

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

Кафедра інформаційних технологій факультету №4

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни Фізика обов'язкової компоненти
освітньої програми першого рівня вищої освіти

125 Кібербезпека (безпека інформаційних та комунікаційних систем)

за темою – (Механічні коливання)

Харків 2018

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від _____ № _____

СХВАЛЕНО

Вченою радою факультету № 4
Протокол від _____ № _____

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від _____ № _____

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій
протокол від _____ № _____

Розробники:

1. доцент кафедри, кандидат технічних наук Світличний В.А.

Рецензенти:

1. доцент кафедри кібербезпеки факультету №4 ХНУВС, к.т.н., доцент Носов В.В.,
2. професор кафедри проектування та експлуатації електронних апаратів ХНУРЕ, к.т.н., доцент Хорошайло Ю.Є.

План лекції

1. Вступ.
2. Гармонічні коливання. Кінематичні, динамічні та енергетичні характеристики коливального руху. Маятники: пружинний, фізичний, математичний. Вільні та вимушені коливання. Резонанс. Додавання коливань.
3. Висновки.

Основна література

1. Трофимова Т.И. Курс физики – М.: "Высшая школа", 1999.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика – М.: Высшая школа, 1979, 520 с.
3. Бланк А.Я. Физика. – Харьков, "Каравелла", 1996.
4. Лопатинський Є.І., Зачек І.Р., Ільчук Г.А., Романишин Б.М. Фізика. Підручник. – Львів: Афіша, 2005. 394 с.

Додаткова література

1. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики \в 3-х томах\ - Киев, "Дніпро", 1994.
2. Савельев И.В. Курс физики \в 3-х томах\ - М: Наука, 1989.
3. Айзензон А.Е. Курс физики – Москва, "Высшая школа", 1996.
4. Детлаф А.А., Яворський В.М. Курс общей физики \ в 3-х томах\ – М.: Высшая школа, 1983.
5. Богацька І.Г., Головка Д.Б., Маляренко А.А., Ментковський Ю. Л., Загальні основи фізики \ у двох книгах\ – К: Либідь, 1998.

Текст лекції

1. Вступ.

Коливальні процеси є поширеними в природі, вони не менш широко застосовуються нами і в техніці. Коливальні процеси відрізняються певною мірою повторюваності в часі, наприклад: коливання маятника годинника, або маси на пружинці, частинок води під час хвилі на поверхні, заряду на обкладинках конденсатора, змінний електричний струм, напруженість електричного та магнітного поля в електромагнітній хвилі, світло, звук, температура – все це коливання різних фізичних величин. Коливання можуть бути шкідливими. При русі маятника коливається його центр ваги. У випадку змінного струму коливаються напруга і сила струму у колі. Ці обидва процеси якісно повністю відрізняються за своєю фізичною природою. Однак кількісні закономірності цих процесів мають між собою багато спільного. Тому в залежності від фізичної природи повторюваних процесів відрізняють такі **типи коливань: механічні, електромагнітні, електромеханічні** тощо. Почнемо з розгляду механічних коливань, зокрема коливань матеріальної точки.

В залежності від характеру дії на коливальну систему відрізняють: **вільні (власні), вимушені, автоколивання та параметричні коливання.**

2. Гармонічні коливання. Кінематичні, динамічні та енергетичні характеристики коливального руху. Маятники: пружинний, фізичний, математичний. Вільні та вимушені коливання. Резонанс. Додавання коливань.

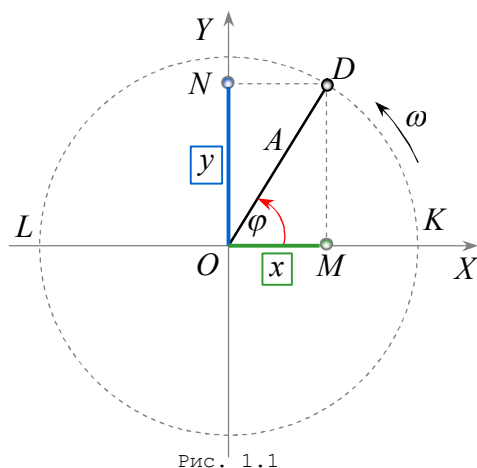
1.1. Гармонічні коливання.

Періодичним є процес, в якому фізична величина $x(t)$ приймає однакові значення через рівні інтервали часу T , які називають періодом коливань.

Отже, **період коливань T** - інтервал часу, за який здійснюється одне повне коливання: $x(t + T) = x(t)$

Для вивчення коливань, як і будь-якого іншого фізичного явища, необхідно попередньо змоделювати процес. Однією з найпростіших моделей є коливання матеріальної точки D (зверніть увагу, досліджуються коливання точки, а не об'ємного тіла), яка рівномірно обертається по колу радіуса A . Напрямок обертання оберемо проти годинникової стрілки. Нехай точка D обертається з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 1.1.). Рух точки D по колу буде описуватися рівнянням:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (7.1)$$



де φ - кут повороту рухомого радіуса OD відносно нерухомого OK , φ_0 - початкове значення кута φ в момент часу $t=0$.

По мірі того як точка D буде обертатися по колу, проекція точки D на горизонтальну вісь X (точка M) буде рухатися вздовж осі X від K до L і навпаки, тобто буде здійснювати коливальний рух. Якщо ми позначимо відстань OM цієї точки від центра O через x , тоді рух точки M по осі X можна описувати таким рівнянням:

$$x = A \cos \varphi = A \cos (\varphi_0 + \omega t) \quad (1.2)$$

Вибір початкового моменту відліку часу є довільним (тобто обирається нами самими). Ми можемо вибрати цей момент так, щоб $\varphi_0 = 0$. При цьому рівняння коливання (1.2) набуває вигляду:

$$x = A \cos \varphi = A \cos (\omega t) \quad (1.3)$$

В подальшому на підставі того, що доданок φ_0 в аргументі косинуса (1.2) не змінює характеру руху, тобто означає зміну початкового моменту відліку часу, ми його без потреби враховувати не будемо. З курсу шкільної тригонометрії вам відомо, що функція $\cos(\omega t)$ є простою періодичною функцією. З іншого боку, точка D за час одного повного оберту T повернеться на кут 2π . Зміна часу на період T відповідає зміні фази на 2π . Тобто:

$$\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega t + \omega T) = \cos(\omega t + 2\pi) \quad (1.4)$$

