмінними від перших $(k-1)$ n_k засобами, то вибір одного з елементів: або A_1, або A_2, …, або A_k може бути здійснений $n_1+n_2+...+n_k$ засобами.

Приклад. В ящику 300 деталей. Відомо, що 150 з них - 1-го сорту, 120 - 2-го, а інші - 3-го сорту. Скільки існує засобів добування з ящика однієї деталі 1-го або 2-го сорту?

Рішення. Деталь 1-го сорту може бути витягнута $n_1=150$ засобами, 2-го сорту - $n_2=120$ засобами. За правилом суми існує $n_1+n_2=150+120=270$ засобів добування однієї деталі 1-го або 2-го сорту.

Правило добутку. Якщо елемент A_1 може бути обраний n_1 способами, після кожного такого вибору елемент A_2 може бути обраний n_2 способами й т.д., після кожного $(k-1)$ вибору елемент A_k може бути обраний n_k способами, то вибір всіх елементів $A_1, A_2, ..., A_k$ у зазначеному порядку може бути здійснений $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ засобами.

Приклад. У групі 30 чоловік. Необхідно вибрати старосту, його заступника й профорга. Скільки існує засобів це зробити?

Рішення. Старостою може бути обраний кожний з 30 учнів, його заступником – кожний із 29, що залишилися, а профоргом – кожний із 28 учнів, що залишилися, тобто $n_1=30$, $n_2=29$, $n_3=28$. За правилом добутку загальне число способів вибору старости, його заступника й профорга дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ засобів.

Поняття факторіала. Добуток *n* натуральних чисел від 1 до *n* позначається скорочено $n!$ (читається: *n* факторіал):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$$

Приклад.

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Вважається, що $0! = 1$.

Означення. Різні групи, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються комбінаціями цих елементів.

Приклад. Із цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 можна скласти велику кількість комбінацій по 3 цифрі: 123, 321, 150, 555,…. Деякі з них будуть відрізнятися елементами (цифрами), а деякі відрізнятимуться лише порядком цифр.

Усі можливі комбінації класифікують як:

- переставлення;
- розміщення;
- сполучення.

Перестановки. Перестановками з *n* елементів називаються всілякі комбінації, кожна з яких містить всі *n* елементів і відрізняються друг від друга

лише порядком розташування елементів.
Число перестановок без повторень дорівнює: $P_n = n!$.
Число перестановок з повтореннями дорівнює $\overline{P_n} = n^n$.

Приклад. Скількома способами 6 чоловік можуть встати в чергу один за одним?
Рішення. $P_n = n!$ $P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$

Приклад. Менеджер щодня переглядає 6 видань економічного змісту. Якщо порядок перегляду видань випадковий, то скільки існує способів його здійснення?
*Рішення***.** Способи перегляду видань розрізняються тільки порядком, тому що число, а виходить, і склад видань при кожному способі незмінні. Отже, при рішенні цієї задачі необхідно розрахувати число перестановок.
За умовою задачі n=6. Отже, P_n=6!= 720

Приклад. Скільки чотиризначних чисел можна записати, використовуючи цифри 6,7,8,9.
*Рішення***.** $n = 4$. $\overline{P_n} = n^n$ $\overline{P_4} = 4^4 = 256$

Перестановки з повтореннями. Якщо в перестановках із загального числа n елементів є k різних елементів, при цьому 1-й елемент повторюється n_1 раз, 2-й елемент - n_2 раз, k-й елемент - n_k раз, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то такі перестановки називають перестановками з повтореннями з n елементів.
Число перестановок з повтореннями з n елементів дорівнює

$$P_n\left(n_1, n_2, ..., n_k\right) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$$

Приклад. Скільки існує семизначних чисел, що складаються із цифр 1, 5 і 9, у яких цифра 1 повторюється 3 рази, а цифри 5 і 9 - по 2 рази?
Рішення. Кожне семизначне число відрізняється від іншого порядком розташування цифр (причому $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, а їхня сума дорівнює 7), тобто є перестановкою з повтореннями з 7 елементів. Їхнє число дорівнює

$$P_7\left(3,2,2\right) = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$$

Розміщення. Нехай дана множина з n різних елементів. Із цієї множини можуть бути утворені підмножини з m елементів $(0 \le m \le n)$. Наприклад, з 5 елементів *a,b,c,d,e* можуть бути відібрані комбінації по 2 елементи – *ab, cd, ed, ba, ce* і т.д., по 3 елементи – *abc, cbd, cba, ead* і т.д.

Якщо комбінації з n елементів по m відрізняються або складом елементів, або порядком їхнього розташування (або й тим, і іншим), то такі комбінації називають **розміщеннями** з n елементів по m.
Число розміщень із n елементів по m дорівнює

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Приклад. Розклад одного дня складається з 5 уроків. Визначити число

варіантів розкладу при виборі з 11 дисциплін.
Рішення. Кожний варіант розкладу представляє набір 5 дисциплін з 11, що відрізняється від інших варіантів як складом дисциплін, так і порядком їхнього проходження, тобто є розміщенням з 11 елементів по 5.

$$A_{11}^{5} = \frac{11!}{5!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$$

Відповідь. Можна скласти 55440 варіантів розкладу дня.

Розміщення з повтореннями. Розміщення з повтореннями з n елементів по m елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно раз від 1 до m включно, або не містити його зовсім, тобто кожне розміщення з повтореннями з n елементів по m елементів може складатися не тільки з різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів. Число розміщень із повтореннями з n елементів по m елементів дорівнює:

$$\overline{A} = n^{m}$$

Приклад. У конкурсі по 5 номінаціям беруть участь 10 кінофільмів. Скільки існує варіантів розподілу призів, якщо по кожній номінації встановлені різні призи.

Рішення. Кожний з варіантів розподілу призів являє собою комбінацію 5 фільмів з 10, що відрізняється від інших комбінацій як складом фільмів, так і їхнім порядком по номінаціях, причому ті самі фільми можуть повторюватися кілька разів, тобто представляє розміщення з повтореннями з 10 елементів по 5. Їхнє число дорівнює

$$\overline{A_{10}^{5}} = 10^{5} = 100000$$

Відповідь: Можна скласти 100000 варіантів.

Сполучення. Якщо комбінації з n елементів по m елементів відрізняються тільки складом елементів, то їх називають **сполученнями з n елементів по m**. Число сполучень із n елементів по m елементів дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Приклад. У групі 10 чоловік. Потрібно вибрати трьох чергових. Скільки варіантів груп чергових існує?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120$$

Приклад. У шаховому турнірі беруть участь 16 чоловік. Скільки партій повинне бути зігране в турнірі, якщо між будь-якими двома учасниками повинна бути зіграна одна партія?
Рішення. Кожна партія грається двома учасниками з 16 і відрізняється від інших тільки складом пар учасників, тобто являє собою сполучення з 16 елементів по 2. Їхнє число знаходимо за формулою:

$$C_{16}^{2} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$$

Відповідь: Повинне бути зігране 120 партій.

Сполучення з повтореннями. Сполучення з повтореннями з n елементів по m елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно раз від 1 до m включно, або не містити його зовсім, тобто кожне сполучення з n елементів по m елементів може складатися не тільки з m різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів.

Слід зазначити, що якщо, наприклад, дві комбінації по m елементів відрізняються друг від друга тільки порядком розташування елементів, то вони не вважаються різними сполученнями.

Число сполучень із повтореннями з n елементів по m елементів дорівнює:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте правила суми й добутку подій.
2. Дайте визначення факторіала. Наведіть формулу для обчислення факторіала. Чому дорівнює факторіал 4? Чому дорівнює факторіал 0?
3. Дайте визначення перестановкам. Наведіть формулу для обчислення кількості перестановок з повтореннями й без повторень.
4. Дайте визначення розміщенню. Наведіть формулу для обчислення кількості розміщень із повтореннями й без повторень.
5. Дайте визначення сполученню. Наведіть формулу для обчислення кількості сполучень із повтореннями й без повторень.

Задачі

1. На залізничній станції є m світлофорів. Скільки може бути різних комбінацій їхніх сигналів, якщо кожний світлофор має 3 вида сигналів: "червоний", жовтий", "зелений"?

2. Скільки чотиризначних чисел можна утворити з непарних цифр, якщо кожна із цих цифр може повторюватися?

3. Скільки чотиризначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1, 2, 3,4,5, якщо

а) ніяка цифра не буде повторюватися;

б) повторення цифр припустимі;

в) числа повинні бути непарними, і повторення цифр неприпустимі?

4. У групі 10 чоловік. Потрібно вибрати трьох чергових. Скільки варіантів груп чергових існує?

5. Скільки намист із 7 бусинок кожне можна скласти з 7 бусинок різних розмірів?

6. Номер автомобіля складається з 2-х букв латинського алфавіту, після яких слідує тризначне число. Скільки існує різних автомобільних номерів?

7. У нашім розпорядженні є три різних прапори. На флагшток піднімається сигнал, що складається не менш чим з 2-х прапорів. Скільки різних сигналів можна підняти на флагштоку, якщо порядок прапорів у сигналі

враховується?

8. Скільки слів з п'яти букв можна утворити з букв слова "трикутник" (під словом розуміється будь-яка комбінація з букв)?

9. Скількома способами можна розподілити 12 різних підручників між чотирма студентами?

10. Скількома способами можна розкласти в 2 кишені 9 різних монет?

11. Скількома способами 10 чоловік можуть встати в чергу один за одним?

12. В однієї людини є 7 книг, в іншої 9 книг. Скількома способами вони можуть обміняти друг у друга 2 книги на 2 книги?

13. Скільки різних слів можна скласти з всіх букв слова АТАКА?

14. Скількома способами з 7 книг можна вибрати 3 і розставити їх на 3 місця на книжковій полиці?

15. У коробці 6 однакових занумерованих кубиків. Навмання по одному витягають всі кубики. Знайти ймовірність того, що номера витягнутих кубиків з'являться в зростаючому порядку

16. У партії з n виробів k бракованих. Визначити ймовірність того, що серед обраних навмання для перевірки m виробів рівно l виявляться бракованими.

17. На восьмох однакових картках написані відповідно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Навмання беруться 2 картки. Визначити ймовірність того, що утворений із двох отриманих чисел дріб скоротний.

18. Є 5 відрізків, довжини яких рівні відповідно 1, 3, 5, 7 і 9 одиницям. Визначити ймовірність того, що за допомогою трьох навмання взятих з даних п'яти відрізків можна побудувати трикутник.

19. З десяти квитків виграшними є два. Визначити ймовірність того, що серед узятих навмання п'яти квитків:

а) один виграшний;

б) два виграшних;

в) хоча б один виграшний.

20. З колоди карт (52 карти) навмання витягають три карти. Знайти ймовірність того, що це будуть трійка, сімка й туз.

21. Яка ймовірність того, що чотиризначний номер випадково взятого автомобіля у великому місті:

а) має всі цифри різні;

б) має тільки дві однакові цифри;

в) має дві пари однакових цифр;

г) має тільки три однакові цифри;

д) має всі цифри однакові?

22. У ящику 10 однакових деталей, позначених номерами 1, 2, ... , 10. Навмання витягнуті шість деталей. Знайти ймовірність того, що серед витягнутих деталей виявляться:

а) деталь під номером 1;

б) деталі під номерами 1 і 2.

23. У ящику є 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Збирач

навманняу витягає три деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі виявляться пофарбованими.

24. У конверті серед ста фотокарток перебуває одна розшукувана. З конверта навмання витягнуті 10 карток. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться потрібна.

25. Пристрій складається з 5 елементів, з яких 2 зношене. При включенні пристрою випадковим образом включаються 2 елементи. Знайти ймовірність того, що включеними виявляться незношені елементи.

26. У цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрані 7 чоловік. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб виявляться три жінки.

27. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання відібрані 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів 5 відмінників.

28. Чотиритомний твір розташований на полиці у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що тома розташовані у порядку праворуч ліворуч або ліворуч праворуч.

29. Повна колода карт ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що число чорних і червоних карт в обох пачках буде однаковим (по 13).

30. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на 5 картках. Навмання послідовно вибираються 3 картки й ставляться ліворуч праворуч. Знайти ймовірність того, що отримане в такий спосіб тризначне число буде парним.

1.6. Теореми додавання й множення ймовірностей

1.6.1. Дії над подіями

Сумою декількох подій називається подія, що складається в появі хоча б однієї з них. Суму подій будемо позначати символом $A+B$.

Якщо події A і B – сумісні, то їхня сума $A+B$ позначає настання або події A або події B, або двох подій разом. Якщо події A і B несумісні, то їхня сума полягає в появі тільки однієї з них.

Добутком декількох подій називається подія, що складається в спільній появі всіх цих подій. Добуток будемо позначати символом $A \cdot B$

Якщо події A і B – сумісні, то їхній добуток $A \cdot B$ означає настання і події A, і події B.

Нехай, наприклад, подія A – контроль якості продукції, виробленої першим підприємством, подія B – другим підприємством. Тоді сума цих подій означає або перевірку першого підприємства, або другого, або обох разом. Добуток цих подій - одночасна перевірка і першого, і другого підприємств.

Різницею $A-B$ двох подій A і B називається подія, що відбудеться, якщо подія A відбудеться, а подія B не відбудеться.

Для суми подій використовується також позначення $A \bigcup B$, для добутку – $A \bigcap B$, для різниці – $A \setminus B$.

Приклад. Переможець змагання нагороджується: призом (подія A), грошовою премією (подія B), медаллю (подія C). Що являють собою події: а) $A+B$; б) $A\cdot B\cdot C$; в) $A\cdot C-B$?

Рішення. а) Подія $A+B$ складається в нагородженні переможця або призом, або премією, або й тим, і іншим.

б) Подія $A\cdot B\cdot C$ складається в нагородженні переможця одночасно й призом, і премією, і медаллю.

в) Подія $A\cdot C-B$ складається в нагородженні переможця одночасно й призом, і медаллю без видачі премії.

1.6.2. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема. *Імовірність появи одного із двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказ. Нехай n – загальне число елементарних наслідків випробування; m – число елементарних наслідків, сприяючих події A; k – події B. Тоді $P(A)=\dfrac{m}{n}$, $P(B)=\dfrac{k}{n}$.

З того, що події A і B несумісні, випливає що їхній сумі сприяє $(m+k)$ елементарних подій. Отже

$$P(A+B)=\frac{(m+k)}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Теорема додавання справедлива для будь-якого кінцевого числа попарно несумісних подій, тобто

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

Нехай події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворять повну групу подій. В зв’язку з тим, що в результаті випробування обов'язково відбудеться хоча б одна з подій A, подія $A_1+A_2+...+A_n$ є достовірною, а її ймовірність дорівнює 1. З іншої сторони, події A попарно несумісні. Отже

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

В зв’язку з тим, що протилежні події утворять повну групу, випливає що дане твердження безпосередньо слідує з властивості 1.

Приклад. У кошику 30 куль: 10 червоних, 5 синіх і 15 білих. Знайти ймовірність виймання не синьої кулі.

Рішення. Подія A – виймання синьої кулі, $\overline{A}$ - виймання не синьої кулі.

$$P(A)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6} \qquad P(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

1.6.3. Умовна ймовірність події

Якщо ймовірність подій визначається при здійсненні деякої сукупності умов, при яких ця подія може відбутися без будь-яких додаткових обмежень, то таку ймовірність називають *безумовною*. Якщо ж накладають ще додаткові обмеження, то ймовірність події називають *умовною*.

Імовірність події B, знайдена в припущенні, що подія A уже відбулася, називається *умовною ймовірністю* події B щодо події A і позначається через $P_A(B)$.

Приклад. У кошику 10 куль: 7 білих і 3 чорних. Двічі витягають по одній кулі, не повертаючи їх до кошику. Знайти ймовірність появи другою білої кулі (подія B), якщо першою була витягнута чорна куля (подія A).

