МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кафедра інформаційних технологій та кібербезпеки

Факультет №4

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

до лабораторних занять

із навчальної дисципліни «Вища математика»

обов'язкових компонент освітньої програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Спеціальність: 125 Кібербезпека
(«Поліцейська діяльність у кіберсфері»)

Харків 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 21.12.2020 № 12

СХВАЛЕНО
Вченою радою факультету № 4
Протокол від 16.12.2020 № 8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 16.12.2019 № 8

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій та кібербезпеки факультету № 4
(протокол від 01.12.2020р. № 23)

Розробники:

1. *Доктор технічних наук, професор, професор кафедри Можаєв О.О.*
2. *Старший викладач кафедри Мелащенко О.П.*
3. *Старший викладач кафедри Рог В.Є.*

Рецензенти:

1. *Професор кафедри обчислювальної техніки та програмування Національного технічного університету «Харківській політехнічний інститут», д.т.н., професор Кучук Г.А.*
2. *Провідний науковий співробітник науково-дослідної лабораторії з проблем розвитку інформаційних технологій ХНУВС, к.т.н., доцент Мордвинцев М. В.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Семестр №1

Номер та найменування теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Тема № 1: Матриці, визначники квадратних матриць та їх практичне застосування для аналізу систем лінійних алгебраїчних рівнянь	**40**	**8**		**2**	**6**	**24**	
Тема №2. Основні принципи векторної алгебри та аналітичної геометрії	**14**	**4**		**2**	**4**	**4**	
Тема №3. Функція однієї змінної. Границя функції однієї змінної	**16**	**4**		**2**	**2**	**8**	
Тема № 4 Похідна функції, її практичний зміст і правила диференціювання	**20**	**4**		**4**	**4**	**8**	
Всього за семестр №1	**90**	**20**		**10**	**16**	**44**	**залік**

Семестр №2

Номер та назва, номер та найменування теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
ТЕМА № 5. Основи аналізу функції кількох змінних	**34**	**6**		**4**	**4**	**20**	
ТЕМА № 6. Інтегральне числення функції однієї змінної	**56**	**14**		**6**	**12**	**24**	
Всього за семестр №2	**90**	**20**		**10**	**16**	**44**	**залік**

2. Методичні вказівки до лабораторних занять.

Тема № 1: Матриці, визначники квадратних матриць та їх практичне застосування для аналізу систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Лабораторне заняття №1.

Навчальна мета заняття : закріплення теоретичних знань з матричної алгебри;
вироблення навичок розв'язання задач матричної алгебри за допомогою середовища MathCad; аналіз отриманих результатів.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Поняття матриці.
2. Освоєння дій з матрицями.
3. Види матриць.
4. Відшукання рангу матриці.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Україна», 2004. – 444 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
5. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
6. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62
7. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

Заняття проводиться в комп'ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп'ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп'ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Дано матриці *A* та *B* та *C*. Необхідно

1. Розв'язати рівняння АВ+У=2В
2. Знайти А+$С^Т$, АС, АВ, $АС^Т$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

1. Розв'яжемо рівняння АВ+У=2В. Для цього виразимо У: У=2В-АВ. Користуючись правилами виконання дій над матрицями, знайдемо:

$$2B = 2 * \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Тоді шуканий розв'язок рівняння:

$$Y = 2B - AB = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Знайдемо матрицю А+$С^Т$

$$A + C^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю АС

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2*3-1*1-3*0 & 2*(-2)-1*2-3*(-1) & 2*5-1*(-3)-3*4 \\ 1*3-2*1-2*0 & 1*(-2)-2*2+2*(-1) & 1*5-2*(-3)+2*4 \\ 3*3+1*1+1*0 & 3*(-2)+1*2+1*(-1) & 3*5+1*(-3)+1*4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & -8 & 19 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Матриці AB, AC^T знаходяться аналогічно.

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$Y := 2 \cdot B - A \cdot B$$

$$Y = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A + C^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & -8 & 19 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C^T = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -11 \\ 17 & -9 & 10 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix}-4\\ 5\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix}-5\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 6\\ -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ -3\\ -9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & -4 & 2\\ 4 & -3 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}1$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 5 & 6 & -4\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3\\ 8\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -4 & 9\\ 8 & 2 & -5\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -5 & 4\\ 2 & 7 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №2.