Відповідно, для зв'язку періоду, ω та 2π маємо:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.5)$$

В теорії коливальних величину, яка стоїть у знаменнику (1.5) називають **круговою** або **циклічною частотою** ω_0 кількість коливань за 2π секунд. Одиницею вимірювання циклічної частоти в СІ є радіан за секунду (рад/с). Як відомо період T та **лінійна частота** ν (кількістю коливань за одиницю часу, вимірюється в герцах (Гц)) пов'язані між собою співвідношенням:

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (1.6)$$

$$\text{отже: } \omega_0 = 2\pi \nu \quad (1.7)$$

Точка M на рис. 1.1 здійснює саме періодичні коливання. Отже, **найпростіше періодичне коливання, при якому зміщення x змінюється з часом за законом косинуса (або синуса), називатимемо гармонічним коливанням**. Така модель коливання дуже важлива, тому що коливання в природі і техніці часто мають характер дуже близький до гармонічних, а також періодичні процеси іншої форми (з іншою залежністю від часу) можуть бути представлені як накладання декількох гармонічних коливань. З рис. 1.1 ви також можете побачити, що вздовж вертикальної осі Y проекція точки D на цю вісь (точка N) також буде здійснювати гармонічне коливання за законом:

$$y = A \sin \varphi = A \sin (\omega_0 t) = A \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.8)$$

Отже, гармонічний коливальний рух буде здійснювати проекція точки D на будь-яку вісь, яка проходить через O . На рис. 1.2 наведено графік залежності y від t за рівнянням (1.8).

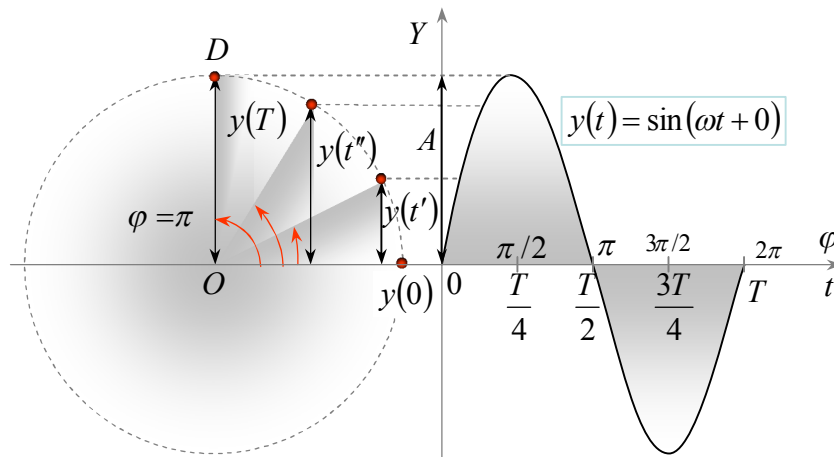


Рис. 1.2.

Оскільки функція $\sin \varphi$ змінюється в межах від $+1$ до -1 , то зміщення y точки від центру коливань O відбувається в межах:

$$-A \leq y \leq +A \quad (1.9)$$

Порівнюючи (1.3) та (1.8) бачимо, що коливання точки N (вздовж вертикальної осі Y) відстає за фазою від коливань точки M на $\pi/2$ (тобто на чверть періоду $T/4$).

Максимальна величина зміщення точки від положення рівноваги називається амплітудою коливань A - це постійна додатна величина. Косинус (синус) функції $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t$ визначає долю зміщення x (або y) від максимального відхилення, його ми називатимемо **фазою** коливань. Величина φ_0 є відповідно **початковою фазою** коливання.

При гармонійному коливному русі зміщення точки (наприклад M) змінюється з часом за законом (1.3). Диференціюванням цього виразу по часу t ми можемо знайти **швидкість** руху точки в будь-який момент часу:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.10)$$

Подальше диференціювання (1.10) по часу t дає можливість знайти **прискорення** точки в будь-який момент часу:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos (\omega_0 t + \pi) \quad (1.11)$$

З (1.10) та (1.11) випливає, що амплітуди швидкості і прискорення дорівнюють:

$$v_0 = \omega_0 A, \quad a_0 = \omega_0^2 A \quad (1.12)$$

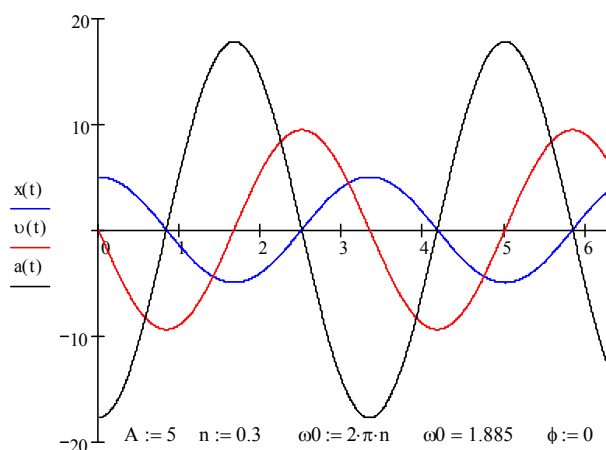


Рис. 1.3

$$\begin{aligned} x(t) &:= A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \\ v(t) &:= -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \\ a(t) &:= -\omega_0^2 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Залежності відхилення осцилятора, його швидкості та прискорення від фази також періодичні в часі з тим самим періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Коливання

швидкості випереджають коливання зміщення по фазі на $\pi/2$, а коливання прискорення випереджають на π . (рис.1.3)