Рішення.

1 спосіб. $P(A)=\dfrac{3}{10}$; $P_A(B)=\dfrac{7}{9}$.

2 спосіб. Загальне число наслідків спільної появи двох куль, байдуже якого кольору, дорівнює $A_{10}^2=90$. Із цього числа наслідків події A сприяє $7\cdot 3=21$ результат.

Тоді $P(A\cdot B)=\dfrac{7\cdot 3}{A_{10}^2}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$; $\quad P_A(B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\dfrac{7}{30}\cdot\dfrac{10}{3}=\dfrac{7}{9}$.

Знайдемо формулу для обчислення умовної ймовірності $P_A(B)$.

Нехай із загального числа n рівноможливих і несумісних елементарних наслідків випробування події A сприяє m випадків, події B – k випадків, а спільній появі подій A і B, тобто події $A\cdot B$ – l випадків $l\le m, l\le k$ (мал. 1).

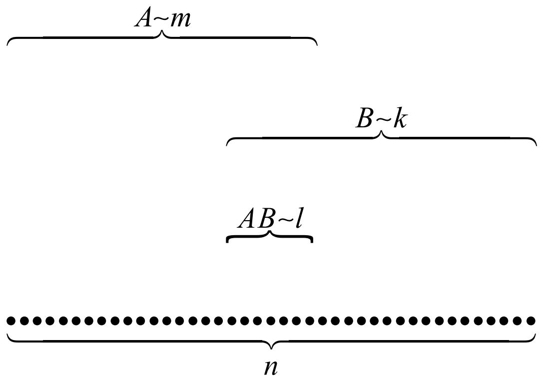


Рис. 1.

Після того, як подія A відбулася, число всіх рівноможливих і несумісних елементарних наслідків випробування скоротилося з n до m, а число випадків, сприяючих події B, з k до l. Тому умовна ймовірність дорівнює

$$P_A(B)=\frac{l}{m}=\frac{l/n}{m/n}=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}.$$

Аналогічно

$$P_B(A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

1.6.4. Теорема множення ймовірностей

Теорема. *Імовірність спільного настання двох подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовну ймовірність іншого, обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася, тобто*

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B) \text{ або } P(AB)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Доказ. Нехай n – загальне число елементарних наслідків випробування, з яких m сприяють події A. У свою чергу із цих m наслідків k сприяють події B. Іншими словами: $P(A)=\frac{m}{n}$, $P_A(B)=\frac{k}{m}$. Спільній появі подій A і B, сприяють k наслідків з n, тобто $P(A\cdot B)=\frac{k}{n}$.

Але $P(A\cdot B)=\frac{k}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{m}=P(A)\cdot P_A(B)$, що й було потрібно довести.

Для обчислення спільного настання більш ніж двох подій використовують аналогічну формулу.

Означення. Дві події називаються ***незалежними***, якщо ймовірність однієї з них не змінюється при настанні іншої, тобто якщо $P\left(A\right)=\text{Đ}_B(A)$ і $P\left(B\right)=\text{Đ}_{\hat{A}}(\hat{A})$.

У протилежному випадку події називаються ***залежними.***

Кілька подій називаються *попарно незалежними*, якщо незалежні між собою будь-які дві з них.

Кілька подій називаються *незалежними в сукупності*, якщо ймовірність кожної з них не міняється при настанні інших подій, однієї або декількох у будь-якій комбінації й у будь-якому числі.

Незалежність подій у сукупності є більш сильною вимогою, чим їхня попарна незалежність.

Приклад. Серед 25 електричних лампочок чотири браковані. Знайти ймовірність того, що дві взяті одночасно лампочки виявляться бракованими.

Рішення. Розглянута подія полягає в тому, що бракованими будуть і перша (подія A) і друга (подія B) лампочки. Імовірність даної події знайдемо за теоремою множення ймовірностей. При цьому $P(A)=\frac{4}{25}$, а $P_A(B)=\frac{3}{24}$, тому що при настанні події A загальне число лампочок і число бракованих серед них у порівнянні з першим числом зменшилося на одну. Таким чином,

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{4}{25}\cdot\frac{3}{24}=0,02.$$

1.6.5. Теорема множення ймовірностей для незалежних подій

Теорема. *Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Доказ. З того, що події незалежні, випливає $P(B)=Đ_{\hat{A}}(\hat{A})$. Тоді

$$Đ(\grave{A}\cdot\hat{A})=Đ(\hat{A})\cdot Đ_{\hat{A}}(\grave{A})=P(A)\cdot P(B).$$

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні в сукупності, то ймовірність спільної їх появи дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n).$$

Приклад. Імовірність безвідмовної роботи телефонного апарата певної марки протягом гарантійного строку дорівнює 0,9, знайти ймовірність безвідмовної роботи двох апаратів.

Рішення. Вважаючи події A й B, що складаються в безвідмовній роботі протягом гарантійного строку відповідно першого й другого апаратів, незалежними і застосовуючи теорему множення ймовірностей, одержимо:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0,9\cdot 0.9=0,81$$

Іноді може цікавити ймовірність появи в результаті випробувань **хоча б однієї з незалежних у сукупності подій**, причому вважається , що ймовірності появи кожної з подій відомі. Наприклад, якщо в результаті випробування можуть з'явиться три події, то поява хоча б однієї із цих подій означає настання або однієї, або двох, або трьох подій. Відповідь на поставлене питання дає теорема про те, що ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею й добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$Đ(\grave{A})=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n,$$

де $q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2,\ldots,\ \ q_n=1-p_n$.

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$, мають однакову ймовірність, те $P(A)=1-q^n$.

Приклад. На 100 лотерейних квитків доводиться 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б по одному із чотирьох придбаних квитків?

Рішення. Нехай події A_1, A_2, A_3, A_4 – виграш по першому, другому, третьому й четвертому квитках відповідно.

$$P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=1-\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}=0,188.$$

1.6.6. Теорема додавання ймовірностей двох сумісних подій

Теорема. *Імовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їхньої спільної появи*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Доказ. Представимо суму $A+B$ у вигляді суми несумісних подій:

$$A+B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B.$$

Тоді за теоремою додавання ймовірність $P(A+B)$ дорівнює

$$P(A+B)=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)+P(A\cdot B). \qquad (1.3)$$

Перші два додатки можна перетворити, використовуючи рівності

$$P(A)=P(A\cdot B)+P(A\cdot\overline{B}) \quad \text{і} \quad P(B)=P(A\cdot B)=P(\overline{A}\cdot B).$$

Тоді $\quad P(A\cdot\overline{B})=P(A)-P(A\cdot B) \quad$ і $\quad P(\overline{A}\cdot B)=P(B)-P(A\cdot B)$.

Підставляючи ці рівності у вираження (1.3), одержимо

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

що й було потрібно довести.

Приклад. На 100 лотерейних квитків доводиться 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б по одному із двох придбаних квитків?

Рішення. Нехай події A_1 й A_2 – виграш по першому й другому квитках відповідно. Тому що події A_1 й A_2 – сумісні, те

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=$$

$$=P(A_1)+P(A_2)-P_{A_1}(A_2)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}-\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=0,098.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення суми подій. Що позначає $A+B$, якщо події A и B сумісні?
2. Дайте визначення добутку подій. Що означає $A\cdot B$, якщо події A и B сумісні?
3. Що називають різницею подій?
4. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей для несумісних подій і запишіть формулу цієї теореми.
5. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей для сумісних подій і запишіть формулу цієї теореми.
6. Які події називають незалежними? Дайте визначення незалежних у сукупності подій.
7. Що називають умовною ймовірністю події?
8. Сформулюйте теорему множення ймовірностей для залежних подій і запишіть формулу цієї теореми.
9. Сформулюйте теорему множення ймовірностей для незалежних подій і запишіть формулу цієї теореми.
10. Чому дорівнює ймовірність появи в результаті випробувань хоча б однієї з незалежних у сукупності випробувань

Задачі

Властивості ймовірності. Додавання ймовірностей

1. З урни, де є кулі білого, чорного і синього кольорів, навмання витягають одну кулю. Події A и B відповідно позначають появу білої й чорної куль. Що означає подія $A+B$?

2. Є 100 жетонів, занумерованих цілими числами від 1 до 100. Подія A - виймання жетона, номер якого кратний 2, а подія B - виймання жетона, номер якого кратний 5. Що означає подія $A + B$?

3. Імовірність ураження цілі однією ракетою дорівнює 0.7, а другою - 0.8. Яка ймовірність того, що хоча б одна з ракет уразить ціль, якщо вони випущені незалежно друг від друга?

4. З 30 учнів спортивної школи 12 чоловік займаються баскетболом, 15 волейболом, 5 волейболом і баскетболом, а інші другими видами спорту. Яка ймовірність того, що навмання обраний спортсмен займається тільки волейболом або тільки баскетболом?

5. На полиці є десять різних книг, причому 5 книг коштують по 40 гривень кожна, 3 книги по 20 гривень кожна й 2 книги по 10 гривень. Знайти ймовірність того, що взята навмання книга коштує не дорожче 20 гривень.

6. Імовірність рішення задачі першим студентом дорівнює 0,8, а другим студентом - 0,3. Знайти ймовірність того, що задачу вирішить або перший або другий студент.

7. На стелажі бібліотеки у випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому 5 з них нові. Бібліотекар бере навмання три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один з узятих підручників виявиться новим.

8. У ящику 10 деталей, з яких 4 пофарбовані. Робітник навмання взяв 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з узятих деталей пофарбована.

9. В урні 10 куль: 3 червоних, 5 синіх і 2 білих. Яка ймовірність вийняти кольорову кулю, якщо виймається одна куля?

10. На клумбах ростуть 20 червоних, 30 синіх і 40 білих квітів. Яка ймовірність зірвати в темряві кольорову квітку, якщо зривається одна квітка?

11. В урні 30 куль: 10 червоних, 5 синіх і 15 білих. Яка ймовірність вийняти кольорову кулю, якщо виймається одна куля?

12. При стрілянині по мішені ймовірність зробити відмінний постріл дорівнює 0.3, а ймовірність пострілу на оцінку "добре" дорівнює 0.4. Яка ймовірність одержати за зроблений постріл оцінку не нижче "добре".

13. Кидається один раз гральна кістка. Визначити ймовірність випадання 3 або 5 очок.

14. Кожне із чотирьох неспільних подій може відбутися відповідно з ймовірностями 0.012, 0.010, 0.006, 0.002. Визначити ймовірність того, що в результаті випробування відбудеться хоча б одна із цих подій.

15. Стрілок робить один постріл у мішень, що складається із центрального кола й двох концентричних кілець. Імовірності влучення в коло й кільця відповідно рівні 0.20, 0.15 і 0.10. Визначити ймовірність невлучення в мішень.

16. Імовірність одержання квитка, у якого однакові суми трьох перших і

трьох останніх цифр шестизначного номера, дорівнює 0.05525. Яка ймовірність мати такий квиток серед двох узятих навмання, якщо обидва квитки:

а) мають послідовні номери;

б) отримані незалежно один від іншого.

Умовна ймовірність і незалежність подій. Множення подій

1. Є три ящики, що містять по десять деталей, причому в першому ящику 8; у другому 7, у третьому 9 стандартних деталей. З кожного ящика навмання виймається одна деталь. Визначити ймовірність того, що всі три вийнятих деталі будуть стандартними.

2. Серед 100 лотерейних квитків є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 навмання обрані квитка виявляться виграшними.

3. При вибірковій перевірці партії виробів імовірність відібрати нестандартний виріб дорівнює 0,03. Визначити ймовірність того, що три навмання відібрані вироби виявляться стандартними.

4. На виробництві робітник обслуговує одночасно 4 верстати. Імовірність порушення нормальної роботи протягом години для першого верстата дорівнює 0,02; для другого 0,25; для третього 0,1; для четвертого 0,04. Визначити ймовірність безперебійної роботи всіх чотирьох верстатів протягом однієї години.

5. У сосуді 4 кольорових і 7 білих куль. Визначити ймовірність дворазового добування з сосуду кольорової кулі, якщо

а) вийнята куля вертається в сосуд;

б) вийнята куля не вертається в сосуд.

6. При виготовленні виробів у середньому виходить 4% бракованих. Із придатних виробів 75% задовольняють першому сорту. Визначити ймовірність того, що навмання обраний виріб буде першого сорту.

7. Імовірність того, що стрілець уразить першу мішень, дорівнює j. Якщо перша мішень буде уражена, то стрілок одержує право на наступний постріл по другій мішені. Імовірність поразки обох мішеней при двох пострілах дорівнює 0,5. Визначити ймовірність поразки другої мішені.

8. Три верстати автомата обслуговуються одним робітником. Імовірність того, що в деякий момент часу зажадає уваги робітника перший верстат, дорівнює 0,3, другий 0,2, третій 0,1. Визначити ймовірність того, що в певний момент часу зажадає уваги робітника хоча б один верстат.

9. У ящику перебуває 5 виробів першого сорту, 3 виробу другого сорту й 2 виробу третього сорту. З ящика виймаються два вироби. Визначити ймовірність того, що обидва вони будуть одного сорту, якщо

а) перший взятий виріб вертається до ящику;

б) перший узятий виріб не вертається.

10. Студент прийшов на іспит, знаючи лише 20 з 25 питань програми. Екзаменатор задав студентові три питання. Визначити ймовірність того, що студент відповість на всі три питання.

11. Яка ймовірність того, що з колоди в 36 карт будуть обрані підряд два тузи?

12.У читальному залі є 6 підручників по теорії ймовірностей, з яких 3 у плетінні. Бібліотекар навмання взяв 2 підручники. Знайти ймовірність того, що обидва підручники виявляться в плетінні.

13.У фірмі працюють 7 чоловіків і 3 жінки. Навмання відібрані 3 чоловіка. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи виявляться чоловіками.

14.У ящику є 10 деталей, серед яких 6 пофарбованих. Збирач навмання витягає 4 деталі. Знайти ймовірність того, що всі витягнуті деталі виявляться пофарбованими.

15.В електричне коло включено послідовно три елементи, що працюють незалежно один від іншого. Імовірності відмов першого, другого й третього елементів відповідно рівні: p1 = 0,1; p2 = 0,15; p3 = 0,2. Знайти ймовірність того, що струму в ланцюзі не буде.

16.Пристрій містить два незалежно працюючі елементи. Імовірності відмови елементів відповідно рівні 0,05 і 0,08. Знайти ймовірності відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовив хоча б один елемент.

17.Для руйнування мосту досить влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйнований, якщо на нього скинути чотири бомби, імовірності влучення яких відповідно рівні: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

18.Імовірність успішного виконання вправи для кожного із двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконують вправи по черзі, причому кожний робить по дві спроби. Той, хто першим виконає вправу, одержує приз. Знайти ймовірність одержання призу спортсменами.

19.Імовірність влучення в мішень кожним із двох стрільців дорівнює 0,3. Стрілки стріляють по черзі, причому кожний повинен зробити по два пострілу. Першим одержує приз той, хто потрапив у мішень. Знайти ймовірність того, що стрілки одержать приз.

20.Імовірність хоча б одного влучення стрілками в мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

21.Імовірність хоча б одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі.

1.7. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може відбутися за умови появи одного з несумісних подій: $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що складають повну групу. Події H_i, $i = 1, 2, \ldots n$ називаються *гіпотезами*. Нехай відомі ймовірності гіпотез, тобто ймовірності $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ й умовні ймовірності події A – $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$, …, $P_{H_n}(A)$...

Запишемо подію A у такий спосіб

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Тоді ймовірність появи події A, що може наступити лише за умови настання однієї з несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожного із цих подій на умовну ймовірність події A:

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + ... + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n) =$$
$$= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

Отже,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) \qquad (1.4)$$

Формула (1.4) називається *формулою повної ймовірності*.