Навчальна мета заняття : закріплення теоретичних знань з матричної алгебри; вироблення навичок розв’язання задач матричної алгебри за допомогою середовища MathCad; аналіз отриманих результатів.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Поняття визначників 2-го та 3-го порядку та їх обчислення.
2. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення елементів квадратної матриці

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Україна», 2004. – 444 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
5. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
6. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62
7. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв’язання типового прикладу. За аналогією розв’язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв’язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв’язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Обчислити визначник за правилом трикутників.
Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot 1\cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Приклад 2. Обчислити визначник за правилом Саррюса.
Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\Bigg| = 1\cdot 2\cdot 0 + 0(-4)\cdot 1 + (-2)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

Приклад 3. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.
Обчислимо:

$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5$. $\Delta(A) \neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

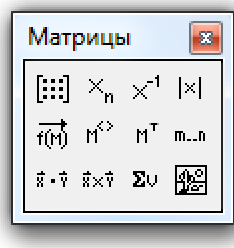
$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad



$$A := \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A| = 5 \qquad |F| = 0$$

$$D := \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0.8 & -0.2\\ 2 & 2.4 & -0.6\\ 0 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix} \qquad D^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & \frac{-1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & \frac{-3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Варіанти завдань для самостійного розв’язання.

1 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

3. $\grave{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix}-4\\ 5\\ -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

4. $$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-3&-1\\3&2&2\end{pmatrix},\quad \hat{A}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\-2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}3&3&2\\2&0&1\\4&3&4\end{pmatrix}.$$

5. $$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&-2&1\\1&3&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2&4&1\\2&-1&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}.$$

6. $$A=\begin{pmatrix}1&4&-3\\1&-3&2\\2&-5&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6\\-3\\-9\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&2&-3\\2&1&-2\\3&-4&5\end{pmatrix}.$$

7. $$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&3&-1\\1&-1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6&-4&2\\4&-3&-1\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

8. $$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-3&-2\\2&1&1\end{pmatrix}1,\quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&4&0\\5&6&-4\\2&3&-4\end{pmatrix}.$$

9. $$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&2&-3\\2&-1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3\\8\\-5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}4&-4&9\\8&2&-5\\3&-5&2\end{pmatrix}.$$

10. $$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&3\\3&-3&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}5&-5&4\\2&7&0\\3&4&-1\end{pmatrix}.$$

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №3.

Навчальна мета заняття : закріплення теоретичних знань з розв’язання СЛАР; вироблення навичок розв’язання СЛАР за допомогою середовища MathCad; аналіз отриманих результатів.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Метод Крамера.
2. Метод Гаусса.
3. Метод оберненої матриці.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Україна», 2004. – 444 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
5. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
6. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62
7. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв’язання типового прикладу. За аналогією розв’язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв’язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв’язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

Розв'язання.

Обчислимо визначник цієї системи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4$$

.

Визначник системи відмінний від нуля. Знайдемо тепер визначник $D_k (k = 1, 2, 3)$ і розв'язки системи рівнянь:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4;$$

Тоді за формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{4}{4} = 1.$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь за допомогою оберненої матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Розв'язання.

Систему можна записати у матричному вигляді $A{\cdot}X{=}B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді (якщо $\det A \neq 0$) розв'язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1}B$.

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13 \qquad \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}. \quad A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-6 & 4 & 7\\ 1 & -5 & 1\\ 8 & -1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 7\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-54-8+49\\ 9+10+7\\ 72+2-35\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-13\\ 26\\ 39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},$$

таким чином, розв'язок системи: x_1=-1; x_2=2; x_3=3.

Приклад 3. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=9\\ x_1-2x_2+x_3=-2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=7\end{cases}$$

Розв'язання.