1.2. Кінематичні, динамічні та енергетичні характеристики коливального руху

З'ясуємо характер сил, які є причиною гармонічних коливань. Розглянемо механічну систему, положення якої умовно задамо однією величиною, наприклад x . Наша система в такому випадку має лише одну ступінь свободи. В величиною x , яка визначає положення системи, може бути кут, відрахований від деякої площини, або відстань, відрахована вздовж заданої кривої лінії. В такому випадку потенціальна енергія системи буде функцією однієї змінної x :

$$U=U(x) \quad (1.13)$$

Припустимо, що система має положення стійкої рівноваги. В такому положенні функція $U(x)$ має мінімум. В подальшому для спрощення задачі координату x та потенціальну енергію U будемо відраховувати від положення рівноваги, тоді:

$$U(0)=0 \quad (1.14)$$

Розкладемо функцію $U(x)$ в ряд по ступеням x , при цьому обмежимося розглядом малих коливань, для того, щоб вищими ступенями x можна було б знехтувати. За формулою **Маклорена**:

$$U(x)=U(0)+U'(0)x+\frac{1}{2}U''(0)x^2 \quad (1.15)$$

(з причин малості x рештою членів в (4.1.15) ми знехтували). Оскільки $U(x)$ при $x=0$ має мінімум, то $U'(0)$ буде дорівнювати нулю, а $U''(0)$ – буде позитивною. Введемо позначення: $U''(0)=k$ ($k > 0$), тоді:

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2 \quad (1.15a)$$

Вираз (1.15a) ідентичний виразу для потенційної енергії деформованої пружини. Отже, сила, яка діє на систему також виглядатиме як пружна сила:

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-kx \quad (1.16)$$

Ця формула дає проекцію сили на вісь X . В подальшому індекс x в позначення сили будемо опускати:

$$F=-kx \quad (1.17)$$

Вираз (1.17) тотожний виразу для пружної сили деформованої пружини. Тому сили вигляду (1.17), незалежно від їх природи називають **квазіпружними**. Сила (1.17) завжди напрямлена до положення рівноваги. Модуль сили пропорційний величині відхилення системи від положення рівноваги.

В якості прикладу розглянемо систему з кульки масою m , підвішеної на пружинці, масою якої можна знехтувати у порівнянні із m (рис. 1.4). В положенні рівноваги сила тяжіння mg врівноважується пружною силою $k \Delta l_0$ (Δl_0 - подовження пружини):

$$mg=k \Delta l_0 \quad (1.18)$$

Зміщення кульки від положення рівноваги характеризуватиме координатою x , вісь X спрямуємо по вертикалі вниз, а нуль осі розмістимо в положенні рівноваги кульки. Якщо відхилити кульку в положення із координатою x , то подовження пружини стане Δl_0+x і проекція результуючої сили на вісь X прийме значення:

$$F=mg-k(\Delta l_0+x) \quad (1.19)$$

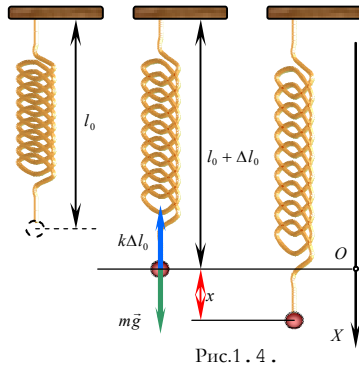


Рис.1.4.

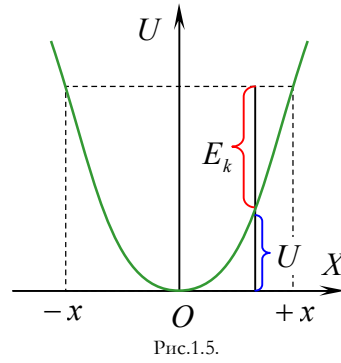


Рис.1.5.

З урахуванням (1.18) отримаємо вираз абсолютно такий самий як (1.17). Отже, результуюча сила тяжіння має характер квазіпружної сили. Якщо ж змістити кульку від положення рівноваги на деяку відстань A , потім відпустити її, то під дією квазіпружної сили кулька буде рухатися до положення рівноваги із зростаючою швидкістю. При цьому потенціальна енергія системи буде зменшуватися (рис. 1.5), але з'явиться зростаюча кінетична енергія. Дійшовши положення рівноваги кулька за інерцією буде рухатися далі. Цей рух буде сповільненим і припиниться тоді, коли кінетична енергія повністю перетвориться в потенціальну. Далі такий самий процес буде відбуватися при русі кульки у зворотному напрямі. Якщо тертя в системі відсутнє, енергія системи повинна зберігатися і кулька буде здійснювати рух між положеннями максимального відхилення необмежено довго.

Коливання, що відбуваються в ізоляованій системі (після поштовху, або якщо вона була відхилена від положення рівноваги), називатимемо вільними або власними коливаннями.

Відповідно до другого закону Ньютона кулька рухається із прискоренням під дією сили, модуль якої дорівнюватиме:

$$F = m a, \text{ або } F = m \ddot{x} \quad (1.20)$$

Причиною такого руху кульки є квазіпружна сила (4.1.17), тоді:

$$m \ddot{x} = -k x \quad (1.21)$$

Якщо в рівності (4.1.21) ввести додаткове позначення:

$$\omega_0^2 = k / m \quad (1.22)$$

то рівняння (4.1.21) перепишемо у наступному вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.23)$$

(дві точки над фізичною величиною означають другу похідну від цієї величини по часу). Отже, розв'язок рівняння (1.23), яке описує коливання, дасть змогу визначити зміщення точки від положення рівноваги в будь-який момент часу.

Як вам вже відомо, кожне коливання характеризується певним значенням амплітуди A та початкової фази φ_0 , значення яких для даного коливання можна визначити з так званих **початкових умов**, тобто за значеннями відхилення x_0 та швидкості v_0 в початковий момент часу. Для цього в рівняннях (1.2) та (1.10) необхідно покласти, що $t=0$, отримаємо:

$$x_0 = A \cos \varphi_0 \quad (1.24)$$

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0 \quad (1.25)$$

з яких отримаємо далі:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2} \quad (1.26)$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} \quad (1.27)$$

Рівняння (1.27) задовольняє двом значенням φ_0 в інтервалі: $-\pi < \varphi_0 < +\pi$. З цих двох значень беруться ті, при яких отримуються правильні знаки у косинуса та синуса.