Приклад. У торговельну фірму надійшли телевізори від трьох постачальників у відношенні 1:4:5. Практика показала, що телевізори, що надходять від 1-го, 2-го й 3-го постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного строку відповідно в 98%, 88% і 92% випадків.

Знайти ймовірність того, що телевізор, що надійшов у торговельну фірму, не потребує ремонту протягом гарантійного строку.

Рішення. Позначимо події:

H_i – телевізор надійшов у торговельну фірму від -i-го постачальника ($i = 1, 2, 3.$);

A – телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного строку.

За умовою

$$P(H_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0{,}1 \qquad P_{H_1}(A) = 0{,}98$$
$$P(H_2) = \frac{4}{1+4+5} = 0{,}4 \qquad P_{H_2}(A) = 0{,}88$$
$$P(H_3) = \frac{5}{1+4+5} = 0{,}5 \qquad P_{H_3}(A) = 0{,}92$$

За формулою повної ймовірності (1.4)

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 = 0{,}91$$

Приклад. Відомо, що в середньому 95% продукції, що випускається, задовольняє стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною продукцію з імовірністю 0,98, якщо вона стандартна, і з імовірністю 0,06, якщо вона нестандартна. Визначити ймовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль.

Рішення. Позначимо події:

H_1, H_2 – узятий навмання виріб відповідно стандартний або нестандартний;

A – виріб пройшов спрощений контроль.

За умовою

$$P(H_1) = 0{,}95, \quad P(H_2) = 0{,}05, \quad P_{H_1}(A) = 0{,}98, \; P_{H_2}(A) = 0{,}06.$$

Імовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль, за формулою повної ймовірності (1.4):

$$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}98 + 0{,}05 \cdot 0{,}06 = 0{,}934$$

1.8. Формула Бейєса

Нехай подія A може відбутися за умови появи однієї з гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності цих гіпотез – $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а також умовні ймовірності події A при здійсненні кожної із цих гіпотез. Допустимо, що в результаті зробленого випробування подія A наступила. Потрібно визначити, як змінилися ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ після появи події A.

Задачі такого типу вирішуються за допомогою *формул Бейєса*:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}, \; i = 1, 2, \ldots n. \tag{1.5}$$

Формули Бейєса дозволяють переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, у підсумку якого з'явилася подія A. Формули Бейєса знаходять широке застосування при рішенні задач керування, пов'язаних із прийняттям управлінських рішень в умовах недостатньої інформації про закономірності функціонування соціально-економічних і технічних систем, дозволяючи з накопиченням інформації робити коректування правління.

Приклад. У торговельну фірму надійшли телевізори від трьох постачальників у відношенні 1:4:5. Практика показала, що телевізори, що надходять від 1-го, 2-го й 3-го постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного строку відповідно в 98%, 88% і 92% випадків.

Проданий телевізор потребував ремонту протягом гарантійного строку. Від якого постачальника найімовірніше надійшов цей телевізор?

Рішення. Позначимо події:

H_i – телевізор надійшов у торговельну фірму від -i-го постачальника ($i = 1, 2, 3$);

A – телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного строку.

За умовою

$$P(H_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0,1 \qquad P_{H_1}(A) = 0,98$$

$$P(H_2) = \frac{4}{1+4+5} = 0,4 \qquad P_{H_2}(A) = 0,88$$

$$P(H_3) = \frac{5}{1+4+5} = 0,5 \qquad P_{H_3}(A) = 0,92$$

За формулою повної ймовірності (1.4)

$$P(A) = 0,1 \cdot 0,98 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92 = 0,91$$

Подія $\overline{A}$ – телевізор потребує ремонту протягом гарантійного строку;

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,91 = 0,09.$$

За умовою

$$P_{H_1}(\overline{A}) = 1 - 0,98 = 0,02$$

$$P_{H_2}(\overline{A}) = 1 - 0,88 = 0,12$$

$$P_{H_3}(\overline{A}) = 1 - 0,92 = 0,08$$

За формулою Бейєса (1.5) $\quad P_{\overline{A}}(H_1) = \dfrac{0,1 \cdot 0,02}{0,09} = 0,022$

$$P_{\overline{A}}(H_2) = \frac{0,4 \cdot 0,12}{0,09} = 0,533$$

$$P_{\overline{A}}(H_3) = \frac{0,5 \cdot 0,08}{0,09} = 0,444$$

Таким чином, після настання події $\overline{A}$ ймовірність гіпотези H_2 збільшилася з $P(H_2) = 0,4$ до максимальної $P_{\overline{A}}(H_2) = 0,533$, а гіпотези H_3 – зменшилася від максимальної $P(H_3) = 0,5$ до $P_{\overline{A}}(H_3) = 0,444$; якщо раніше (до настання події A) найбільш імовірною була гіпотеза H_3, то тепер, у світлі нової інформації (настання події A), найбільш імовірна гіпотеза H_2 – надходження даного телевізора від 2-го постачальника.

Приклад. Відомо, що в середньому 95% продукції, що випускається, задовольняє стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною продукцію з імовірністю 0,98, якщо вона стандартна, і з імовірністю 0,06, якщо вона нестандартна. Визначити ймовірність того, що виріб стандартний, якщо він: а) пройшов спрощений контроль; б) двічі пройшов спрощений контроль.
Рішення. Позначимо події:
H_1, H_2 – узятий навмання виріб відповідно стандартний або нестандартний;
A – виріб пройшов спрощений контроль.
За умовою $\quad P(H_1) = 0,95, \quad P(H_2) = 0,05, \quad P_{H_1}(A) = 0,98, \; P_{H_2}(A) = 0,06.$

Імовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль, за формулою повної ймовірності (1.4):

$$P(A) = 0,95 \cdot 0,98 + 0,05 \cdot 0,06 = 0,934$$

а) Імовірність того, що виріб, що пройшов спрощений контроль, стандартний, за формулою Бейєса (1.5):

$$P_A(H_1) = \frac{0,95 \cdot 0,98}{0,934} = 0,997$$

б) Нехай подія $F*$ – виріб двічі пройшов спрощений контроль. Тоді за теоремою множення ймовірностей

$$P_{H_1}(F^*) = 0,98 \cdot 0,98 = 0,9604 \quad \text{и} \quad P_{H_2}(F^*) = 0,06 \cdot 0,06 = 0,0036$$

За формулою Бейєса (1.33)

$$P_{F^*}(H_1) = \frac{0,95 \cdot 0,9604}{0,95 \cdot 0,9604 + 0,05 \cdot 0,0036} = 0,9998$$

З того, що ймовірність $P_{F^*}(H_2) = 1 - P_{F^*}(H_1) = 1 - 0,9998 = 0,0002$ дуже мала, гіпотезу A_2 про те, що виріб, що двічі пройшов спрощений контроль, нестандартний, варто відкинути як практично неможливу подію.

Приклад. Два стрільця незалежно друг від друга стріляють по мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Імовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює 0,8; для другого - 0,4. Після стрілянини в мішені виявлена одна пробоїна. Яка ймовірність того, що вона належить: а) 1-му стрілку; б) 2-му стрілку?

Рішення. Позначимо події:

H_1 – обидва стрільця не влучили в мішень;

H_2 – обидва стрільця влучили в мішень;

H_3 – 1-й стрілок влучив у мішень, 2-й ні,

H_4 - 1-й стрілок не влучив у мішень, 2-й влучив;

A – у мішені одна пробоїна (одне влучення).

Знайдемо ймовірності гіпотез і умовні ймовірності події A для цих гіпотез:

$$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12 \qquad P_{H_1}(A) = 0$$
$$P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32 \qquad P_{H_2}(A) = 0$$
$$P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48 \qquad P_{H_3}(A) = 1$$
$$P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \qquad P_{H_4}(A) = 1$$

Тепер за формулою Бейєса (1.5)

$$P_A(H_3) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7} = 0,857$$
$$P_A(H_4) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7} = 0,143$$

Тобто імовірність того, що потрапив у ціль 1-й стрілок *при наявності однієї пробоїни,* в 6 разів вище, ніж для другого стрільця.

Задачі

1. Є два набори деталей. Імовірність того, що деталь першого набору стандартна, дорівнює 0.8, а другого 0.9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із навмання взятого набору стандартна.

2. У першій урні знаходиться 10 куль, з них 8 білих; у другій урні 20 куль, з них 4 білих. З кожної урни навмання витягли по одній кулі, а потім із цих двох куль навмання взята одна куля. Знайти ймовірність того, що взято білу кулю.

3. У групі спортсменів 20 бігунів, 6 стрибунів і 4 метальники. Імовірність того, що буде виконана норма майстра спорту бігуном дорівнює 0.9, стрибуном 0.8 і метальником - 0.75. Знайти ймовірність того, що навмання викликаний спортсмен виконає норму майстра спорту.

4. У складальний цех заводу деталі надходять із двох цехів: з першого цеху 70%, із другого цеху - 30%, причому деталі з першого цеху мають 30%, а із другого 20% браку. Визначити ймовірність того, що взята навмання деталь не буде бракованою.

5. Є 5 партій деталей: три партії по 8 штук, у кожній з яких 6 стандартних і 2 нестандартних, і дві партії по 10 штук, у кожній з яких 7 стандартних і 3 нестандартних. Визначити ймовірність того, що взята навмання із цих п'яти партій одна деталь буде стандартною.

6. Є дві категорії посудин: перша складається із трьох посудин, у кожній з яких знаходяться чотири червоних і п'ять синіх куль, друга категорія складається із семи посудин, у кожній з яких дві червоних і п'ять синіх куль. З навмання взятої посудини виймається одна куля. Визначити ймовірність того, що ця куля буде червоною.

7. У ящику два види посудин: три посудини першого виду, причому в кожній з них п'ять білих і сім чорних куль; п'ять посудин другого виду, причому в кожній з них дев'ять білих і три чорних кулі. З ящика навмання виймається посудина й із цієї посудини навмання витягає кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята у такий спосіб куля буде білою.

8. У шести однакових ящиках перебуває по 10 деталей, причому в трьох ящиках по 8 деталей, у двох - по 6 деталей і в одному - 5 деталей першого сорту. Навмання вибирається одна деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь буде першого сорту.

9. На складальний конвеєр надходять деталі із чотирьох автоматів, що працюють із різною точністю. Перший автомат дає 0,5% браку, другий - 0,44% браку, третій 0,7% браку, четвертий 0,6% браку. З першого автомата надійшло 1200 виробів, із другого 1500, із третього 2000, із четвертого 1300. Визначити ймовірність влучення на конвеєр бракованої деталі.

10. На склад готової продукції надійшли вироби із трьох цехів: 30% з першого цеху, 45% із другого цеху, 25%, із третього цеху. Серед виробів першого цеху брак становить у середньому 0,6%, другого 0,4%, третього 0,16%. Визначити ймовірність того; що взятий на складі виріб виявиться придатним.

11. У першій коробці знаходиться 20 деталей, з них 18 стандартних; у другій коробці 10 деталей, з них 9 стандартних. Із другої коробки навмання взята деталь і перекладена в першу. Знайти ймовірність того, що деталь, навмання витягнута з першої коробки, буде стандартною.

12. В урну, що містить 2 кулі, опущена біла куля, після чого з урни навмання витягнута одна куля. Знайти ймовірність того, що витягнута куля

виявиться білою, якщо рівноможливі всі можливі припущення про первісний склад куль (за кольором).

13. У кожній із трьох урн знаходяться 6 чорних і 4 білих кулі. З першої урни навмання витягнуті одна куля й перекладена в другу урну, після чого із другої урни навмання витягнуті одна куля й перекладена в третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, навмання витягнута із третьої урни, виявиться білою.

14. У першій урні знаходяться 1 біла і 9 чорних куль, а в другий - 1 чорна і 5 білих куль. З кожної урни за схемою випадкового вибору без повернень видалили по одній кулі, а кулі, що залишилися, зсипали в третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята із третьої урни, виявиться білою.

15. У піраміді встановлені 5 гвинтівок, з яких 3 мають оптичний приціл. Імовірність того, що стрілок уразить мішень при пострілі із гвинтівки з прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражена, якщо стрілок зробить один постріл з навмання взятої гвинтівки.

16. Два автомати роблять однакові деталі, що надходять на конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більше продуктивності другого. Перший автомат робить у середньому 60% деталей відмінної якості, а другий 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь виробляється першим автоматом.

17. Число вантажних автомашин, що проїжджають повз бензоколонці, ставиться до числа легкових автомашин як 3:2. Імовірність того, що буде заправлятися вантажна автомашина, дорівнює 0.1; для легкової автомашини ця ймовірність дорівнює 0.2. До бензоколонки під'їхала для заправлення автомашина. Знайти ймовірність того, що ця машина вантажна.

18. Два оператори набирають на комп'ютері однакові бази даних. Імовірність того. що перший оператор припустився помилки, дорівнює 0.05; для другого оператора ця ймовірність дорівнює 0.1. При перевірці файлів була виявлена помилка. Знайти ймовірність того, що помилився перший оператор.

19. У спеціалізовану лікарню надходять у середньому 50% хворих із захворюванням K , 30% із захворюванням L, 20% із захворюванням M. Імовірність повного одужання від хвороби K дорівнює 0.7; для хвороб L і M ця ймовірність відповідно дорівнює 0.8 і 0.9. Хворий, що надійшов у лікарню, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав захворюванням K.

20. Вироби перевіряються на стандартність одним із двох товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0.55, а до другого 0.45. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0.9, а другим - 0.08. Стандартний виріб при перевірці було визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що виріб перевірив перший товарознавець.

21. У групі 10 юнаків, які грають, накидаючи кільця на кілочок. Для п'яти юнаків імовірність влучення кільця на кілочок дорівнює 0.6, для трьох 0.5 і для інших - 0.3. Кільце, кинуте одним з юнаків, потрапило на кілочок. Знайти

ймовірність того, що це кільце було кинуто юнаком з першої групи.

25. В одній студентській групі навчаються 24 студента, у другий - 36 студентів і в третій 40 студентів. На іспиті одержали відмінні оцінки 6 студентів першої групи, 6 студентів другої групи й 4 студенти третьої групи. Навмання обраний студент получив оцінку "відмінно". Знайти ймовірність того, що він з першої групи.

26. Для здачі заліку студентам необхідно підготувати 30 питань. З 25 студентів 10 підготували відповіді па всі питання, 8 - на 25 питань, 5 - на 20 питань і двоє - на 15. Викликаний навмання студент відповів на поставлене йому питання. Знайти ймовірність того, що цей студент:

а) підготував всі питання;

б) підготував тільки половину питань.

27. Є 3 однакові урни. У першій знаходяться 4 білих і 6 чорних куль, у другий 7 білі й 3 чорні і у третій чорні кулі. Навмання обирається урна й з її навмання виймається одна куля. Обрана навмання куля виявилася чорною. Знайти ймовірність того, що кулю виймуть із першої урни.

28. При рентгенівському обстеженні ймовірність виявити захворювання туберкульозом дорівнює 0.9. Імовірність прийняти здорову людину за хворого дорівнює 0.01. Нехай частка хворих туберкульозом стосовно всього населення дорівнює 0.001. Знайти умовну ймовірність того, що людина здорова, якщо вона була визнана хворою при обстеженні.

29. Є 2 ящики, у першому з яких знаходяться 2 білих, 3 червоних і 20 чорних, у другому 8 білих, 15 червоних і 2 чорних кулі. Після виймання кулі з одного, а потім з іншого ящика, вийнятими виявилися спершу чорна, а потім біла кулі. Знайти ймовірність того, що виймали спочатку з першого, а потім із другого ящика, вважаючи, що обидві послідовності мають рівні ймовірності.

2. Повторення незалежних випробувань

Важливі закономірності теорії ймовірностей, що мають застосування у статистиці, зв'язуються з розглядом незалежних повторних випробувань.