Складемо розширену матрицю системи та приведемо її до трикутної за допомогою елементарних перетворень.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 3 & 9\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 2 & 7\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3 & 9\\ 3 & 2 & 2 & 7\end{array}\right).$$

Від другого рядка матриці віднімемо перший рядок помножений на 2, а від третього рядка віднімемо перший помножений на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 5 & 1 & 13\\ 0 & 8 & -1 & 13\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5\\ 0 & 8 & -1 & 13\end{array}\right).$$

Від третього рядка віднімемо другий помножений на 8:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5\\ 0 & 0 & -13/5 & -39/5\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1/5 & 13/5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right).$$

Відповідно запишемо систему:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2\\ \qquad x_2+\frac{1}{5}x_3=\frac{13}{5}\\ \qquad\qquad x_3=3\end{cases}.$$

З другого рівняння системи маємо

$$x_2=\frac{13}{5}-\frac{1}{5}x_3=\frac{13}{5}-\frac{1}{5}\cdot 3=2,$$

а з першого рівняння

$$x_1=-2+2x_2-x_3=-2+4-3=-1.$$

Отже, розв'язок системи x_1=-1; x_2=2; x_3=3.

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad

Розв’язати систему рівнянь за допомогою функції lsolve:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

Запишемо у матричному вигляді:

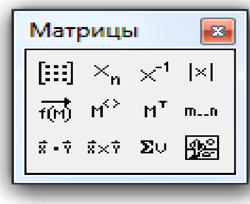
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4$$

$$x := A^{-1} \cdot B \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{lsolve}(A, B)$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Розв’язати систему рівнянь за допомогою методу Гаусса:

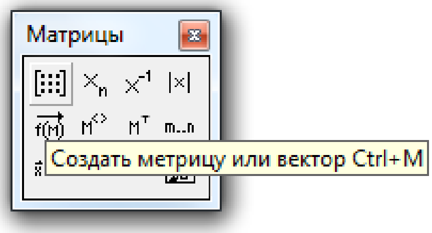
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 17 \end{pmatrix}$$

ORIGIN := 1

Формування розширеної матриці системи

$$A1 := \mathrm{augment}(A, B) \qquad A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & 7 & 25 \\ 1 & 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$



Прямий та обернений хід методу Гаусса

$A2 := \mathrm{rref}(A1)$

$$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x := \mathrm{submatrix}(A2, 1, 3, 4, 4)$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перевірка

$$A \cdot x - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв’язати систему рівнянь за допомогою функції Find:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

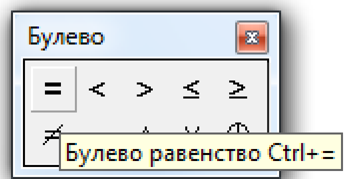
$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