Квазіпружна сила є консервативною. Тому повна енергія гармонічного коливання повинна залишатися постійною. В процесі коливань відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки, причому в моменти найбільшого відхилення від положення рівноваги повна енергія E дорівнює потенціальній енергії, яка сягає свого максимального значення U_{\max} :

$$E = U_{\max} = \frac{kA^2}{2} \quad (1.28)$$

При проходженні системи положення рівноваги повна енергія складається лише з кінетичної енергії, яка в цей момент сягає свого найбільшого значення $E_{k \max}$:

$$E = E_{k \max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \quad (1.29)$$

Зміна кінетичної енергії з часом описується виразом:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\varphi_0 + \omega_0 t) \quad (1.30)$$

Зміна потенціальної енергії з часом відповідно:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\varphi_0 + \omega_0 t) \quad (1.31)$$

Повна енергія дорівнюватиме:

$$E = E_k + U = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \quad (1.32)$$

Використавши відомі формули тригонометрії для E_k і U :

$$E_k = E \sin^2(\varphi_0 + \omega_0 t) = \frac{E}{2} [1 - \cos 2(\varphi_0 + \omega_0 t)] \quad (1.33)$$

$$U = E \cos^2(\varphi_0 + \omega_0 t) = \frac{E}{2} [1 + \cos 2(\varphi_0 + \omega_0 t)] \quad (1.34)$$

де E - повна енергія системи. З формул (1.33) та (1.34) видно, що E_k і U змінюються з частотою $2\omega_0$, тобто з частотою, яка в 2 рази перевищує частоту самого гармонічного коливання.

2.3. Маятники: фізичний, математичний

Систему, яка описується рівнянням (1.23) називають гармонічним осцилятором – це будь-яка система, яка здійснює гармонічні коливання біля положення рівноваги. Простішими прикладами (моделями) гармонічних коливань під дією квазіупругих сил є коливання математичного і фізичного маятників при малих кутових відхиленнях від положення рівноваги. Взагалі під **маятником** розуміють тверде тіло, яке здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо нерухомої точки або вісі.

Математичним маятником називають ідеалізовану систему з невагомої нерозтяжної нитці, на якій підвищено масу, зосереджену у одній точці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння. Прикладом такої коливальної системи (математичного маятника) може бути досить вагома кулька, підвішена на довгій нитці. Прикладом може бути маятник стінних годинників: вагомий вантаж, укріплений на довгому тонкому стрижні, який укріплено шарнірно на горизонтальній вісі. Найбільш відомим з таких маятників є маятник Фуко (рис. 1.6), підвішений під куполом одного з паризьких соборів. Копії такого маятника є також в Санкт-Петербурзі і деяких українських церквах.

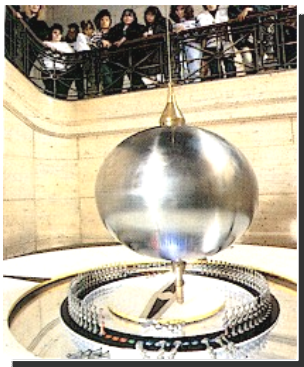


Рис.7.6

Відхилимо маятник від положення рівноваги на деякий кут φ (кут між ниткою та вертикаллю). Систему координат (вісі X та Y , та початок відліку – точку M) пов'яжемо з центром ваги вантажу. При цьому на маятник діє дві сили: вага \vec{P} , яка дорівнюватиме силі тяжіння $m\vec{g}$ (коливальну систему математичного маятника розглядатимемо в полі сил тяжіння Землі) та сила реакції нитки \vec{T} , остання врівноважується складовою \vec{N} сили тяжіння вантажу (інакше вантаж просто відірветься). Сила \vec{F} – результуюча дії двох сил (складова сили тяжіння) є так званою **повертаючою силою**, причому вона не врівноважується ніякою іншою силою. Оберемо напрямок координатних осей так як показано на рисунку 8: вісь X спрямуємо вздовж результуючої \vec{F} . Коли вантаж сягне положення рівноваги (точка O) сили $m\vec{g}$ та \vec{T} зрівноважаться. Відрізок дуги OM , який пройде вантаж до положення рівноваги позначимо через x . Будемо вважати кут φ (а отже й величину x) додатним при відхиленні вантажу вправо від вертикалі (як в математиці – проти годинникової стрілки) і від'ємними – при відхиленні вліво (за годинниковою стрілкою). Кут φ , який вимірюється в радіанах, чисельно дорівнює відношенню довжини дуги x , на яку він спирається, до радіуса кола l . Тоді (з врахуванням напрямку) сила F , що діє на точку M , дорівнює:

$$F = mg \sin(-\varphi) = -mg \sin \frac{x}{l} \quad (1.35)$$

Ми обмежимося розгляданням малих кутів відхилення від вертикалі, тобто таких, що не перевищують $5-6^\circ$. Отже, при кутах $\varphi < 0.1$ рад можна замінити $\sin \varphi$ на φ (у радіанах):

$$F \approx -\frac{mg}{l} x \quad (1.36)$$

Порівняємо 1.36) із (1.17), бачимо, що результуюча сила F , яка діє на математичний маятник в полі земного тяжіння є квазіпружною силою із коефіцієнтом:

$$k = \frac{mg}{l} \quad (1.37)$$

Математичний маятник здійснює гармонічні коливання за законом (1.8) із періодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.38)$$

Амплітуда коливань A та початкова фаза φ_0 залежатиме від початкового зміщення і початкової швидкості точки M . Отже, **період малих коливань математичного маятника:**

- **не залежить від його маси.**
- **не залежить від амплітуди (ізохронність маятника).**
- **прямо пропорційний квадратному кореню з довжини маятника і обернено пропорційний квадратному кореню з прискорення вільного падіння g .**

Математичний маятник можна використати для вимірювання прискорення вільного падіння (в чому ви самі можете переконатися під час виконання лабораторного практикуму). З переміщенням від екватора до полюсів на поверхні Землі вага тіла, а й відповідно, прискорення вільного падіння збільшуються. Крім того, земна кора в різних місцях має неоднаковий склад, тому в місцях, де кора має більшу густину, прискорення вільного падіння збільшується.