На практиці часто доводитися працювати із задачами, які можна представити у вигляді багаторазово повторюваних випробувань при даному комплексі умов. У цих задачах необхідно обчислити ймовірність числа m появ деякої події A в n випробуваннях. Наприклад, необхідно визначити ймовірність певного числа влучень у мішень при декількох пострілах, імовірність числа вирішених задач із комплекту запропонованих і так далі.

Послідовність випробувань називається *незалежною щодо події A*, якщо ймовірність появи події *A* у кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань. Так, наприклад, імовірність появи числа 3 у кожному з 10 кидків гральної кістки не залежить від того, яке число з'являлося раніше.

Якщо незалежні повторні випробування проводяться при однакових умовах, то ймовірність настання події A у кожному випробуванні буде постійною. Описана послідовність незалежних випробувань одержала назву схеми Бернуллі.

2.1. Формула Бернуллі

Теорема: *Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах, і ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна, то ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A настане рівно m раз, обчислюється за формулою :*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \text{ , де } q = 1 - p \text{, } C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Цю формулу називають ***формулою Бернуллі***.

Приклад: Імовірність влучення в мішень для даного стрільця при одному пострілі дорівнює 0,7. Зроблено 4 постріли. Знайти ймовірність того, що даний стрілець потрапив у мішень 3 рази.

Рішення.

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^1 = 4 \cdot 0,343 \cdot 0,3 = 0,412$$

Приклад: Ймовірність розв’язання стандартної задачі для обраного студента дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що даний студент розв’яже 2 задачі з 5 запропонованих.

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 10 \cdot 0,36 \cdot 0,064 = 0,231$$

Найімовірніше число настання події.

Приклад:

Нехай ймовірність того, що покупцю необхідне взуття 41 розміру дорівнює 0,25. До магазину зайшли вісім покупців. Можливі такі наслідки: покупцям знадобилось 0,1,2,3,4,5,6,7,8 пар взуття 41 розміру. Вся група цих подій є повною групою подій. Вважаючи, що $n = 8$, $p = 0,25$, $q = 1 - 0,25 = 0,75$, за формулою Бернуллі знайдемо ймовірність кожної з подій повної групи :

$P_8(0) = 0,1001$

$P_8(1) = 0,267$

$P_8(2) = 0,3115$

$P_8(3) = 0,2076$

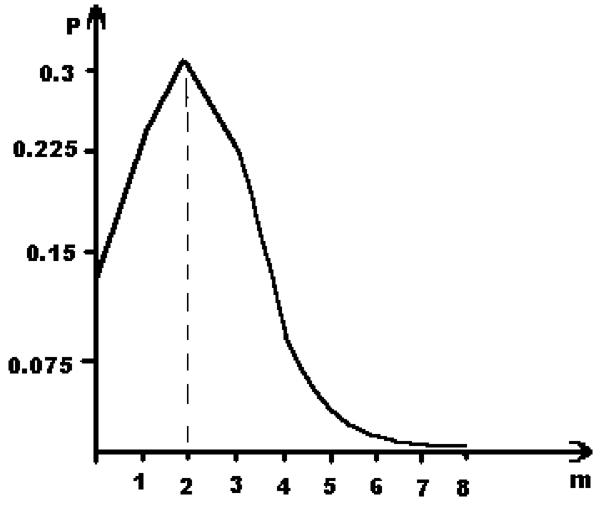
$P_8(4) = 0,0865$

$P_8(5) = 0,0231$

$P_8(6) = 0,0038$

$P_8(7) = 0,0004$

$P_8(8) = 0,0000$



Легко помітити, що ймовірність $P_{n,8}$ спочатку зростає, а після досягнення найбільшого значення спадає. Цю закономірність покажемо на графіку.

Отримана ламана лінія, називається **багатокутником розподілу** ймовірностей числа настання подій.

З приклада очевидно, що найбільш ймовірно із восьми двом покупцям буде потрібне взуття 41 розміру.

Кількість настань події в n незалежних випробуваннях називається **найімовірнішим**, якщо ймовірність здійснення події найбільша.

Значення m_0, якому відповідає найбільша ймовірність $P_n(m)$ називається *найбільш імовірним числом* (найбільш імовірною *частотою*) появи події *A*. Найбільш імовірна частота знаходиться в інтервалі

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$$

Довжина цього інтервалу дорівнює одиниці, тому якщо границі інтервалу – цілі числа, то є дві найбільш імовірні частоти $m_0 = n \cdot p + p$ і $m_0 = n \cdot p - q$, у противному випадку – тільки одна $m_0 = [n \cdot p + p]$, де $[n \cdot p + p]$ – ціла частина числа $n \cdot p + p$.

Приклад. Імовірність виготовлення на автоматичному верстаті стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти найбільш імовірне число появи бракованих деталей серед 5 відібраних.

Рішення.

1 спосіб. Імовірність виготовлення бракованої деталі $p = 1 - 0,8 = 0,2$. Знайдемо усі можливі ймовірності за формулою Бернуллі:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,32768 \qquad P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0,4096 \qquad P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = 0,0064$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048 \qquad P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,00032$$

Найбільш ймовірне число появи бракованих деталей це 1, тому що $P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0,4096$ найбільша.

2 спосіб. За формулою найбільш імовірного числа:

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$$

$$5 \cdot 0,2 - 0,8 \le m_0 \le 5 \cdot 0,2 + 0,2$$

або $0,2 \le m_0 \le 1,2$.

Єдине ціле число, що задовольняє отриманій нерівності, $m_0 = 1$.

Задачі

1. Імовірність влучення в мішень для даного стрільця при одному пострілі дорівнює 0.2. Зроблено 4 постріли. Знайти ймовірність того, що даний стрілець потрапив у мішень:

   а) 1 раз;

   б) 2 рази;

   в) жодного разу.

2. Гравець накидає кільця на кілочок. Імовірність удачі при цьому 0.1. Визначити ймовірність того, що із шести кілець потраплять на кілочок:

   а) два кільця;

   б) всі кільця:

   в) жодного кільце.

3. У магазин увійшли 8 покупців. Яка ймовірність того, що три з них зроблять покупки, якщо ймовірність зробити покупку для кожного покупця дорівнює 0.3?

4. При передачі повідомлення ймовірність перекручування одного знака дорівнює 0.01. Визначити ймовірність того, що повідомлення з 10 знаків містить рівно два перекручування.

5. Що ймовірніше виграти в рівносильного супротивника: три партії із чотирьох або п'ять партій з восьми (нічийний результат партії виключений)?

6. Вироби деякого виробництва містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання виробів:

а) немає жодного зіпсованого;

б) будуть два зіпсованих;

в) буде хоча б одне зіпсоване.

7. Робітник обслуговує чотири верстати, кожний з яких може вийти з ладу протягом зміни з імовірністю 2%. Визначити ймовірність того, що з ладу вийдуть:

а) більше трьох верстатів;

б) жоден верстат;

в) хоча б один верстат.

8. Для прядіння змішали нарівно білу й пофарбовану бавовну. Яка ймовірність серед п'яти випадково обраних волокон суміші виявиться менш двох пофарбованих?

9. Серед коконів деякої партії 30% кольорових. Яка ймовірність того, що серед 10 випадково відібраних з партії коконів 3 кольорових; не більше 3 кольорових?

10. Монету кидають п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде:

а) менш двох разів;

б) не менш двох разів.

11. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться не менш трьох разів у чотирьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює 0,4.

12. Подія B з'явиться у випадку, якщо подія A наступить не менш чотирьох разів. Знайти ймовірність настання події B, якщо буде зроблено п'ять незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A дорівнює 0,8.

13. У родині п'ять дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) не більше двох хлопчиків; в) більше двох хлопчиків; г) не менш двох і не більше трьох хлопчиків. Імовірність народження хлопчика прийняти рівною 0.51.

14. Пристрій складається із трьох незалежно працюючих основних елементів. Пристрій відмовить, якщо відмовить хоча б один елемент. Імовірність відмови кожного елемента за час роботи t дорівнює 0.1. Знайти ймовірність безвідмовної роботи пристрою за час t, якщо а) працюють тільки основні елементи; б) включений один резервний елемент; в) включені два резервних елементи. Передбачається, що резервні елементи працюють у такому ж режимі, що й основні, імовірність відмови кожного резервного елемента також дорівнює 0,1 і пристрій відмовляє, якщо працюють менш трьох елементів.

15. Імовірність одержання вдалого результату при здійсненні складного хімічного випробування дорівнює 2/3. Знайти найбільш імовірне число вдалих результатів, якщо загальна кількість випробувань дорівнює 7.

16. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,75. Знайти найбільш імовірне число деталей, які будуть визнані стандартними.

17. Випробовується кожний з 15 елементів деякого пристрою. Імовірність того, що елемент витримає випробування, дорівнює 0,9. Знайти найбільш імовірне число елементів, які витримають випробування.

18. Товарознавець оглядає 24 зразка товарів. Імовірність того, що кожний зі зразків буде визнаний придатним до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найбільш імовірне число зразків, які товарознавець визнає придатними до продажу.

19. Батарея дала 14 пострілів по об'єкту, імовірність влучення в який дорівнює 0,2. Знайти найбільш імовірне число влучень і ймовірність цього числа влучень.

20. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі зі знаряддя дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб найбільш імовірне число влучень було дорівнює 20?

2.2. Локальна теорема Муавра – Лапласа

Знаходження ймовірностей $P_n(m)$ за формулою Бернуллі ускладнюється при досить великих значеннях n та при малих p та q. У таких випадках використовують замість формули Бернуллі наближені асимптотичні формули:

- локальна теорема Мавра-Лапласа;
- інтегральна теорема Мавра-Лапласа;
- теорема Пуассона.

Перші дві теореми використовують поняття локальної та інтегральної функції Лапласа. Спочатку введемо означення цих функцій.

Означення. ***Локальною функцією Лапласа*** називають функцію вигляду

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Ця функція часто використовується, тому її значення для різних x наведені в підручниках та посібниках із теорії ймовірностей. Для функції $\varphi(x)$ складені таблиці. У силу властивостей функції таблиці складені тільки для додатних значень аргументу, менших 5.

Основні властивості локальної функції Лапласа.

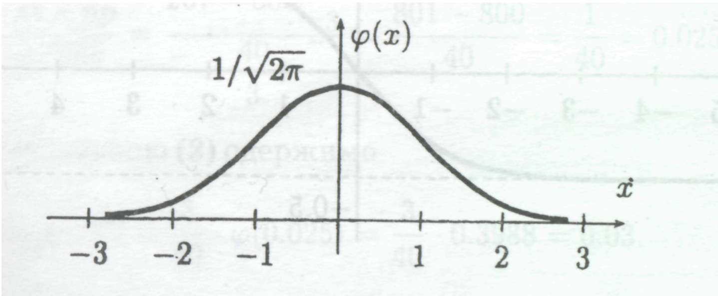
1. Функція Лапласа $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
2. Функція Лапласа $\varphi(x)$ визначена для усіх $x \in (-\infty;\infty)$ і приймає значення більші нуля.

3. Якщо $x > 5$, то $\varphi(x) \approx 0$.

4. $\varphi_{\max} = \varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$

Графік локальної функції Лапласа має вигляд:



Означення. ***Інтегральною функцією Лапласа*** називають функцію вигляду $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

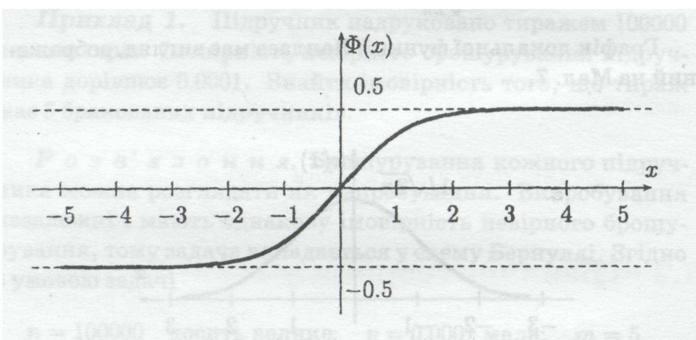
Легко бачити, що між локальною функцією $\varphi(x)$ та інтегральною функцією $\Phi(x)$ існує простий зв'язок:

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x) dt.$$

Основні властивості інтегральної функції Лапласа.

1. Інтегральна функція Лапласа є непарною функцією $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
2. $\Phi(0) = 0$;
3. Якщо $x \geq 5$, то $\Phi(x) = 0{,}5$.
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 0{,}5$

Графік інтегральної функції Лапласа має вигляд:



Локальна теорема Муавра – Лапласа

Якщо при n незалежних випробуваннях подія A відбувається з постійною ймовірністю p, що не дуже близька до нуля й одиниці (0<p<1), то при досить великій кількості випробувань n імовірність того, що подія A відбудеться k раз, приблизно дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\ , \quad де\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальну теорему Мавра –Лапласа доцільно використовувати при $npq > 20$.

Приклад. У деякій місцевості ймовірність того, що сім'я має комп'ютер дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з 400 родин 300 мають комп'ютер.

Рішення. Імовірність того, що родина має комп'ютер, дорівнює $p = 0,8$. $q = 0,2$. Вважаючи, що $n = 400$ досить велике (умова $npq = 400 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64 \geq 20$ виконана), застосовуємо локальну формулу Муавра-Лапласа.

Спочатку визначимо $x = \dfrac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,50$

Тоді за формулою $P_{400}\left(300\right) \approx \dfrac{f(-2,50)}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \dfrac{f(2,50)}{\sqrt{64}} = \dfrac{0,0175}{8} \approx 0,0022$

(значення $f(2,50)$ знайдене по таблиці).

Зауваження. Досить мале значення ймовірності $P_{400}(300)$ не повинне викликати сумніву, тому що крім події «рівно 300 родин з 400 мають холодильники» можливо ще 400 подій: «0 з 400», «1 з 400»,..., «400 з 400» зі своїми ймовірностями. Всі разом ці події утворюють повну групу, і сума їхніх ймовірностей дорівнює одиниці.

Нехай в умовах приведеного вище приклада необхідно знайти ймовірність того, що з 400 сімей від 300 до 360 (включно) мають холодильники. У цьому випадку за теоремою додавання ймовірність шуканої події дорівнює:

$$P_{400}(300 \leq m \leq 360) = P_{400}\left(300\right) + P_{400}(301) + \ldots + P_{400}(360).$$

Обчислити кожний доданок можна за локальною формулою Муавра-

Лапласа, але велика кількість доданків робить розрахунок досить складним. У таких випадках використовується інтегральна теорема Мавра-Лапласа.

2.3. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Якщо в n незалежних випробуваннях подія A відбувається з постійною ймовірністю p, що відрізняється від 0 і 1, то при досить великому n імовірність того, що частота k події A перебуває в інтервалі $[a,b]$, *приблизно дорівнює*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (2.4)$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt, \ x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Зауваження. У ряді робіт функція Лапласа має вигляд: $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$. У цьому випадку: $P_n(a \le k \le b) \approx \dfrac{1}{2}(\Phi(x_2) - \Phi(x_1))$.

Приклад. У деякій місцевості ймовірність того, що сім'я має комп'ютер дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з 400 сімей від 300 до 360 (включно) родин мають комп'ютери.

Рішення. Застосовуємо інтегральну теорему Муавра–Лапласа ($npq = 400 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64 \ge 20$). Спочатку визначимо

$$x_1 = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,50 \ , \qquad x_2 = \frac{360 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5,0 .$$

Тепер за формулою, з огляду на властивість ($\Phi(x)$ - непарна функція), одержимо

$$P_{400}(300 \le k \le 360) \approx \Phi(5,0) - \Phi(-2,50) =$$

$$= \Phi(5,0) + \Phi(2,50) \approx 0,5 + 0,4938 = 0,9938$$

(за табл. $\Phi(2,5) = 0,4938$, $\Phi(5,0) \approx 0,5$).

