

МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
Харківський національний університет внутрішніх справ

Факультет № 4

Кафедра інформаційних технологій

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з дисципліни «Математика для економістів (Вища математика)»

**за темою «Похідна функції однієї змінної, її практичний зміст і
правила диференціювання»**

Галузь знань	07 Управління та адміністрування
Спеціальність	072 – Фінанси, банківська справа та страхування
Ступінь вищої освіти	бакалавр

м. Харків
2018 р.

Передмова

Тексти лекцій з навчальної дисципліни «Математика для економістів (Вища математика)» для студентів за спеціальністю 072 – Фінанси, банківська справа та страхування

СХВАЛЕНО

Науково-методичною радою ХНУВС

_____ Протокол № _____
(дата, місяць, рік)

ЗАТВЕРДЖЕНО

Вченою радою факультету №6
ХНУВС

_____ Протокол № _____
(дата, місяць, рік)

_____ (підпис)

_____ (П.І.Б.)

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін

_____ Протокол № _____
(дата, місяць, рік)

_____ (підпис)

_____ (П.І.Б.)

ЗАТВЕРДЖЕНО

На засіданні кафедри інформаційних
технологій та захисту інформації

_____ Протокол № _____
(дата, місяць, рік)

_____ (підпис)

_____ (П.І.Б.)

Рецензент:

Яськов Г.М., кандидат технічних наук, доцент, науковий співробітник відділу математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Розробник: Шеховцов С.Б. - Харків, Харківський національний університет внутрішніх справ, 2018

© Шеховцов С.Б., 2018

© Харківський національний університет внутрішніх справ

План лекції

1. Производная функции
2. Задачи, приводящиеся к понятию производной
3. Определение производной
4. Правила дифференцирования
5. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций
6. Логарифмическое дифференцирование

Література:

Основна:

1. Вища математика: підручник / Малярець Л.М., Афанасьєва Л.М., Денисова Т.В. та ін. – Харків : ХНЕУ, 2012. – 772 с.
2. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.М.Малярець, Л.М.Афанасьєва, А.В.Игначкова.– Х.Вид ХНЭУ, 2012-136 с.
3. Щипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2002. – 326 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -М.: Высшая школа, 2000. Ч.1 - 304 с; Ч.2 – 360 с.
5. Конспект лекцій

Додаткова:

1. Кремер Н.Ш. Математика в экономике. М.: Финстатинформ, 1999. – 470 с.
2. Тевяшев А.Д, Литвин О.І. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – К.: Кондор, 2006.- 588с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. / Под общ. ред. А.П. Рябушко.– Минск: Выш. шк., 1991.–352 с.

3. Производная функции

§ 3.1. Задачи, приводящиеся к понятию производной

1. **Задача о касательной.** Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y = f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Прежде всего необходимо выяснить, что мы будем понимать под касательной к кривой. Касательную нельзя определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. В самом деле, прямая (1) на рис.1а имеет одну общую точку с кривой (2), но не является касательной к ней.

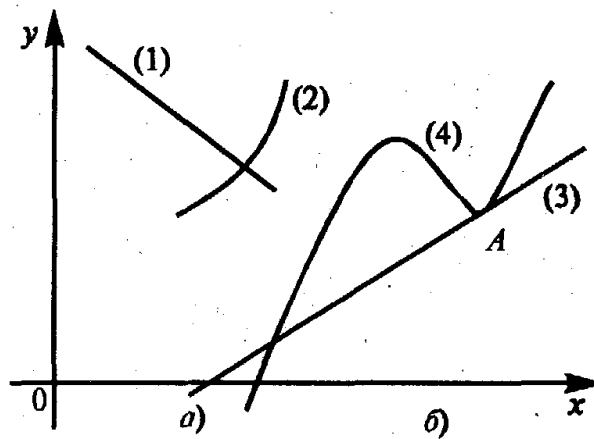


Рис.1

А прямая (3) на рис.1б, хотя имеет две общие точки с кривой (4), очевидно, касается ее в точке А. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0, f(x_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1 (рис.2)