Фізичний маятник. Якщо тіло, що коливається не можна представити як матеріальну точку (тобто не можливо вважати, що центр ваги маятника співпадає з центром ваги прикріпленого вантажу), то таку осцилюючу систему називатимемо **фізичним маятником**: тверде тіло довільної форми, яке коливається навколо горизонтальної осі (рис. 1.7). При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертальний момент M , який намагається повернути маятник в положення рівноваги:

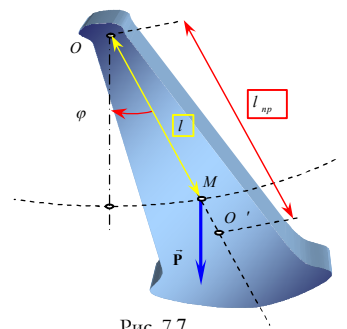


Рис. 7.7

$$M = F l \sin (-\varphi) = -mg l \sin \varphi \quad (1.39)$$

(знак мінус так само пояснюється як у випадку математичного маятника). З іншого боку цей момент надає тілу кутове прискорення $\ddot{\varphi}$:

$$M = J \ddot{\varphi} \quad (1.40)$$

де J - момент інерції тіла. У випадку малих коливань:

$$J \ddot{\varphi} = -mg l \varphi \quad (1.41)$$

За аналогією із (1.23) отримаємо:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (1.42)$$

де через ω_0^2 позначена наступна величина:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J} \quad (1.43)$$

Отже, при малих відхиленнях від положення рівноваги фізичний маятник здійснює гармонічні коливання, частота яких залежить від:

- маси маятника,
- його моменту інерції відносно осі обертання,
- відстані між віссю обертання і центром мас маятника.

Відповідно, період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (1.44)$$

Фізичний маятник також має властивість ізохронності, тобто його період коливань не залежить від амплітуди. Завдяки цій властивості він став важливою складовою частиною маятника. Формулу періоду коливань фізичного маятника використовують також і для визначення моменту інерції твердого тіла. Взагалі то, фізичний маятник можна розглядати як сукупність багатьох маятників різної довжини. Оскільки вони жорстко зв'язані, то короткі маятники спонукають фізичний маятник до частіших коливань, а довгі – до повільніших.

Якщо ми прирівняємо (1.38) та (1.44), тобто періоди коливань математичного і фізичного маятників, то отримаємо:

$$l_{np} = \frac{J}{ml} \quad (1.45)$$

де l_{np} - так звана **приведена довжина фізичного маятника**: довжина такого математичного маятника, період коливань якого співпадає з періодом коливань даного фізичного. Точка на прямій (точка O' на рис. 1.7), що з'єднує точку підвісу із центром мас і лежить на відстані приведеної довжини від осі обертання має назву **центру кочення фізичного маятника**. При підвішенні маятника в центрі кочення O' приведена довжина, а, відповідно, і період коливань будуть такими самими, як при підвішенні маятника в точці O . Відповідно, точка підвісу і центр кочення мають **властивість взаємності**: при переносі точки підвісу в центр кочення – попередня точка підвісу стає новим центром кочення, тобто ці точки - **спряжені**. Ця властивість використовується для визначення прискорення вільного падіння за допомогою так званого **зворотного маятника**.

Затухаючі коливання. Автоколивання

Гармонічні коливання відбуваються без втрат енергії, тобто як завгодно довго. Проте, в реальних коливальних системах завжди є зовнішній опір, отже, певні втрати енергії на його подолання (на роботу проти сил опору), все ж таки є. Тому реальні осцилятори здійснюють **затухаючі** в часі коливання. Причинами затухання коливань можуть бути сили тертя в точці, де підвішене тіло, сила опору середовища, передавання коливань іншим тілам, теплові ефекти в деформаціях пружини.

У відсутності сил тертя рух під дією квазіупругої сили описується диференціальним рівнянням (1.23). Розглянемо найпростіший випадок: розглянемо проекцію сили опору на один напрямок (вісь X), а також вважаємо, що сила опору пропорційна величині швидкості, що можливо тільки при умові, що швидкість руху тіла незначна:

$$F_T = -r \dot{x} \quad (1.46)$$

де r - постійна, так званий **коефіцієнт опору**. Знак „мінус” обумовлений тим, що сила \vec{F}_T та швидкість \vec{v} мають протилежні напрямки, відповідно і їх проекції на вісь X мають різні знаки. Рівняння другого закону Ньютона при наявності сил опору матиме такий вигляд:

$$m \ddot{x} = -k x - r \dot{x} \quad (1.47)$$

Виконавши деякі математичні перетворення і ввівши позначення:

$$2\beta = \frac{r}{m} \quad (1.48)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (1.49)$$

перепишемо рівняння (1.47) у наступному вигляді:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.50)$$

де ω_0 - **власна частота**, тобто частота, з якою відбувалися би вільні коливання системи у відсутності опору середовища (при $r=0$), нагадаємо, що k - коефіцієнт квазіупругої сили.

Рівнянням (1.50) описуватиме затухаючі коливання. Звернемо увагу на те, що коливання, які описуються рівняннями (1.23) та (1.50) є вільними (або власними коливаннями): виведена з положення рівноваги (або у випадку поштовху) замкнена система здійснюватиме коливання. Рішенням диференційного рівняння (1.50) є функція часу і має наступний вигляд (але як воно отримається, ви можете ознайомитися самостійно, за допомогою знань з вищої математики):

$$x = A_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.51)$$

де ω - величина, яка визначається за наступною формулою:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (1.52)$$

Зверніть увагу, затухаючі коливання відбуваються з частотою меншою від частоти вільних коливань: $\omega < \omega_0$, причому нерівність є тим сильнішою, чим більше коефіцієнт опору β . У відповідності із виглядом функції (1.51) рух системи можливо розглядати як гармонічне коливання частоти ω с амплітудою, яка змінюється за законом:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (1.53)$$

Початкове зміщення x_0 залежить окрім A_0 також і від початкової фази φ_0 :

$$x_0 = A_0 \cos \varphi_0 \quad (1.54)$$

Швидкість затухання коливань визначається **коефіцієнтом затухання**:

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (1.55)$$

Якщо, наприклад, визначити час τ , за який амплітуда зменшується в e разів, тобто з формули (1.53):

$\frac{A_0}{A_\tau} = e$, або $\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau}} = e$, тобто $e^{-\beta \tau} = e^{-1}$, то отримаємо зв'язок: $\beta \tau = 1$. Отже, коефіцієнт затухання є

оберненим за величиною тому проміжку часу, за який амплітуда зменшується в e разів:

$$\beta = \frac{1}{\tau} \quad (1.56)$$

Пригадаємо формулу для періоду гармонічних коливань (1.5), тоді формула для періоду затухаючих коливань з урахуванням (1.52) буде мати наступний вигляд:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (1.57)$$

З (1.57) ви самі можете зробити висновок, що при умові незначного опору середовища коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$, період коливань практично можна розрахувати за формулою (1.5). Але із зростанням коефіцієнта затухання β , період коливань також буде зростати. Період коливань стає безкінечним, коли $\beta = \omega_0$, тобто запасу енергії не вистачає навіть на одне повне коливання. Якщо ж $\beta > \omega_0$, такий рух буде **аперіодичним**, тобто виведений з положення рівноваги осцилятор повернеться в положення рівноваги так і не здійснивши хоча б одного повного коливання.

Відношення значень амплітуд, які відповідають проміжкам часу, що відрізняються на період, отримало назву **декременту затухання** і дорівнює:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad (1.58)$$

Але частіше користуються натуральним логарифмом від декременту, який називається **логарифмічним декрементом затухання**:

$$D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad (1.59)$$

Відповідно і закон затухання амплітуд можна представити у дещо зміненому вигляді:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{D}{T}t} \quad (1.60)$$

За час τ , за який амплітуда зменшується в e разів, система встигне здійснити $N_e = \frac{\tau}{T}$. Отже,

$D \frac{\tau}{T} = D N_e = 1$, звідки випливає, що логарифмічний декремент затухання D обернений за величиною до

кількості коливань N_e , які здійснить система за час τ , на протязі якого амплітуда зменшиться у e разів.

Для характеристики коливальної системи часто використовується величина, яка отримала назву **добротності**, яка дорівнює відношенню початкового запасу енергії в системі до витрат на подолання сил опору за період коливань:

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E} \quad (1.61)$$

де ΔE - зростання енергії (нагадаємо, що приріст енергії розраховується як різниця $\Delta E = E_2 - E_1$). Отже, чим більшою є добротність осцилятора, тим більше коливань він встигає здійснити до повного вичерпання енергії та зупинки. З іншого боку добротність осцилюючої системи можливо розрахувати за формулою:

$$Q = \frac{\pi}{D} = \pi N_e \quad (1.62)$$

При затухаючих коливаннях енергія системи витрачається на подолання опору середовища. Якщо ж поповнювати ці витрати, коливання стануть незатухаючими. Поповнення енергії осцилятора може відбуватися за рахунок поштовхів ззовні, при умові що поштовхи відбуваються у такт із його коливаннями. Інакше вони можуть послабити коливання, або, навіть, зовсім припинити їх. Однак, можна зробити так, щоб коливальна система сама керувала зовнішнім впливом, тим самим забезпечуючи узгодженість поштовхів із

своїми рухами. Така система має назву автоколивальної, а коливання, відповідно, **автоколиваннями**. Прикладом може бути годинниковий механізм. Отже, у відсутності сил опору, коливання системи є власними.

2.4. Вимушені коливання. Резонанс.

Уявіть собі, що на коливальну систему (осцилятор) діє зовнішня сила – **змушувальна** сила, яка до того ж сама змінюється за гармонічним законом, де F_0 - амплітуда змушувальної сили:

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (1.63)$$

За другим законом Ньютона рух такої системи описуватиметься наступним рівнянням:

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (1.64)$$

Після додаткових перетворень та введення позначення $f_0 = \frac{F_0}{m}$ (зверніть увагу, розмірність цієї величини співпадає із розмірністю прискорення, але залежить від амплітуди змушувальної сили та маси осцилятора) рівняння руху осцилятора під дією зовнішньої періодичної сили прийме наступний вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (1.65)$$

де ω_0 - власна частота системи, ω - частота змушувальної сили. Рівнянням (1.65) описуються так звані **вимушені** коливання, причому у випадку, коли змушувальна сила змінюється за гармонічним законом. Рівняння (1.65) має вигляд подібний до лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Рішення такого рівняння є складним, тому що воно є неоднорідним. Як відомо, загальне рішення такого неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального рішення відповідного однорідного рівняння та часткового рішення неоднорідного рівняння. Загальне рішення однорідного рівняння є функція виду:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0) \quad (1.66)$$

де $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, A_0 , φ_0 - довільні сталі. Часткове (тобто таке, що не містить довільних сталих) має наступний вид:

$$x = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (1.67)$$

Функція (1.66) у сумі із (1.67) дає загальне рішення рівняння (1.65), яку описує поведінку осцилятора при вимушених коливаннях. Доданок (1.66) є важливим лише на початку коливального процесу, при так званому часі **становлення коливань**. Далі з часом вплив доданку (1.66) все більше зменшується завдяки експоненціальному множнику $e^{-\beta t}$ і через певний час їм взагалі можна знехтувати, враховуючи тільки доданок (1.67).

Отже, функція (1.67) описує усталені вимушені коливання. Це гармонічні коливання із частотою, яка дорівнює частоті змушувальної сили. Амплітуда вимушених коливань пропорційна амплітуді змушувальної сили. Для певної коливальної системи (певні значення ω_0 та β) амплітуда залежить від частоти змушувальної сили: $A = A(\omega)$. Ця залежність називається **амплітудно-частотною характеристикою** осцилятора (АЧХ). АЧХ, тобто залежність амплітуди від частоти змушувальної сили, звичайно виглядає як крива з максимумом (або, навіть, із декількома максимумами, що трапляється для складних коливальних систем). Вимушені коливання відстають по фазі від змушувальної сили, причому величина відставання також залежить від частоти змушувальної сили.

Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушувальної сили приводить до того, що при певній величині частоти, характерної для даної системи, амплітуда коливань сягає максимального значення. Осцилятор достатньо чутливо відкликається на дію змушувальної сили при такій частоті. Це явище має назву **резонансу**, а частота - резонансною. Отже, при певній частоті (так званій **резонансній частоті**) зовнішньої сили вимушені коливання сягають максимально можливої амплітуди. Явище досягнення максимально можливої амплітуди вимушених коливань має назву резонансу. Резонансну частоту можна визначити за формулою (див. (1.67)):

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.68)$$

Вираз для амплітуди при резонансі має наступний вид:

$$A_{rez} = \frac{F_0 / m}{2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}} \quad (1.69)$$

З (1.69) можна зробити висновок, що у відсутності опору середовища амплітуда при резонансі обертається у безкінечність. А з (1.68) слідує, що резонансна частота при таких умовах співпадає із власною частотою осцилятора. Якщо частота змушувальної сили буде надто велика, тобто вона буде настільки швидко змінювати свій напрям, то осцилятор не встигатиме помітно зміститися від положення рівноваги.

Звернемо увагу на два факти: по-перше, резонансна частота менше власної, що чітко видно з (1.38), по-друге, чим менше β , тим сильніше змінюється із частотою амплітуда поблизу резонансу, що видно з (1.69).

Існує ще один спосіб зовнішньої дії на коливальну систему, який дозволяє збільшити коливання системи. Він полягає у тому, що в такт із коливаннями системи періодично ззовні змінюють який-небудь параметр системи (наприклад, довжину математичного маятника), завдяки чому явище отримало назву **параметричного резонансу**.

2.5. Додавання коливань

Додавання плоских коливань одного напрямку. Коливання чи хвилі, між якими різниця фаз зберігається сталою

$$\Delta\phi = \text{const}, \quad (1.70)$$

належать до **когерентних** або **самоузгоджених**.

Розглянемо додавання двох плоских когерентних коливань, що відбуваються в одній площині і описуються рівняннями

$$A_{1,2} = A_{01,02} \sin(\phi_{1,2}). \quad (1.71)$$

Суть методу *Френеля* полягає в тому, що додати між собою коливання (1.71) означає додати між собою дві векторні величини

$$\vec{A}_{1,2} = \vec{A}_{01,02} \sin(\phi_{1,2}). \quad (1.72)$$

В цій моделі модуль вектора відповідає амплітуді коливання A , а нахил вектора до горизонтальної осі – його фазі ϕ (рис.1.8,а).

Оскільки гармонічні коливання (1.71) відбуваються із сталою частотою, то за умови сталості різниці фаз між ними взаємна орієнтація векторів (1.72) така, як це зображено на рис.1.8,а.

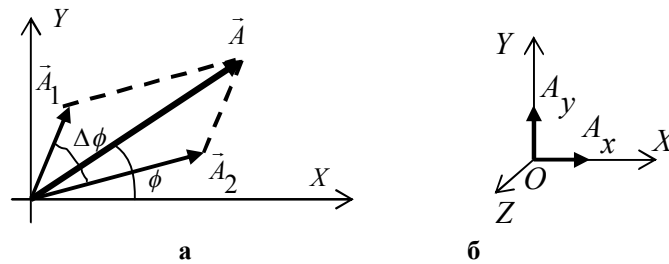


Рис. 1.8

Тоді за теоремою косинусів, квадрат амплітуди результуючої хвилі

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi, \quad (1.73)$$

де $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. Тому, якщо що різниця фаз

$$\Delta\phi = 2m\pi, \quad (1.74)$$

то амплітуда результуючого коливання

$$A = A_1 + A_2 \quad (1.75)$$

зростає до максимуму і подвоюється, коли $A_1 = A_2$. Якщо ж

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \quad (1.76)$$

то амплітуда зменшується до мінімуму

$$A = A_1 - A_2 \quad (1.77)$$

і дорівнює нулеві, коли $A_1 = A_2$.

Фаза результуючого коливання, згідно рис. 1.8,а, дорівнює

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}. \quad (1.78)$$

Процес додавання когерентних гармонічних коливань чи хвиль, який супроводжується стійким в часі підсиленням чи послабленням амплітуди результуючого коливання чи хвилі, в залежності від різниці фази між ними, називається **інтерференцією**.

Додавання плоских коливань, що не лежать в одній площині. Нехай плоске коливання $A_{1y} = A_{01} \cos(\omega t - \phi_1)$ відбувається в напрямку осі Y , про що свідчитиме відповідний індекс, а інше $A_2 = A_0 \cos(\omega t - \phi_2)$ нахилене до неї під кутом α (рис.1.9,а).

Спроектуємо нахилене коливання на площину коливання (поляризації*) першого (рис.1.9,а):

$$A_{2y} = A_{02} \cos \alpha \cdot \cos(\omega t - \phi_2). \quad (1.79)$$

Ми розглядаємо плоскі коливання, тому проектування їх на площину не деформує поверхні сталої фази. Тому, застосовуючи метод *Френеля*, одержимо, що амплітуда результуючого коливання вздовж напрямку осі Y буде дорівнювати

$$A = \sqrt{A_{01}^2 + A_{02}^2 \cos^2 \alpha + 2A_{01}A_{02} \cos \alpha \cos \Delta \phi}. \quad (1.80)$$

Отже, в цьому випадку вона є функцією двох параметрів – кута нахилу α та зсуву фаз між коливаннями

$\Delta \phi$. Для різних значень кута між площинами коливань $\alpha: \frac{\pi}{8}(A1); \frac{\pi}{4}(A2); \frac{\pi}{2.5}(A3); \frac{\pi}{2}(A4)$ залежності її

від зсуву фази між коливаннями, що складаються, зображені на .1.9,б. Переконаємось, що амплітуда результуючого коливання зменшується із збільшенням кута між площинами коливань, що додаються і коли

він дорівнює $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (коливання взаємно перпендикулярні), то їх інтерференція відсутня.