Теорема Бернуллі

Теорема Якоба Бернуллі встановлює зв'язок теорії ймовірностей з її практичним застосуванням. Вона була доведена Якобом Бернуллі в кінці XVII століття і опублікована у 1713 році.

Теорема Бернуллі. *Якщо у n незалежних випробуваннях імовірність p появи події A однакова і подія A з'явилася m разів, то для будь-якого додатного числа ε має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0,$$

Тобто границя імовірності відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ події A від її імовірності на величину, що більше або дорівнює ε, дорівнює нулеві.

Згідно означенню границі рівність цієї теореми означає, що

$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = \alpha$ - нескінченна мала величина.

Та це означає, що подія $\left| \frac{m}{n} - p \right| \geq \varepsilon$ практично неможлива.

Але тоді протилежна подія $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ практично достовірна для будь якого додатного числа ε.

Зауваження. Формулу теореми Бернуллі можна записати з використанням інтегральної функції Лапласа $\Phi(x)$ у вигляді

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \right), \qquad (2.5)$$

яка дозволяє розв'язувати багато задач.

.

Формула (2.5) дозволяє також визначити:

1) число n випробувань, необхідних для того, щоб із заданою ймовірністю P відхилення відносної частоти події A від постійної ймовірності p появи події A у кожному випробуванні по модулю не перевищило заданого значення $\varepsilon>0$;

2) інтервал, у якому із заданою ймовірністю P знаходиться відносна частота події A, якщо відомо число випробувань і постійна ймовірність p появи події A

у кожному випробуванні.

Приклад. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що відносна частота (частість) появи події відхиляється від імовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,04.

Рішення. За умовою прикладу $n = 625$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 0,04$.

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \le 0,04\right) \approx 2\Phi\left(0,04\sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876$$

Приклад. За статистичним даними в середньому 87% немовлят доживають до 50 років. Знайти ймовірність того, що з 1000 немовлят доля (частка) тих, хто дожив до 50 років буде: а) укладена в межах від 0,9 до 0,95; б) буде відрізнятися від імовірності цієї події не більш, ніж на 0,04 (за абсолютною величиною).

Рішення.

а) Імовірність того, що немовля доживе до 50 років, дорівнює 0,87. Тому що $n = 1000$ велике (умова $npk = 1000 \cdot 0,87 \cdot 0,13 = 113,1 \ge 20$ виконане), використовуємо наслідок інтегральної теореми Муавра-Лапласа. Спочатку визначимо

$$x_1 = \frac{0,9 - 0,87}{\sqrt{0,87 \cdot 0,13 / 1000}} = 2,82, \qquad x_2 = \frac{0,95 - 0,87}{\sqrt{0,87 \cdot 0,13 / 1000}} = 7,52 .$$

За формулою (2.4)

$$P_{1000}(0,9 \le \frac{m}{n} \le 0,95) \approx \Phi(7,52) - \Phi(2,82) = 0,5 - 0,4976 = 0,0024$$

б) По формулі (2.5)

$$P_{1000}\left(\left|\frac{m}{n} - 0,87\right| \le 0,04\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0,04 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0,87 \cdot 0,13}}\right) = 2\Phi(3,76) = 0,9998.$$

З того, що нерівність $\left|\frac{m}{n} - 0,87\right| \le 0,04$ рівносильна нерівності $0,83 \le \frac{m}{n} \le 0,91$, отриманий результат означає, що практично вірогідно, що з 1000 немовлят доживуть до 50 років від 0,83 до 0,91 числа немовлят.

2.4. Теорема Пуассона

Якщо ймовірність p появи події A близька до нуля, то варто використовувати теорему Пуассона, що у цьому випадку дає більшу точність.

Якщо при n незалежних випробуваннях подія A відбувається з імовірністю p, близькою до 0, то при досить великому n імовірність здійснення події A рівно k раз приблизно дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$.

Для функції Пуассона $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ складені таблиці.

Приклад. Нехай імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей виявиться п'ять нестандартних.

Рішення. Тут n=1000, p=0,004, а $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$. Всі три числа задовольняють вимогам теореми Пуассона, а тому для знаходження ймовірності шуканої події $P_{1000}(5)$ застосовуємо формулу (2.4). По таблиці значень функції Пуассона при $\lambda = 4$ й $k = 5$ отримуємо: $P_{1000}(5) \approx 0,1563$.

Знайдемо ймовірність тієї ж події по формулі Муавра-Лапласа Для цього спочатку обчислюємо значення x:

$$x = \frac{5 - 1000 \cdot 0,004}{\sqrt{1000 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} = \frac{1}{1,996} = 0,501.$$

Тоді по формулі (2.3):

$$P_{1000}\left(5\right) \approx \frac{\varphi(0,501)}{1,996} = \frac{0,3521}{1,996} = 0,1764.$$

Значення $P_{1000}(5)$, обчислене по формулі Бернуллі, дорівнює:

$$P_{1000}(5) = C_{1000}^{5} \cdot 0,004^{5} \cdot 0,996^{995} = 0,1552.$$

Таким чином, відносна помилка обчислення ймовірності $P_{1000}(5)$ по наближеній формулі Муавра-Лапласа складає: $\dfrac{0,1764-0,1552}{0,1552}=0,136$ або 13,6%, а по формулі Пуассона – $\dfrac{0,1563-0,1552}{0,1552}=0,007$, або 0,7%, тобто в 19,4 раз менше.►

Питання для самоперевірки

1. Наведіть формулу Бернуллі. Яке її призначення?
2. Як знаходять наімовірніше число настання події ?
3. Сформулюйте локальну теорему Муавра-Лапласа. У яких випадках її застосовують?
4. Сформулюйте властивості функції $\varphi(x)$.
5. Наведіть інтегральну теорема Муавра-Лапласа? У яких випадках її застосовують?
6. Якими властивості має функція Ф(х)?
7. Наведіть теорему Пуассона? Як знайти параметр λ?

Задачі

1. Імовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

2. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 немовлят виявиться 50 хлопчиків.

3. Імовірність появи успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успіх наступить:

а) рівно 75 разів? б) рівно 85 разів?

4. Яка ймовірність того, що в стовпчику з 100 навмання відібраних монет, буде від 45 до 55 монет розташованих гербом нагору?

5. Виробництво дає 1% від браку. Яка ймовірність того, що з узятих на дослідження 1100 виробів бракованих буде не більше 17?

6. Схожість насінь даної рослини дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 900 посаджених насінь число проросли буде між 790 і 830.

7. Імовірність появи події в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

8. Імовірність появи події в кожному з 10000 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

9. Імовірність появи успіху в кожному з 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що частота появи успіху відхилиться за абсолютною величиною від його ймовірності не більше ніж на 0,04.

10.Підручник виданий тиражем 100000 екземплярів, Імовірність того, що підручник зроблен неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить рівно 5 бракованих книг.

11.Пристрій складається з 1000 елементів; працюючих незалежно один від іншого. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять рівно три елементи.

12.Завод відправив на базу 500 виробів. Імовірність ушкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірності того, що в дорозі буде ушкоджено:

а) рівно три;

б) менш трьох;

в) більше трьох;

г) хоча б одне.

3. Випадкові величини

3.1. Види та способи завдання випадкових величин

Випадковою називається величина, що приймає в результаті випробування одне із значень, що належить множині її можливих значень, заздалегідь невідоме, змінне від випробування до випробування і залежне від випадкових обставин.

Випадкова величина характеризує усі можливі результати випробування з кількісної сторони.

Випадкові величини будемо позначати останніми заголовними буквами латинського алфавіту: $X, Y, Z, \ldots$, а їхні можливі значення відповідними малими буквами – $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення x_1 або значення x_2, позначають через p_1, p_2 і т.д. Таким чином, $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$ і т.д.

Дискретними називаються випадкові величини, які приймають кінцеву або нескінченну рахункову множину значень.

Неперервними називаються випадкові величини, які можуть приймати будь-які значення з деякого кінцевого або нескінченного інтервалу.

Законом розподілу випадкової величини називається відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і їхніх імовірностей.

Якщо закон розподілу випадкової величини X відомий, то говорять, що випадкова величина X розподілена за даним законом.

Дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла інша величина. У противному випадку випадкові величини називаються *залежними*.

Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у вигляді таблиці, у вигляді функції розподілу й у вигляді щільності ймовірності.

Найбільш простою формою закону розподілу випадкової величини є таблиця, у якій знаходяться можливі значення випадкової величини і їхньої ймовірності:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_{n-1}	p_n

При цьому виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Така форма завдання закону випадкової величини називається також *рядом розподілу*.

Табличне завдання закону розподіли може бути використано тільки для дискретної випадкової величини з кінцевим числом можливих значень.

При графічному зображенні ряду розподілу в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладають всі можливі значення випадкової величини, а по осі ординат – відповідні ймовірності. Потім будують крапки (x_i, y_i) і з'єднують їхньою ламаною лінією (мал. 4.1). Отримана фігура називається *багатокутником* або *полігоном розподілу*.

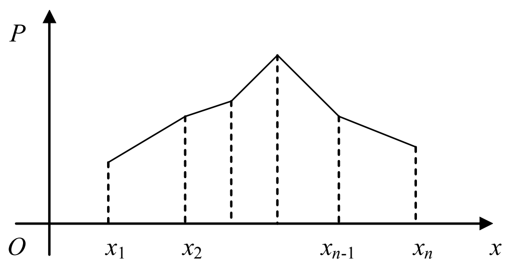


Рис 3.1. Полігон розподілу

Функція розподілу є найбільш загальною формою завдання закону розподілу. Вона використовується для завдання як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Функція розподілу $F(x)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше фіксованого дійсного числа x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.1}$$

Функція $F(x)$ також називається *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом розподілу*.

На основі ряду розподілу можна одержати *функцію розподілу дискретної випадкової величини X.* Ця функція виражається наступною формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \tag{3.2}$$

Формулу (3.2) можна записати в наступному виді, що наочно ілюструє безперервність ліворуч функції розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le x_1, \\ p_1, & \text{при} \quad x_1 < x \le x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & \text{при} \quad x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & \text{если} \quad x > x_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини являє собою розривну східчасту лінію (мал. 4.2). Функція терпить розрив I роду (стрибок функції) у тих точках, у яких випадкова величина приймає конкретні значення, зазначені в ряді розподілу. Сума всіх стрибків функції дорівнює одиниці. Приклад графіка функції розподілу безперервної випадкової величини наведений на мал. 4.3.

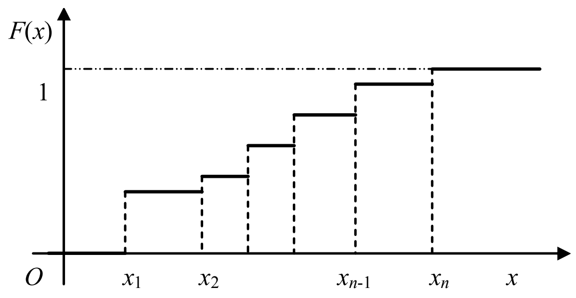


Рис 3.2. Функція розподілу диск.в.в.

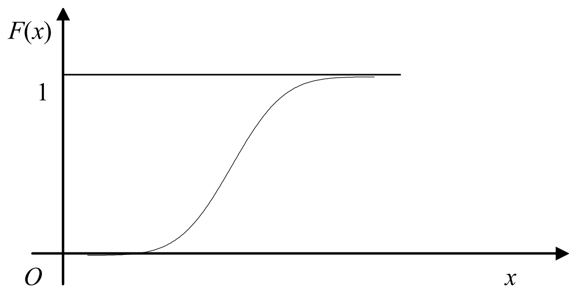


Рис 3.3. Функція розподілу непер.в.в.

Розглянемо властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з визначення функції розподілу як імовірності здійснення події $X < x$.

2. Функція розподілу $F(x)$ – неспадаюча, безперервна ліворуч функція, визначена на всій числовій осі, при цьому $F(-\infty)=0$ і $F(\infty)=1$.

3. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу $\left[x_1, x_2\right)$ дорівнює:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right).$$

Із цієї властивості випливає, що ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме окреме значення x, дорівнює нулю. Дійсно, при $\Delta x \to 0$ можна записати наступний вираз

$$P(X=x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x \le X < x+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[F\left(x+\Delta x\right) - F\left(x\right)\right] = 0.$$

Таким чином, нульову імовірність мають не тільки неможливі, але й можливі події. Цей висновок цілком узгоджується зі статистичним визначенням імовірності події, за яким відносна частота появи події при великій кількості випробувань не дорівнює, а тільки наближається до ймовірності. Тому рівність нулю ймовірності події означає тільки, що при необмеженому повторенні випробувань ця подія з'являється як завгодно рідко й жодною мірою не означає, що дана подія неможлива.

Крім того, розглянутий наслідок дозволяє в практичних додатках використовувати наступну рівність:

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \qquad (3.4)$$

4. Якщо випадкова величина X приймає всі значення на відрізку $\left[x_1, x_2\right]$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1 \\ F(X), & \text{если } x_1 < x \le x_2 \\ 1, & \text{если } x > x_2 \end{cases}.$$

Варто помітити, що якщо кожна випадкова величина однозначно визначає функцію розподілу, то одну і ту саму функцію розподілу можуть мати різні випадкові величини.

Поряд з функцією розподілу закон розподілу безперервної випадкової величини може бути заданий *функцією щільності ймовірності* (*щільність розподілу ймовірностей*, *диференціальна функція*).

Щільністю ймовірності $f\left(x\right)$ безперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$, тобто

$$f(x)=F'\left(x\right).$$

Для дискретної випадкової величини щільність імовірності не визначена.

Крива, що зображує функцію щільності ймовірності $f\left(x\right)$ називається *кривою розподілу*.

Розглянемо властивості щільності ймовірності.

1. $f\left(x\right)\geq 0$.

Ця властивість безпосередньо випливає з визначення функції $f\left(x\right)$ як похідній від неспадаючої функції розподілу $F(x)$.

2. Функція розподілу неперервної випадкової величини X може бути виражена через інтеграл

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{3.5}$$

де $f(x)\geq 0$ – функція щільності ймовірності.

Формула (3.5) визначає площу фігури під графіком функції $f\left(x\right)$ при $x\in\left]-\infty,x\right]$.

3. Площа фігури, що обмежена кривої розподілу й віссю абсцис, дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \tag{3.6}$$

Це слідує із властивості функції розподілу: $F(\infty)=1$. Тоді

$$F(\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 .$$

4. Якщо задані два значення x_1 і x_2 неперервної випадкової величини X $\left(x_1,x_2\right)$, то ймовірність того, що X приймає значення в інтервалі $\left(x_1,x_2\right)$, дорівнює

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{3.7}$$

Дійсно, за формулою (3.3) і за формулою Ньютона-Лейбниця, маємо:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

5. Якщо випадкова величина X приймає всі значення на відрізку $\left[x_1, x_2\right]$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le x_1 \\ f(x), & \text{при } x_1 < x \le x_2 \\ 0, & \text{при } x > x_2 \end{cases},$$

причому

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt = 1. \tag{3.8}$$

3.2. Числові характеристики випадкової величини

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Але при рішенні ряду практичних завдань немає необхідності розглядати усі можливі значення випадкової величини й відповідні їм імовірності, а зручніше користуватися деякими кількісними показниками, які обчислюються на основі закону розподілу й подають достатню інформацію про випадкову величину. Такі показники називаються *числовими характеристиками випадкової величини*. Основними з них є математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти різних порядків, мода й медіана.

Математичне сподівання. Математичне сподівання характеризує розташування значень випадкової величини на числовій осі, визначаючи собою деяку середню характеристику, навколо якої зосереджені всі можливі значення випадкової величини. Тому математичне сподівання іноді називають середнім значенням випадкової величини.

Математичне сподівання позначається через MX або $M(X)$.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюють по наступній формулі:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{3.9}$$

де x_i – значення дискретної випадкової величини, p_i – імовірність того, що випадкова величина прийме значення x_i , n – кількість значень випадкової величини.