Given

$x1 + 2 \cdot x2 + 3 \cdot x3 = 10$

$2 \cdot x1 + 6 \cdot x2 + 7 \cdot x3 = 25$

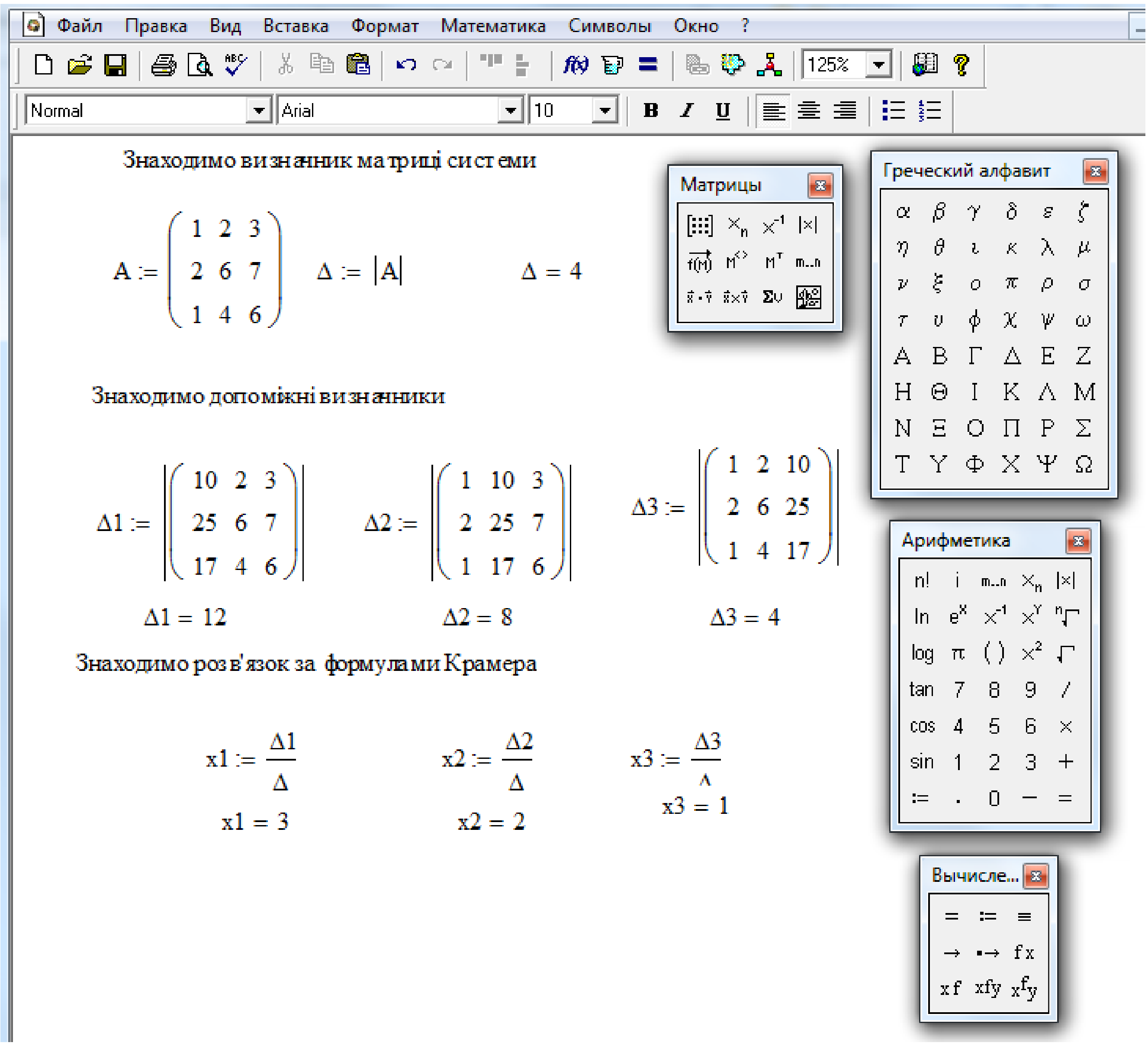
$x1 + 4 \cdot x2 + 6 \cdot x3 = 17$



$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Розв’язати систему рівнянь за допомогою методу Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$



Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема №2. Основні принципи векторної алгебри та аналітичної геометрії.
Лабораторне заняття №4.

Навчальна мета заняття : закріплення теоретичних знань з векторної алгебри; вироблення навичок розв'язання задач векторної алгебри за допомогою середовища MathCad; аналіз отриманих результатів.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Україна», 2004. – 444 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
5. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
6. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62.
7. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

Заняття проводиться в комп'ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп'ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп'ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

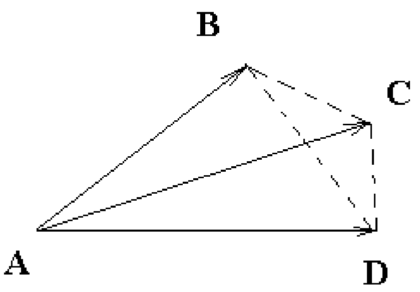
I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад Знайти скалярний добуток $\vec{AC}\cdot\vec{AB},$ де $A_1(2, 4, 6)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(-4, 8, 7)$.
Розв'язання.
Обчислимо скалярний добуток векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ та кут між ними.
Розв'язання.
Спочатку знайдемо координати цих векторів. $\overline{A_1A_3}(-4-2,\,8-4,\,7-6)=\overline{A_1A_3}(-6,\,4,\,1)$, аналогічно $\overline{A_1A_2}(3,\,0,\,1)$.
Тоді $\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}=3\cdot(-6)+4\cdot 0+1\cdot 1=-17$.
Знайдемо модуль вектора $\overline{A_1A_3}$:
$\left|\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-6)^2+4^2+1^2}=\sqrt{53}$.
Обчислюємо кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3:
$$\cos\varphi=\frac{-17}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{53}}=-\frac{17}{\sqrt{530}}\approx-0{,}74,$$
тобто кут дорівнює
$$\varphi=\arccos(-0{,}74)\approx 138^\circ.$$
Приклад 2. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $\boldsymbol{A(1;\ -2;\ 8)}$, $\boldsymbol{B(0;\ 0;\ 4)}$, $\boldsymbol{C(6;\ 2;\ 0)}$.
Розв'язання.
Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\overline{\boldsymbol{AB}}\perp\overline{\boldsymbol{AC}}$.
$\overline{\boldsymbol{AB}}=(-1;\ 2;\ -4)$, $\overline{\boldsymbol{AC}}=(5;\ 4;\ -8)$.
Векторний добуток дорівнює:
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-1&2&-4\\5&4&-8\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}2&-4\\4&-8\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-1&-4\\5&-8\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\5&4\end{vmatrix}=$$
$$=\bar{i}\cdot(-16+16)-j\cdot(8+20)+\bar{k}\cdot(-4-10)=-28\bar{j}-14\bar{k}.$$
Тоді площа трикутника дорівнює:
$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-28)^2+(-14)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 14^2}=7\sqrt{5}(\text{кв. од.}).$$
Приклад 3.Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами A(2;-1;0), B(5;5;3), C(3;2;-2), Д(4;1;2).
Розв'язання.