*) За площину поляризації коливання приймемо площину коливання вектора амплітуди.

Годограф**) результуючого коливання – як стан її поляризації. Нехай кут між площинами коливань, що складаються, не дорівнює нулеві $\alpha \neq 0$ і вони поширюються вздовж осі Z . Якщо перше коливання поляризоване вздовж осі Y , а друге нахилена до площини коливань першого під кутом α , як це зображено на рис.1.9,а, то додаються їх взаємно перпендикулярні декартові складові

$$\begin{aligned} A_{1y} &= A_{01y} \cos \omega t; \\ A_{2x} &= A_{02x} \sin \alpha \cdot \cos(\omega t - \Delta \phi). \end{aligned} \quad (1.81)$$

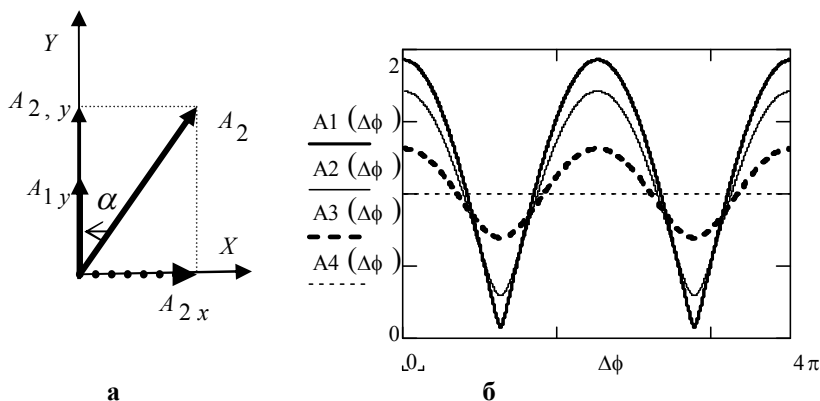


Рис.1.9

Щоб одержати рівняння годографа в площині XOY , виключимо із рівнянь (1.81) параметр t . Для цього їх перепишемо так: $\frac{A_{1y}}{A_{01y}} = \cos \omega t$; $\frac{A_{2x}}{A_{02x} \sin \alpha} = \cos \omega t \cos \Delta \phi + \sin \omega t \sin \Delta \phi$. Підставивши в друге рівняння замість $\cos \omega t$ його значення із

 **) *Годограф - це крива, яку описує кінець радіус - вектора в площині за період коливання. Якщо коливання плоске, то нею є пряма.*

Для неплоских коливань годограф має вигляд замкнутої кривої.

рівняння (1.81), одержимо таку рівність: $\frac{A_{2x}}{A_{02x} \sin \alpha} - \frac{A_{1y}}{A_{01y}} \cos \Delta \phi = \sin \omega t \sin \Delta \phi$.

Піднісши перше рівняння в (1.81) до квадрату та додавши їх, одержимо

$$\left(\frac{A_{2x}}{A_{02x} \sin \alpha} \right)^2 + \left(\frac{A_{1y}}{A_{01y}} \right)^2 - 2 \frac{A_{2x}}{A_{02x} \sin \alpha} \frac{A_{1y}}{A_{01y}} \cos \Delta \phi = \sin^2 \Delta \phi. \quad (1.82)$$

Цей вираз в загальному випадку є **рівнянням еліпса**, параметри якого визначаються зсувом фази між коливаннями та їх амплітудами A_{01y} і $A_{02x} \sin \alpha$. Головний висновок, який випливає із (1.82) це то, що значення кута між площинами коливань не впливає на характер годографа, тобто стан поляризації результуючого коливання, а змінюється лише в залежності від значення $\Delta \phi$.

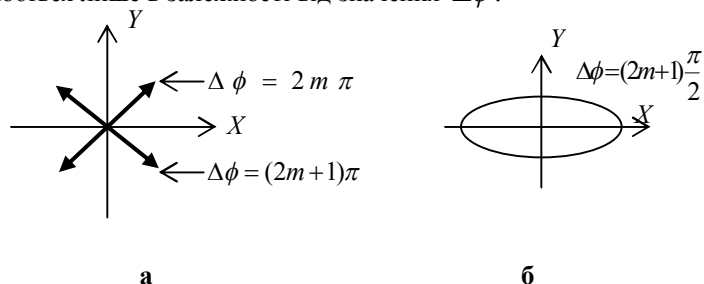


Рис. 1.10, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Якщо зсув фаз між ними дорівнює $\Delta \phi = 2m\pi$ чи $\Delta \phi = (2m+1)\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ (1.83) то результуюче коливання є лінійно поляризованим (рис.1.10,а) і описується рівнянням

$$\frac{A_{1y}}{A_{01y}} \mp \frac{A_{2x}}{A_{02x}} = 0 \quad (1.84)$$

Якщо

$$\Delta \phi = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \quad (1.85)$$

рівняння годографа має вигляд

$$\left(\frac{A_{1y}}{A_{01y}} \right)^2 + \left(\frac{A_{2x}}{A_{02x} \sin \alpha} \right)^2 = 1, \quad (1.86)$$

тобто годографом є еліпс, осі якого збігаються з осями координат (рис.1.10,б). Таке коливання називається **еліптично поляризованим**. Еліпс перетворюватиметься в коло, якщо $A_{01y} = A_{02x} \sin \alpha$. Таке коливання називається **циркулярно поляризованим** або **поляризованим за колом**.

3. Висновки

У даній лекції розглянуті питання пов'язані з визначенням та характеристиками коливального руху, гармонічних коливань, характеристиками коливального руху, маятниками, резонансом та додаванням коливань. Засвоєння цих фізичних явищ і законів, методів фізичного дослідження, є базою при подальшому вивченні спеціалізованих дисциплін. Формування правильного розуміння границь застосовності цих фізичних понять, законів, теорій дозволить оцінювати ступінь вірогідності результатів, отриманих за допомогою експериментальних методів дослідження. Навчання побудові математичних моделей фізичних явищ, а також їхнього аналізу на основі аналітичних рішень і чисельного експерименту дозволить курсантам набутти стійких навичок роботи за фахом