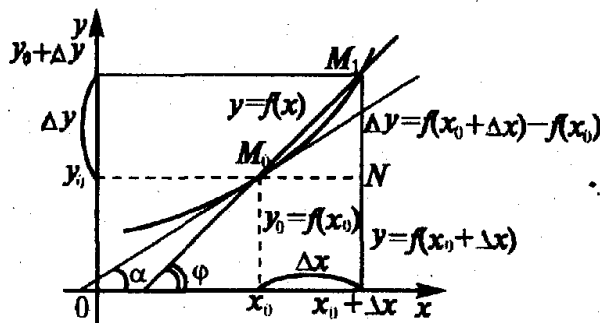


Рис.2

Под касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 естественно понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0 , т.е. при $\Delta x \rightarrow 0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 , имеет вид

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент (или тангенс угла φ наклона) секущей $k_{M_1M_0}$ может быть найден из треугольника ΔM_0M_1N : $k_{M_1M_0} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис 2). Тогда угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (1)

2. Задача о скорости движения. Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s – пройденный путь, t – время, и необходимо найти скорость точки в момент времени t_0 .

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту $(t_0 + \Delta t)$ - путь $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Чем меньше Δt , тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t_0 . Поэтому под скоростью точки в момент t_0 естественно понимать предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \rightarrow 0$, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2)$$

К нахождению пределов (1),(2) приводят решения и множества других задач. Можно показать, что:

- если $Q = Q(t)$ - количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t , то сила тока в момент времени t равна

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}; \quad (3)$$

- если $N = N(t)$ - количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t , то скорость химической реакции в момент времени t равна

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}; \quad (4)$$

- если $m = m(x)$ - масса неоднородного стержня между точками $O(0;0)$ и $M(x;0)$, то линейная плотность стержня в точке x есть

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \quad (5)$$

Пределы (1)-(5) имеют одинаковый вид; везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел называют производной.

§ 3.2. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке (a,b) . Предположим, что для каждого значения x из этого промежутка функция $f(x)$ имеет определенное значение.

Пусть аргумент x получил некоторое (положительное или отрицательное) приращение Δx . Подставив значение аргумента $x + \Delta x$ в функцию, получим новое значение функции $f(x + \Delta x)$.

Найдем приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функции y . Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

которое определяет среднюю скорость изменения функции при изменении аргумента на одну единицу.

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $f(x)$ обозначают через $f'(x)$. Таким образом, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Наряду с обозначением $f'(x)$ производная функции может также обозначаться символами f'_x , y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$.

Пример. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение.

1. Аргументу x даем приращение Δx .
2. Находим Δy : $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;
3. Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
4. Находим предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

Геометрически производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0 , т.е. равна тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ox .

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t , т.е. $V = S'(t)$. В этом заключается *механический смысл производной*.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл производной*.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием* функции. Если функция $f(x)$ при данном значении $x = x_0$ имеет производную, то говорят, что функция дифференцируема в точке x_0 . Функция, дифференцируемая во всех точках интервала (a,b) называется *дифференцируемой на интервале (a,b)* .

Замечание. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 , то в этой точке она непрерывна.

Таким образом, в точках разрыва функция не может иметь производной. Обратное утверждение выполняется не всегда, т.е. из того, что в какой-либо точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема: функция $f(x)$ может и не иметь производной в точке x_0 .

§ 3.3. Правила дифференцирования

Вычисление производной функции непосредственно по определению приводит к громоздким преобразованиям, связанными с предельным переходом. Однако существует ряд приемов, позволяющих находить производные элементарных функций по формальным правилам, не требующим нахождения пределов.