Якщо випадкова величина X приймає нескінченну рахункову множину значень, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

При цьому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ повинен абсолютно сходитися.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx, \qquad (3.10)$$

де $f(x)$ – функція щільності ймовірності випадкової величини й інтеграл сходиться абсолютно.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[x_1, x_2]$, дорівнює

$$M(X) = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)dx, \qquad (3.11)$$

Математичне сподівання випадкової величини має наступні властивості, спільні як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

1) $M(C) = C$, *якщо* C *– константа, тобто математичне сподівання постійної величини дорівнює самойконстанті.*

2) $M(CX) = C \cdot M(X)$, *тобто константу можна виносити за знак математичного сподівання.*

3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$, *тобто математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних очікувань.*

4) *Якщо випадкова величина* $X \geq 0$, *то й математичне сподівання* $M(X) \geq 0$.

5) *Якщо випадкові величини* X *и* Y *незалежні, то* $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, *тобто математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних очікувань.*

Дисперсія. Дисперсія характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини біля її математичного сподівання й позначається через DX або $D(X)$.

Дисперсія визначається як середнє значення квадрата відхилень випадкової величини від свого середнього значення

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \qquad (3.12)$$

Якщо цю формулу перетворити, використовуючи властивості математичного сподівання, то отримуємо формулу, що звичайно використовують при обчисленні дисперсії

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (3.13)$$

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється [на основі формул (3.9), (3.12) і (3.13)] за наступною формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \tag{3.14}$$

або

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 \tag{3.15}$$

Аналогічно, відповідно до формул (3.10) - (3.13), одержуємо формули для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \tag{3.16}$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 \tag{3.17}$$

Дисперсія має наступні властивості:

1) *Дисперсія константи дорівнює нулю*: $D(C) = 0$.
2) *Дисперсія завжди невід'ємна*: $D(X) \geq 0$.
3) *Константу можна винести з-під знака дисперсії*, *звівши попередньо її у квадрат*: $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.
4) *Зміна випадкової величини на постійну не змінює її дисперсію*:

$$D(C + X) = D(X).$$

5) *Якщо випадкові величини* X *і* Y *незалежні*, *то* $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$. *Дисперсія суми або різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих випадкових величин*.

Середнє квадратичне відхилення. Недоліком дисперсії є те, що вона має розмірність квадрата випадкової величини. Цього недоліку позбавлена характеристика розсіювання *середнє квадратичне відхилення*, що дорівнює позитивному квадратному кореню з дисперсії

$$\sigma = +\sqrt{D(X)}.$$

Моменти випадкової величини. Узагальненням основних числових характеристик випадкової величини є поняття моментів випадкової величини.

Початковим моментом порядку k називається величина

$$\nu_k = M(X)^k \tag{3.18}$$

Початковий момент дискретної випадкової величини:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i;$$

початковий момент безперервної випадкової величини:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Центральним моментом порядку *k* називається величина

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \tag{3.19}$$

Центральний момент дискретної випадкової величини:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^k p_i ;$$

центральний момент неперервної випадкової величини:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k f(x)dx.$$

Із цих визначень видно, що математичне сподівання є моментом першого порядку, а дисперсія - центральним моментом другого порядку.

Мода. *Модою* (M_0) називається середнє значення випадкової величини, що зустрічається найчастіше, тобто має максимальну ймовірність (для дискретної випадкової величини) або максимум функції щільності ймовірності в даній точці (для неперервної випадкової величини).

Та сама випадкова величина може мати одну або кілька мод. Однак можливо, що випадкова величина й не має моди (якщо всі значення мають однакову ймовірність).

Медіана. Визначимо поняття *квантеля* неперервної випадкової величини.

Квантилем порядку p або p – *квантилем*, $0 < p < 1$, називається число x_p , що задовольняє умові $F(x_p) = P(X < x_p) = p$.

Квантель порядку 0,5, тобто величина $x_{0,5}$ – називається *медіаною* (M_e) неперервної випадкової величини.

Для медіани справедлива рівність

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}$$

Тобто рівноможливо, що значення випадкової величини буде більше або менше медіани. Таким чином, медіана ділить область значень випадкової величини на дві рівні за ймовірностю частини.

3.3. Закони розподілу випадкових величин

Біноміальний розподіл. Нехай випадкова величина X є число появ події A в n незалежних випробуваннях. Імовірність появи події A в кожному випробуванні постійна й дорівнює p. Значеннями випадкової величини X є цілі числа $0,1,2,...,n$. Це означає, що випадкова величина X – *дискретна*.

Імовірність кожного значення випадкової величини X обчислюється за формулою Бернуллі (3.1):

$$P(X=k)=P_n\left(k\right)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $q=1-p$, $k=0,1,2,...,n$.

Закон розподілу даної випадкової величини X називається *біноміальним законом*, тому що ймовірності можливих її значень дорівнюють членам розкладання бінома Ньютона $\left(p+q\right)^n$.

Біноміальний закон може бути заданий у вигляді ряду розподілу

X	$X=0$	$X=1$	…	$X=k$	…	$X=n-1$	$X=n$
P	q^n	np^1q^{n-1}		$C_n^k p^k q^{n-k}$		$np^{n-1}q^1$	p^n

і у вигляді функції розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{при } 0<x\le n, \\ 1, & \text{при } x>n. \end{cases}$$

Значення n і p є *параметрами* біноміального розподілу. Твердження, що випадкова величина X має біноміальний розподіл з параметрами n і p, можна більш коротко записати у вигляді $X\in B(n,p)$.

Математичне сподівання біноміального розподілу $M(X)=np$, *дисперсія* $D(X)=npq$. Модою є наимовірніша частота появи події *A*.

Розподіл Пуассона. Якщо ймовірності можливих значень випадкової величини *X* обчислюється за формулою Пуассона:

$$P(X)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

де $\lambda=np$, те закон розподілу називається *розподілом Пуассона*. Функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \sum\limits_{k<x}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & \text{при } 0<x\le n, \\ 1, & \text{при } x>n. \end{cases}$$

Параметром розподілу Пуассона є величина λ. Цьому параметру рівні й математичне сподівання, і дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, тобто $M(X)=D(X)=\lambda$.

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина X має *рівномірний розподіл* на інтервалі $[a,b]$, якщо щільність імовірності $f(x)$ на цьому інтервалі постійна, а поза інтервалом дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le a,\\ c, & \text{при } a<x\le b,\\ 0, & \text{при } x>b,\end{cases}$$

де $c=const$ *c*=*const*.

Визначимо константу c. За умовою (3.8) повинне виконуватися рівність

$$\int_a^b f(x)dx=1,$$

або

$$\int_a^b cdx=1,$$

звідси

$$c=\frac{1}{b-a}.$$

Отже, функцію щільності ймовірності рівномірного розподілу можна записати у вигляді

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a<x\le b,\\ 0, & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Графік щільності $f(x)$ для рівномірного розподілу зображений на мал.3.4.

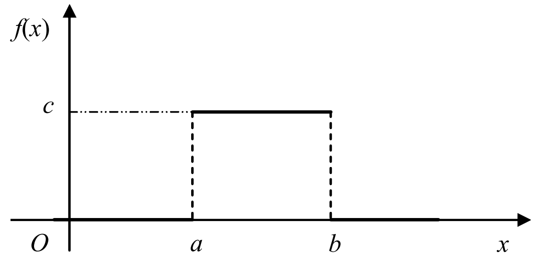


Рис 3.4. Щільність імовірності рівномірного розподілу

Функцію розподілу можна знайти за формулою (3.6):

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\left.\frac{x}{b-a}\right|_a^x=\frac{x-a}{b-a}$$

З огляду на властивість 4 функції розподілу, одержимо

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{x-b}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Графік функції розподілу зображений на мал. 3.5.

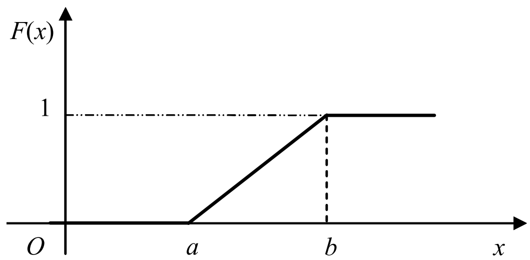


Рис 3.5. Функція розподілу рівномірного закону

Визначимо основні числові характеристики випадкової величини *X*, що має рівномірний розподіл.

Математичне сподівання $M(X)$ знайдемо по формулі (3.10):

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{a+b}{2} \quad .$$

Дисперсію $D(X)$ знайдемо за формулою (3.17):

$$D(X)=\int_a^b (x-MX)^2 f(x)dx=\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx=\frac{(b-a)^2}{12} \quad .$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Рівномірний розподіл не має моди, а медіана $M_e=M(X)$.

Імовірність влучення значень випадкової величина *X*, що має рівномірний розподіл, у відрізок $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, визначається за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a} \quad .$$

Нормальний розподіл. Нормальний розподіл є найпоширенішим розподілом у природі, техніці, економіці, біології, психології. Обґрунтування цього твердження було дано А.М.Ляпуновим у центральній граничній теоремі теорії ймовірностей, наслідок з якої формулюється в такий спосіб: *якщо випадкова величина X являє собою суму дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму дуже малий, то випадкова величина X має розподіл, близький до нормального.*

Неперервна випадкова величина з нормальним законом розподілу приймає будь-які значення в інтервалі $]-\infty, \infty[$ й може бути задана *щільністю ймовірності*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} , \tag{3.20}$$

або *функцією розподілу F(x)*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt , \tag{3.21}$$

де μ і σ - параметри нормального розподілу.

Інтегральну функцію нормального розподілу можна представити у вигляді

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \tag{3.22}$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа.

Параметрами нормального розподілу є числові характеристики випадкової величини *X*, а саме, математичне сподівання $M(X) = \mu$, середнє квадратичне відхилення σ. Тоді дисперсія $D(X) = \sigma^2$. Для нормального розподілу виконується рівність

$$M(X) = M_e = M_0 = \mu .$$

Твердження, про те, що випадкова величина *X* має нормальний розподіл з параметрами μ і σ коротко записується так: $X \in N(\mu, \sigma)$.

Графік щільності нормального розподілу (мал.3.6) називається *нормальною кривою*.

Методами диференціального обчислення можна встановити, що:

1) нормальна крива симетрична відносно прямій $x = \mu$;
2) функція $f\left(x\right)$ досягає в точці $x = \mu$ максимуму, рівного $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
3) вісь *Ox* є асимптотою функції $f\left(x\right)$, тобто $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;
4) графік функції $f\left(x\right)$ має дві крапки перегину : $(\mu - \sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ і $(\mu + \sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$.

При зміні значення μ графік функції $f\left(x\right)$ зміщається уздовж осі *x*. При збільшенні значення σ графік стискується до осі *Ox*. При зменшенні значення σ нормальна крива розтягується уздовж осі *Oy*.

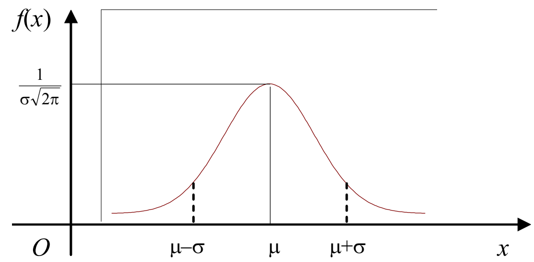


Рис 3.6. Щільність імовірності нормального розподілу

Особливе значення серед нормальних розподілів має *нормований* (*стандартний*) *нормальний розподіл* з параметрами $\mu = 0$ і $\sigma = 1$. Від довільного нормального розподілу $x \in N(\mu, \sigma)$ можна перейти до нормованого нормального розподілу, скориставшись заміною змінних

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad (3.23)$$

Тоді випадкова величина $Z \in N\left(0,1\right)$. Диференціальна функція нормованого нормального розподілу табульована, тому що

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \varphi(z).$$

Інтегральна функція також легко виражається через табульовану функцію Лапласа:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-z^2/2}dz=+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}e^{-z^2/2}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}+\Phi(z)=\frac{1}{2}+\Phi(z).$$

Імовірність того, що випадкова величина $x\in N(\mu,\sigma)$ приймає значення в інтервалі $(a,\, b)$ визначається, з огляду на (3.22), за формулою

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{3.24}$$

де Ф(x) - функція Лапласа.

Правило трьох сигм. Розглянемо окремий випадок формули (3.24), коли границі інтервалу, у який попадають значення випадкової величини X, симетричні щодо математичного сподівання μ. Тоді

$$P\left(\mu-\delta<X<\mu+\delta\right)=\Phi\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

З того, що подвійна нерівність $\mu-\delta<X<\mu+\delta$ рівносильна нерівності $|X-\mu|<\delta$, ймовірність того, що випадкова величина $X\in N\left(\mu,\sigma\right)$ відхиляється від свого математичного сподівання μ по абсолютній величині менше ніж на $\delta>0$ визначається за формулою

$$P\left(|X-\mu|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{3.25}$$

Виразивши відхилення випадкової величини X у частках середнього квадратичного відхилення, тобто поклавши $\delta=t\sigma$, рівність (3.25) можна записати у вигляді:

$$P(|X-\mu|<t\sigma)=2\,\Phi\left(\frac{t\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(t). \tag{3.26}$$

Знайдемо наступні ймовірності:

1) $P(|X-\mu|<\sigma)=2\Phi(1)=0{,}6826$;
2) $P(|X-\mu|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9545$;
3) $P(|X-\mu|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973$.

З останньої рівності треба, що з імовірністю, близької до одиниці, значення випадкової величини X попадають в інтервал $\mu\pm3\sigma$. Імовірність того, що випадкова величина прийме значення поза цим інтервалом дуже мала, а саме дорівнює 0,0027. Така подія можна вважати практично неможливим. На наведеному міркуванні засноване правило *трьох сигм*, що формулюється в такий спосіб: *якщо випадкова величина має нормальний розподіл*, *те практично вірогідно*, *що відхилення цієї величини від її математичного сподівання по абсолютній величині не перевершує потроєного середнього квадратичного відхилення*.

Це правило часто використовується на практиці: якщо розподіл випадкової величини X не відомо, але виконується правило трьох сигм, то можна припустити, що випадкова величина розподілена за нормальним законом.

Показниковий розподіл. Безперервна випадкова величина X називається розподіленою за *показниковим закон*ом, якщо вона може приймати тільки невід'ємні значення, а щільність імовірності визначається в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

де λ - параметр розподілу, $\lambda > 0$.

Знайдемо інтегральну функцію показникового розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x} \quad .$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Графік щільності ймовірності функції розподілу показникового закону при $\lambda = 1$ зображений на мал. 3.7.

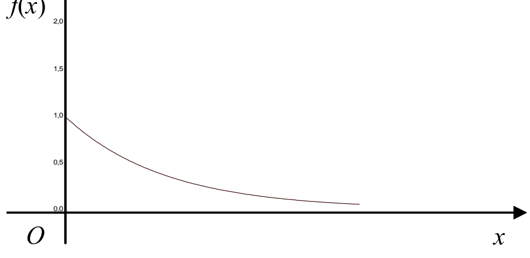


Рис 3.7. Щільність імовірності показникового закону

Визначимо числові характеристики випадкової величини, розподіленої за показниковим законом:

1) математичне сподівання

$$M(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\ ;$$

2) дисперсія

$$DX=\ D(X)=\int_0^\infty x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2};$$

3) середнє квадратичне відхилення

$$\sigma=\frac{1}{\lambda}.$$

Імовірність того, що випадкова величина X приймає значення в інтервалі $\left(x_1,x_2\right)$, дорівнює

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F\left(x_1\right)=1-e^{-\lambda x_2}-1+e^{-\lambda x_1}=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2}$$

Показниковий розподіл широко використовується в теорії надійності, що вивчає умови безвідмовної роботи різних систем.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення випадкової величини.
2. Наведіть приклади дискретних і неперервних випадкових величин.
3. Що називається законом розподілу дискретної випадкової величини?
4. Що називають рядом розподілу? Дайте визначення багатокутника розподілу.
5. Яка функція називається інтегральним законом розподілу випадкової величини? Сформулюйте властивості цієї функції.
6. Яка функція називається диференціальною функцією розподілу випадкової величини? Сформулюйте властивості цієї функції.
7. Дайте визначення математичного сподівання дискретної й неперервної випадкової величини
8. Сформулюйте властивості математичного сподівання.
9. Дайте визначення дисперсії дискретної і неперервної випадкової величини.
10. Сформулюйте властивості дисперсії.
11. Дайте визначення середнього квадратичного відхилення випадкової величини.
12. Дайте визначення початкового й центрального моментів k -го порядку. Які найпростіші співвідношення між ними?
13. Дайте визначення моди й медіани.
14. Який закон розподілу називають біноміальним?
15. Якою формулою визначається закон розподілу Пуассона?

16. Якою формулою визначається рівномірний закон розподілу? Запишіть формулу функції розподілу для рівномірного розподілу й побудуйте її графік.
17. Якою диференціальною функцією розподілу випадкової величини визначається нормальний закон розподілу? Поясніть зміст параметрів, які входять у вираз цієї функції.
18. Як впливають математичне сподівання й дисперсія на форму нормальній кривої?
19. Напишіть формулу для обчислення ймовірності того, що випадкова величина, що підлягає нормальному закону розподілу, приймає якесь значення з інтервалу (a,b).
20. Сформулюйте правило трьох сигм.

Задачі

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

   Побудуйте багатокутник розподілу.
2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

   Побудуйте багатокутник розподілу.
3. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	10	15	20	30
p	0,1	0,1	0,6	0,2

   Побудуйте багатокутник розподілу.
4. Пристрій складається із трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в одному випробуванні дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили, в одному випробуванні.
5. В партії 10 % нестандартних деталей. Навмання відібрані чотири деталі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних і побудувати багатокутник отриманого розподілу.
6. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появ «герба» при двох киданнях монети.
7. Дві гральні кістки одночасно кидають два рази. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадань парного числа очок на двох гральних костях.
8. Знайти математичне сподівання, дисперсію й середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, заданої законом розподілу:

а)

X	-4	6	10	20
p	0,1	0,1	0,6	0,2

б)

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

в)

X	-2	3	4	10
p	0,1	0,3	0,5	0,1

9. Дискретна випадкова величина X приймає три можливих значення: x_1=4 з імовірністю p_1=0,5; x_2=6 з імовірністю p_2=0,3; x_3 з імовірністю p_3. Знайти x_3 і p_3, знаючи, що $M(X)$=8.
10. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: x_1= -1, x_2=0, x_3=1, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X)$=0,1, $M(X^2)$=0,9. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, що відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.
11. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: x_1=1, x_2=2, x_3=3, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X)$=2,3, $M(X^2)$=5,9. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, *що* відповідають можливим значенням X.
12. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу. Знайти початкові й центральні моменти першого, другого й третього порядків.

а)

X	2	3
p	0,4	0,6

б)

X	3	5
p	0,2	0,8

13. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу. Знайти початкові й центральні моменти першого, другого, третього й четвертого порядків.

а)

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

б)

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

14. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -1 \\ (3/4)x+3/4 & при \quad -1<x\le 1/3 \\ 1 & при \quad x>1/3 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення в інтервалі (0,1/3).

15. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -2 \\ 1/2+(1/\pi)\arcsin(x/2) & при \quad -2<x\le 2 \\ 1 & при \quad x>2 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення в інтервалі (-1,1).

16. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 2 \\ 0,5x & при \quad 2<x\le 4 \\ 1 & при \quad x>4 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення: а) менше 0,2; б) менше трьох; в) не менше трьох; г) не менше п'яти.

17. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0 \\ x^2 & при \quad 0<x\le 1 \\ 1 & при \quad x>1 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина X рівно три рази прийме значення, що належить інтервалу (0,25, 0,75).

18. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Знайти функцію розподілу *F(x)* і побудувати її графік.

19. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	3	5	10
p	0,4	0,1	0,5

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і накреслити її графік.

20. Дано функцію розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0 \\ \sin x & при \quad 0<x\le \pi/2 \\ 1 & при \quad x>\pi/2 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$.

21. Дано функцію розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \sin 2x & при \quad 0<x\le \pi/4\\ 1 & при \quad x>\pi/4\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу *f(x)*.

22. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \cos x & при \quad 0<x\le \pi/2\\ 0 & при \quad x>\pi/2\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F(x)*.

23. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини *X:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \sin x & при \quad 0<x\le \pi/2\\ 0 & при \quad x>\pi/2\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F(x)*.

24. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини *X:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x-1/2 & при \quad 1<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F(x)*.

25. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини *X:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le \pi/6\\ 3\sin 3x & при \quad \pi/6<x\le \pi/3\\ 0 & при \quad x>\pi/3\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F(x)*.

26. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)=2x* в інтервалі (0;1); поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти математичне сподівання величини *X.*
27. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)=(1/2)x* в інтервалі (0;2); поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти математичне сподівання та дисперсію величини *X.*
28. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)=(1/2)sinx* в інтервалі (0;π); поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти дисперсію *X.*
29. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)=0,5x* в інтервалі (0;2); поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти початкові й центральні моменти першого, другого, третього й четвертого порядків.
30. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f(x)=2x* в інтервалі (0;1); поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти початкові й центральні моменти першого, другого, третього й четвертого порядків.
31. Знайти математичне сподівання, дисперсію й середнє квадратичне

відхилення випадкової величини X, рівномірно розподіленої в інтервалі (2,8).

32. Знайти математичне сподівання, дисперсію й середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, рівномірно розподіленої в інтервалі (3,5).
33. Математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює $a=3$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=2$. Написати щільність імовірності X.
34. Написати щільність імовірності нормально розподіленої випадкової величини X, знаючи, що $M(X)=3$, $D(X)=16$.
35. Математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно рівні 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення в інтервалі (12,14).
36. Написати щільність і функцію розподілу показникового закону, якщо параметр $\lambda=6$.
37. Написати щільність і функцію розподілу показникового закону, якщо параметр $\lambda=7$.
38. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\geq0$; при $x<0$ $f(x)=0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X попадає в інтервал (0,13;0,7).
39. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=0,04e^{-0,04x}$ при $x\geq0$; при $x<0$ $f(x)=0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X попадає в інтервал (1;2).

4. Список літератури

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юнити-Дана, 2001.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2000.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк. 2001.
4. Четыркин Е.М. Калихман И.Л. Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.
5. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Инфра-М, 1997.
6. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1977.

5. Додаток

Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ Таблиця 1

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0	0,3989	**0,5**	0,3521	**1**	0,2420	**1,5**	0,1295	**2**	0,0540
0,01	0,3989	**0,51**	0,3503	**1,01**	0,2396	**1,51**	0,1276	**2,01**	0,0529
0,02	0,3989	**0,52**	0,3485	**1,02**	0,2371	**1,52**	0,1257	**2,02**	0,0519
0,03	0,3988	**0,53**	0,3467	**1,03**	0,2347	**1,53**	0,1238	**2,03**	0,0508
0,04	0,3986	**0,54**	0,3448	**1,04**	0,2323	**1,54**	0,1219	**2,04**	0,0498
0,05	0,3984	**0,55**	0,3429	**1,05**	0,2299	**1,55**	0,1200	**2,05**	0,0488
0,06	0,3982	**0,56**	0,3410	**1,06**	0,2275	**1,56**	0,1182	**2,06**	0,0478
0,07	0,3980	**0,57**	0,3391	**1,07**	0,2251	**1,57**	0,1163	**2,07**	0,0468
0,08	0,3977	**0,58**	0,3372	**1,08**	0,2227	**1,58**	0,1145	**2,08**	0,0459
0,09	0,3973	**0,59**	0,3352	**1,09**	0,2203	**1,59**	0,1127	**2,09**	0,0449
0,1	0,3970	**0,6**	0,3332	**1,1**	0,2179	**1,6**	0,1109	**2,1**	0,0440
0,11	0,3965	**0,61**	0,3312	**1,11**	0,2155	**1,61**	0,1092	**2,11**	0,0431
0,12	0,3961	**0,62**	0,3292	**1,12**	0,2131	**1,62**	0,1074	**2,12**	0,0422
0,13	0,3956	**0,63**	0,3271	**1,13**	0,2107	**1,63**	0,1057	**2,13**	0,0413
0,14	0,3951	**0,64**	0,3251	**1,14**	0,2083	**1,64**	0,1040	**2,14**	0,0404
0,15	0,3945	**0,65**	0,3230	**1,15**	0,2059	**1,65**	0,1023	**2,15**	0,0396
0,16	0,3939	**0,66**	0,3209	**1,16**	0,2036	**1,66**	0,1006	**2,16**	0,0387
0,17	0,3932	**0,67**	0,3187	**1,17**	0,2012	**1,67**	0,0989	**2,17**	0,0379
0,18	0,3925	**0,68**	0,3166	**1,18**	0,1989	**1,68**	0,0973	**2,18**	0,0371
0,19	0,3918	**0,69**	0,3144	**1,19**	0,1965	**1,69**	0,0957	**2,19**	0,0363
0,2	0,3910	**0,7**	0,3123	**1,2**	0,1942	**1,7**	0,0940	**2,2**	0,0355
0,21	0,3902	**0,71**	0,3101	**1,21**	0,1919	**1,71**	0,0925	**2,21**	0,0347
0,22	0,3894	**0,72**	0,3079	**1,22**	0,1895	**1,72**	0,0909	**2,22**	0,0339
0,23	0,3885	**0,73**	0,3056	**1,23**	0,1872	**1,73**	0,0893	**2,23**	0,0332
0,24	0,3876	**0,74**	0,3034	**1,24**	0,1849	**1,74**	0,0878	**2,24**	0,0325
0,25	0,3867	**0,75**	0,3011	**1,25**	0,1826	**1,75**	0,0863	**2,25**	0,0317
0,26	0,3857	**0,76**	0,2989	**1,26**	0,1804	**1,76**	0,0848	**2,26**	0,0310
0,27	0,3847	**0,77**	0,2966	**1,27**	0,1781	**1,77**	0,0833	**2,27**	0,0303
0,28	0,3836	**0,78**	0,2943	**1,28**	0,1758	**1,78**	0,0818	**2,28**	0,0297
0,29	0,3825	**0,79**	0,2920	**1,29**	0,1736	**1,79**	0,0804	**2,29**	0,0290
0,3	0,3814	**0,8**	0,2897	**1,3**	0,1714	**1,8**	0,0790	**2,3**	0,0283
0,31	0,3802	**0,81**	0,2874	**1,31**	0,1691	**1,81**	0,0775	**2,31**	0,0277
0,32	0,3790	**0,82**	0,2850	**1,32**	0,1669	**1,82**	0,0761	**2,32**	0,0270
0,33	0,3778	**0,83**	0,2827	**1,33**	0,1647	**1,83**	0,0748	**2,33**	0,0264
0,34	0,3765	**0,84**	0,2803	**1,34**	0,1626	**1,84**	0,0734	**2,34**	0,0258
0,35	0,3752	**0,85**	0,2780	**1,35**	0,1604	**1,85**	0,0721	**2,35**	0,0252
0,36	0,3739	**0,86**	0,2756	**1,36**	0,1582	**1,86**	0,0707	**2,36**	0,0246
0,37	0,3725	**0,87**	0,2732	**1,37**	0,1561	**1,87**	0,0694	**2,37**	0,0241
0,38	0,3712	**0,88**	0,2709	**1,38**	0,1539	**1,88**	0,0681	**2,38**	0,0235
0,39	0,3697	**0,89**	0,2685	**1,39**	0,1518	**1,89**	0,0669	**2,39**	0,0229
0,4	0,3683	**0,9**	0,2661	**1,4**	0,1497	**1,9**	0,0656	**2,4**	0,0224
0,41	0,3668	**0,91**	0,2637	**1,41**	0,1476	**1,91**	0,0644	**2,41**	0,0219
0,42	0,3653	**0,92**	0,2613	**1,42**	0,1456	**1,92**	0,0632	**2,42**	0,0213
0,43	0,3637	**0,93**	0,2589	**1,43**	0,1435	**1,93**	0,0620	**2,43**	0,0208
0,44	0,3621	**0,94**	0,2565	**1,44**	0,1415	**1,94**	0,0608	**2,44**	0,0203
0,45	0,3605	**0,95**	0,2541	**1,45**	0,1394	**1,95**	0,0596	**2,45**	0,0198
0,46	0,3589	**0,96**	0,2516	**1,46**	0,1374	**1,96**	0,0584	**2,46**	0,0194
0,47	0,3572	**0,97**	0,2492	**1,47**	0,1354	**1,97**	0,0573	**2,47**	0,0189
0,48	0,3555	**0,98**	0,2468	**1,48**	0,1334	**1,98**	0,0562	**2,48**	0,0184
0,49	0,3538	**0,99**	0,2444	**1,49**	0,1315	**1,99**	0,0551	**2,49**	0,0180

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ Таблица 1 (продовження)