Пусть C – постоянная величина, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, дифференцируемые на некотором множестве. Сформулируем основные ***правила дифференцирования***:

1. *Производная постоянной величины равна нулю*

$$C' = 0.$$

2. *Производная аргумента x равна единице*

$$x' = 1.$$

3. *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. *Производная произведения равна произведению производной первого сомножителя на второй, плюс произведение производной второго сомножителя на первый*

$$(u v)' = u' v + v' u.$$

5. *Производная дроби равна производной числителя, умноженной на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, и все это деленное на квадрат знаменателя*

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

6. Пусть $y=f(u)$, $u=u(x)$, т.е. $y=f(u(x))$, где функции $y=f(x)$ и $u(x)$ имеют производные. Тогда производная сложной функции определяется по правилу

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приведем **основные формулы производных** элементарных функций

$$1. (x^m)' = mx^{m-1}.$$

$$9. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$2. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$4. (e^x)' = e^x.$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$8. (\sin x)' = \cos x.$$

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций, строго соблюдать эти правила при вычислении производной.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

Решение:

$$y' = (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^3)' + (2x)' - (1)' = 4x^3 - 9x^2 + 2$$

Пример 2. Найти производную функции $y = x \cdot e^x$.

$$\text{Решение: } (x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x(e^x)' = e^x + x \cdot e^x;$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

$$y' = \left(\frac{2x^3}{\operatorname{tg} x} \right)' = 2 \cdot \left(\frac{x^3}{\operatorname{tg} x} \right)' = 2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot (\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg}^2 x)}$$

Пример 4. Найти производную функции $y = 3 \ln x$.

Решение: $(3 \ln x)' = 3 \cdot (\ln x)' = 3 \cdot \frac{1}{x}$

Пример 5. Найти производную функции $y = \sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x} \right)' &= \left[\left(e^{2x} + \cos^2 x \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} + \cos^2 x \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{2x} + \cos^2 x \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} + \cos^2 x \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{2x} (2x)' + 2 \cos x (-\sin x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}} \cdot (e^{2x} \cdot 2x - 2 \cos x \sin x). \end{aligned}$$

Определение. Производной второго порядка (второй производной) функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной.

Вторая производная обозначается так: y'' , или $f''(x)$, или $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Аналогично производной третьего порядка функции $y=f(x)$ называется производная от производной второго порядка: $y'''=(y'')'$.

Вообще производной n -го порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т.д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Пример 6. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^5 - 7x^3 + 2$.

Решение.

$$y' = (x^5 - 7x^3 + 2)' = 5x^4 - 21x^2;$$

$$y'' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x;$$

$$y''' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42.$$

Пример 7. Найти производные до n -го порядка включительно от функции $y = \ln x$.

Решение. $y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$

$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$ и т.д.

Очевидно, что производная n -го порядка $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$.

§ 3.4. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x .

а) продифференцируем по x обе части уравнения $F(x, y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y' ;

б) из полученного уравнения выразим y' .

Пример 8. Найти производную функции $x^2 + y^2 = 4$.

Решение.

а) $2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 0;$

$2x + 2y \cdot y' = 0;$

$x + y \cdot y' = 0$

б) $y' = -\frac{x}{y}.$

Плоские кривые часто задаются уравнениями вида $x = x(t), y = y(t)$, где переменная t , называемая параметром, пробегает некоторый промежуток значений T . Чтобы построить кривую, заданную параметрически, нужно задать ряд значений параметра t по формулам $x = x(t), y = y(t)$, вычислить соответствующие значения x и y , отметить полученные точки (x, y) на координатной плоскости и соединить их плавной линией. Из курса геометрии известны параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и эллипса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, которые соответственно имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$,

тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 9. Пусть функция задана параметрически $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$.

Найти производную функции.

Решение.
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2.$$

§ 3.5. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

Пример 10. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Функцию $y = x^x$ нельзя назвать степенной x^n , поскольку показателем степени является не число n , а переменная x . Не является она и показательной a^x , поскольку основанием степени является не число a , а переменная x . Вместе с тем функция $y = x^x$ напоминает и степенную, и показательную. Поэтому ее называют *степенно-показательной функцией*.

Для дифференцирования этой функции нельзя непосредственно применить формулы дифференцирования степенной или показательной функции. Мы выполним следующие действия:

а) логарифмируем обе части уравнения $\ln y = \ln x^x = x \ln x$;

б) дифференцируем обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = x' \ln x + x (\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1. \text{ Откуда } y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Производная произвольной степенно-показательной функции
 $y = u^v$ вычисляется по формуле:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \quad (1)$$

Сформулируем правило запоминания формулы (1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример 11. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение. Пользуясь формулой (1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2+1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2.$$