x	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$	*x*	$\varphi(x)$
2,5	0,0175	**3**	0,0044	**3,5**	0,0009	**4**	0,00013	**4,5**	0,000016
2,51	0,0171	**3,01**	0,0043	**3,51**	0,0008	**4,01**	0,00013	**4,51**	0,000015
2,52	0,0167	**3,02**	0,0042	**3,52**	0,0008	**4,02**	0,00012	**4,52**	0,000015
2,53	0,0163	**3,03**	0,0040	**3,53**	0,0008	**4,03**	0,00012	**4,53**	0,000014
2,54	0,0158	**3,04**	0,0039	**3,54**	0,0008	**4,04**	0,00011	**4,54**	0,000013
2,55	0,0154	**3,05**	0,0038	**3,55**	0,0007	**4,05**	0,00011	**4,55**	0,000013
2,56	0,0151	**3,06**	0,0037	**3,56**	0,0007	**4,06**	0,00011	**4,56**	0,000012
2,57	0,0147	**3,07**	0,0036	**3,57**	0,0007	**4,07**	0,00010	**4,57**	0,000012
2,58	0,0143	**3,08**	0,0035	**3,58**	0,0007	**4,08**	0,00010	**4,58**	0,000011
2,59	0,0139	**3,09**	0,0034	**3,59**	0,0006	**4,09**	0,00009	**4,59**	0,000011
2,6	0,0136	**3,1**	0,0033	**3,6**	0,0006	**4,1**	0,00009	**4,6**	0,000010
2,61	0,0132	**3,11**	0,0032	**3,61**	0,0006	**4,11**	0,00009	**4,61**	0,000010
2,62	0,0129	**3,12**	0,0031	**3,62**	0,0006	**4,12**	0,00008	**4,62**	0,000009
2,63	0,0126	**3,13**	0,0030	**3,63**	0,0005	**4,13**	0,00008	**4,63**	0,000009
2,64	0,0122	**3,14**	0,0029	**3,64**	0,0005	**4,14**	0,00008	**4,64**	0,000008
2,65	0,0119	**3,15**	0,0028	**3,65**	0,0005	**4,15**	0,00007	**4,65**	0,000008
2,66	0,0116	**3,16**	0,0027	**3,66**	0,0005	**4,16**	0,00007	**4,66**	0,000008
2,67	0,0113	**3,17**	0,0026	**3,67**	0,0005	**4,17**	0,00007	**4,67**	0,000007
2,68	0,0110	**3,18**	0,0025	**3,68**	0,0005	**4,18**	0,00006	**4,68**	0,000007
2,69	0,0107	**3,19**	0,0025	**3,69**	0,0004	**4,19**	0,00006	**4,69**	0,000007
2,7	0,0104	**3,2**	0,0024	**3,7**	0,0004	**4,2**	0,00006	**4,7**	0,000006
2,71	0,0101	**3,21**	0,0023	**3,71**	0,0004	**4,21**	0,00006	**4,71**	0,000006
2,72	0,0099	**3,22**	0,0022	**3,72**	0,0004	**4,22**	0,00005	**4,72**	0,000006
2,73	0,0096	**3,23**	0,0022	**3,73**	0,0004	**4,23**	0,00005	**4,73**	0,000006
2,74	0,0093	**3,24**	0,0021	**3,74**	0,0004	**4,24**	0,00005	**4,74**	0,000005
2,75	0,0091	**3,25**	0,0020	**3,75**	0,0004	**4,25**	0,00005	**4,75**	0,000005
2,76	0,0088	**3,26**	0,0020	**3,76**	0,0003	**4,26**	0,00005	**4,76**	0,000005
2,77	0,0086	**3,27**	0,0019	**3,77**	0,0003	**4,27**	0,00004	**4,77**	0,000005
2,78	0,0084	**3,28**	0,0018	**3,78**	0,0003	**4,28**	0,00004	**4,78**	0,000004
2,79	0,0081	**3,29**	0,0018	**3,79**	0,0003	**4,29**	0,00004	**4,79**	0,000004
2,8	0,0079	**3,3**	0,0017	**3,8**	0,0003	**4,3**	0,00004	**4,8**	0,000004
2,81	0,0077	**3,31**	0,0017	**3,81**	0,0003	**4,31**	0,00004	**4,81**	0,000004
2,82	0,0075	**3,32**	0,0016	**3,82**	0,0003	**4,32**	0,00004	**4,82**	0,000004
2,83	0,0073	**3,33**	0,0016	**3,83**	0,0003	**4,33**	0,00003	**4,83**	0,000003
2,84	0,0071	**3,34**	0,0015	**3,84**	0,0003	**4,34**	0,00003	**4,84**	0,000003
2,85	0,0069	**3,35**	0,0015	**3,85**	0,0002	**4,35**	0,00003	**4,85**	0,000003
2,86	0,0067	**3,36**	0,0014	**3,86**	0,0002	**4,36**	0,00003	**4,86**	0,000003
2,87	0,0065	**3,37**	0,0014	**3,87**	0,0002	**4,37**	0,00003	**4,87**	0,000003
2,88	0,0063	**3,38**	0,0013	**3,88**	0,0002	**4,38**	0,00003	**4,88**	0,000003
2,89	0,0061	**3,39**	0,0013	**3,89**	0,0002	**4,39**	0,00003	**4,89**	0,000003
2,9	0,0060	**3,4**	0,0012	**3,9**	0,0002	**4,4**	0,00002	**4,9**	0,000002
2,91	0,0058	**3,41**	0,0012	**3,91**	0,0002	**4,41**	0,00002	**4,91**	0,000002
2,92	0,0056	**3,42**	0,0012	**3,92**	0,0002	**4,42**	0,00002	**4,92**	0,000002
2,93	0,0055	**3,43**	0,0011	**3,93**	0,0002	**4,43**	0,00002	**4,93**	0,000002
2,94	0,0053	**3,44**	0,0011	**3,94**	0,0002	**4,44**	0,00002	**4,94**	0,000002
2,95	0,0051	**3,45**	0,0010	**3,95**	0,0002	**4,45**	0,00002	**4,95**	0,000002
2,96	0,0050	**3,46**	0,0010	**3,96**	0,0002	**4,46**	0,00002	**4,96**	0,000002
2,97	0,0048	**3,47**	0,0010	**3,97**	0,0002	**4,47**	0,00002	**4,97**	0,000002
2,98	0,0047	**3,48**	0,0009	**3,98**	0,0001	**4,48**	0,00002	**4,98**	0,000002
2,99	0,0046	**3,49**	0,0009	**3,99**	0,0001	**4,49**	0,00002	**4,99**	0,000002
								5	0,000001

Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ Таблиця 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	**0,5**	0,19145	**1**	0,34135	**1,5**	0,4332	**2**	0,47725
0,01	0,004	**0,51**	0,19495	**1,01**	0,34375	**1,51**	0,4345	**2,01**	0,4778
0,02	0,008	**0,52**	0,19845	**1,02**	0,34615	**1,52**	0,43575	**2,02**	0,4783
0,03	0,01195	**0,53**	0,20195	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,437	**2,03**	0,4788
0,04	0,01595	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,35085	**1,54**	0,4382	**2,04**	0,4793
0,05	0,01995	**0,55**	0,20885	**1,05**	0,35315	**1,55**	0,43945	**2,05**	0,4798
0,06	0,0239	**0,56**	0,21225	**1,06**	0,35545	**1,56**	0,4406	**2,06**	0,4803
0,07	0,0279	**0,57**	0,21565	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,07**	0,48075
0,08	0,0319	**0,58**	0,21905	**1,08**	0,35995	**1,58**	0,44295	**2,08**	0,48125
0,09	0,03585	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,36215	**1,59**	0,4441	**2,09**	0,4817
0,1	0,03985	**0,6**	0,22575	**1,1**	0,36435	**1,6**	0,4452	**2,1**	0,48215
0,11	0,0438	**0,61**	0,22905	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,11**	0,48255
0,12	0,04775	**0,62**	0,23235	**1,12**	0,36865	**1,62**	0,4474	**2,12**	0,483
0,13	0,0517	**0,63**	0,23565	**1,13**	0,37075	**1,63**	0,44845	**2,13**	0,4834
0,14	0,05565	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,37285	**1,64**	0,4495	**2,14**	0,4838
0,15	0,0596	**0,65**	0,24215	**1,15**	0,37495	**1,65**	0,45055	**2,15**	0,4842
0,16	0,06355	**0,66**	0,24535	**1,16**	0,377	**1,66**	0,45155	**2,16**	0,4846
0,17	0,0675	**0,67**	0,24855	**1,17**	0,379	**1,67**	0,45255	**2,17**	0,485
0,18	0,0714	**0,68**	0,25175	**1,18**	0,381	**1,68**	0,4535	**2,18**	0,48535
0,19	0,07535	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,383	**1,69**	0,4545	**2,19**	0,48575
0,2	0,07925	**0,7**	0,25805	**1,2**	0,38495	**1,7**	0,45545	**2,2**	0,4861
0,21	0,08315	**0,71**	0,26115	**1,21**	0,38685	**1,71**	0,45635	**2,21**	0,48645
0,22	0,08705	**0,72**	0,26425	**1,22**	0,38875	**1,72**	0,4573	**2,22**	0,4868
0,23	0,09095	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,39065	**1,73**	0,4582	**2,23**	0,48715
0,24	0,09485	**0,74**	0,27035	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,45905	**2,24**	0,48745
0,25	0,0987	**0,75**	0,27335	**1,25**	0,39435	**1,75**	0,45995	**2,25**	0,4878
0,26	0,10255	**0,76**	0,27635	**1,26**	0,39615	**1,76**	0,4608	**2,26**	0,4881
0,27	0,1064	**0,77**	0,27935	**1,27**	0,39795	**1,77**	0,46165	**2,27**	0,4884
0,28	0,11025	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,39975	**1,78**	0,46245	**2,28**	0,4887
0,29	0,1141	**0,79**	0,28525	**1,29**	0,40145	**1,79**	0,46325	**2,29**	0,489
0,3	0,1179	**0,8**	0,28815	**1,3**	0,4032	**1,8**	0,46405	**2,3**	0,4893
0,31	0,1217	**0,81**	0,29105	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,46485	**2,31**	0,48955
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,32**	0,48985
0,33	0,1293	**0,83**	0,29675	**1,33**	0,40825	**1,83**	0,4664	**2,33**	0,4901
0,34	0,13305	**0,84**	0,29955	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,34**	0,49035
0,35	0,13685	**0,85**	0,30235	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,46785	**2,35**	0,4906
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,46855	**2,36**	0,49085
0,37	0,1443	**0,87**	0,30785	**1,37**	0,41465	**1,87**	0,46925	**2,37**	0,4911
0,38	0,14805	**0,88**	0,31055	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,46995	**2,38**	0,49135
0,39	0,15175	**0,89**	0,31325	**1,39**	0,41775	**1,89**	0,4706	**2,39**	0,4916
0,4	0,1554	**0,9**	0,31595	**1,4**	0,41925	**1,9**	0,4713	**2,4**	0,4918
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,42075	**1,91**	0,47195	**2,41**	0,492
0,42	0,16275	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,47255	**2,42**	0,49225
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,42365	**1,93**	0,4732	**2,43**	0,49245
0,44	0,17005	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,42505	**1,94**	0,4738	**2,44**	0,49265
0,45	0,17365	**0,95**	0,32895	**1,45**	0,42645	**1,95**	0,4744	**2,45**	0,49285
0,46	0,17725	**0,96**	0,33145	**1,46**	0,42785	**1,96**	0,475	**2,46**	0,49305
0,47	0,1808	**0,97**	0,334	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,47**	0,49325
0,48	0,1844	**0,98**	0,33645	**1,48**	0,43055	**1,98**	0,47615	**2,48**	0,49345
0,49	0,18795	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,49**	0,4936

Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$ Таблиця 2 (продовження)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,5	0,4938	**3**	0,49865	**3,5**	0,49975	**4**	0,49997	**4,5**	0,4999965
2,51	0,49395	**3,01**	0,4987	**3,51**	0,4998	**4,01**	0,49997	**4,51**	0,499997
2,52	0,49415	**3,02**	0,49875	**3,52**	0,4998	**4,02**	0,49997	**4,52**	0,499997
2,53	0,4943	**3,03**	0,4988	**3,53**	0,4998	**4,03**	0,49997	**4,53**	0,499997
2,54	0,49445	**3,04**	0,4988	**3,54**	0,4998	**4,04**	0,499975	**4,54**	0,499997
2,55	0,4946	**3,05**	0,49885	**3,55**	0,4998	**4,05**	0,499975	**4,55**	0,4999975
2,56	0,49475	**3,06**	0,4989	**3,56**	0,4998	**4,06**	0,499975	**4,56**	0,4999975
2,57	0,4949	**3,07**	0,49895	**3,57**	0,4998	**4,07**	0,499975	**4,57**	0,4999975
2,58	0,49505	**3,08**	0,49895	**3,58**	0,49985	**4,08**	0,499975	**4,58**	0,4999975
2,59	0,4952	**3,09**	0,499	**3,59**	0,49985	**4,09**	0,49998	**4,59**	0,499998
2,6	0,49535	**3,1**	0,49905	**3,6**	0,49985	**4,1**	0,49998	**4,6**	0,499998
2,61	0,49545	**3,11**	0,49905	**3,61**	0,49985	**4,11**	0,49998	**4,61**	0,499998
2,62	0,4956	**3,12**	0,4991	**3,62**	0,49985	**4,12**	0,49998	**4,62**	0,499998
2,63	0,49575	**3,13**	0,49915	**3,63**	0,49985	**4,13**	0,49998	**4,63**	0,499998
2,64	0,49585	**3,14**	0,49915	**3,64**	0,49985	**4,14**	0,499985	**4,64**	0,4999985
2,65	0,496	**3,15**	0,4992	**3,65**	0,49985	**4,15**	0,499985	**4,65**	0,4999985
2,66	0,4961	**3,16**	0,4992	**3,66**	0,49985	**4,16**	0,499985	**4,66**	0,4999985
2,67	0,4962	**3,17**	0,49925	**3,67**	0,4999	**4,17**	0,499985	**4,67**	0,4999985
2,68	0,4963	**3,18**	0,49925	**3,68**	0,4999	**4,18**	0,499985	**4,68**	0,4999985
2,69	0,49645	**3,19**	0,4993	**3,69**	0,4999	**4,19**	0,499985	**4,69**	0,4999985
2,7	0,49655	**3,2**	0,4993	**3,7**	0,4999	**4,2**	0,499985	**4,7**	0,4999985
2,71	0,49665	**3,21**	0,49935	**3,71**	0,4999	**4,21**	0,499985	**4,71**	0,499999
2,72	0,49675	**3,22**	0,49935	**3,72**	0,4999	**4,22**	0,49999	**4,72**	0,499999
2,73	0,49685	**3,23**	0,4994	**3,73**	0,4999	**4,23**	0,49999	**4,73**	0,499999
2,74	0,49695	**3,24**	0,4994	**3,74**	0,4999	**4,24**	0,49999	**4,74**	0,499999
2,75	0,497	**3,25**	0,4994	**3,75**	0,4999	**4,25**	0,49999	**4,75**	0,499999
2,76	0,4971	**3,26**	0,49945	**3,76**	0,4999	**4,26**	0,49999	**4,76**	0,499999
2,77	0,4972	**3,27**	0,49945	**3,77**	0,4999	**4,27**	0,49999	**4,77**	0,499999
2,78	0,4973	**3,28**	0,4995	**3,78**	0,4999	**4,28**	0,49999	**4,78**	0,499999
2,79	0,49735	**3,29**	0,4995	**3,79**	0,4999	**4,29**	0,49999	**4,79**	0,499999
2,8	0,49745	**3,3**	0,4995	**3,8**	0,49995	**4,3**	0,49999	**4,8**	0,499999
2,81	0,4975	**3,31**	0,49955	**3,81**	0,49995	**4,31**	0,49999	**4,81**	0,499999
2,82	0,4976	**3,32**	0,49955	**3,82**	0,49995	**4,32**	0,49999	**4,82**	0,4999995
2,83	0,49765	**3,33**	0,49955	**3,83**	0,49995	**4,33**	0,499995	**4,83**	0,4999995
2,84	0,49775	**3,34**	0,4996	**3,84**	0,49995	**4,34**	0,499995	**4,84**	0,4999995
2,85	0,4978	**3,35**	0,4996	**3,85**	0,49995	**4,35**	0,499995	**4,85**	0,4999995
2,86	0,4979	**3,36**	0,4996	**3,86**	0,49995	**4,36**	0,499995	**4,86**	0,4999995
2,87	0,49795	**3,37**	0,4996	**3,87**	0,49995	**4,37**	0,499995	**4,87**	0,4999995
2,88	0,498	**3,38**	0,49965	**3,88**	0,49995	**4,38**	0,499995	**4,88**	0,4999995
2,89	0,49805	**3,39**	0,49965	**3,89**	0,49995	**4,39**	0,499995	**4,89**	0,4999995
2,9	0,49815	**3,4**	0,49965	**3,9**	0,49995	**4,4**	0,499995	**4,9**	0,4999995
2,91	0,4982	**3,41**	0,4997	**3,91**	0,49995	**4,41**	0,499995	**4,91**	0,4999995
2,92	0,49825	**3,42**	0,4997	**3,92**	0,49995	**4,42**	0,499995	**4,92**	0,4999995
2,93	0,4983	**3,43**	0,4997	**3,93**	0,49995	**4,43**	0,499995	**4,93**	0,4999995
2,94	0,49835	**3,44**	0,4997	**3,94**	0,49995	**4,44**	0,499995	**4,94**	0,4999995
2,95	0,4984	**3,45**	0,4997	**3,95**	0,49995	**4,45**	0,499995	**4,95**	0,4999995
2,96	0,49845	**3,46**	0,49975	**3,96**	0,49995	**4,46**	0,499995	**4,96**	0,4999995
2,97	0,4985	**3,47**	0,49975	**3,97**	0,49995	**4,47**	0,499995	**4,97**	0,4999995
2,98	0,49855	**3,48**	0,49975	**3,98**	0,49995	**4,48**	0,499995	**4,98**	0,4999995
2,99	0,4986	**3,49**	0,49975	**3,99**	0,49995	**4,49**	0,499995	**4,99**	0,4999995
								5	0,4999995

Значення функції $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ Таблиця 3

k \ λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000