Відомо, що об’єм тетраедра, побудованого на векторах дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.
Тому маємо

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$$

Знаходимо $\overline{AB}$=(3;6;3), $\overline{AC}$ =(1;3;-2), $\overline{AD}$ = (2;2;2)

$$N=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=3.$$

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad

Знайти скалярний добуток $A\vec{C}\cdot A\vec{B}$, де A_1(2, 4, 6), A_2(5, 4 , 7), A_3(-4, 8, 7).

$$A1 := \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \qquad A2 := \begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix} \qquad A3 := \begin{pmatrix}-4\\8\\7\end{pmatrix}$$

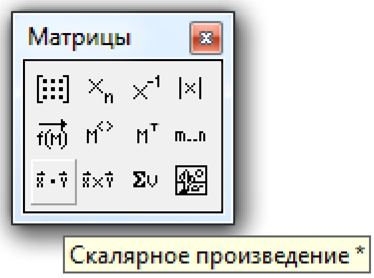
$$A1A2 := A2 - A1 \qquad A1A3 := A3 - A1$$

$$A1A2 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad A1A3 = \begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$A1A2 \cdot A1A3 = -17$$

$$\phi := \operatorname{acos}\left(\frac{A1A2 \cdot A1A3}{|A1A2| \cdot |A1A3|}\right)$$

$$\phi = 2.402 \qquad \cos(\phi) = -0.738$$

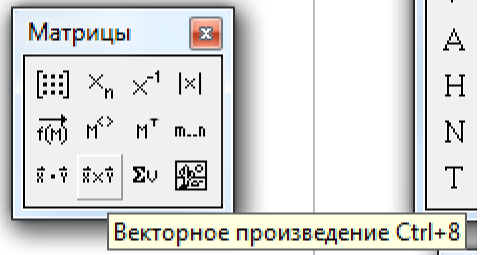


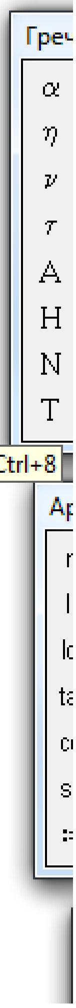
Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $\boldsymbol{A(1;\ -2;\ 8)}$, $\boldsymbol{B(0;\ 0;\ 4)}$, $\boldsymbol{C(6;\ 2;\ 0)}$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB := B - A \qquad AC := C - A$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$





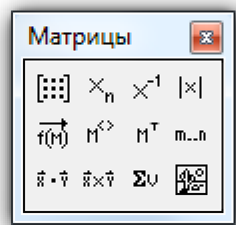
$$AB \times AC = \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ -14 \end{pmatrix} \qquad |AB \times AC| = 31.305$$

$$S := \frac{|AB \times AC|}{2}$$

$$S = 15.652 \qquad S \to 7 \cdot \sqrt{5}$$

Знайти об’єм тетраедра, заданого вершинами A(2;-1;0), B(5;5;3), C(3;2;-2), Д(4;1;2).

$$AB := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$(AB \times AC) \cdot AD = -18$$

$$V := \frac{|(AB \times AC) \cdot AD|}{6} \qquad V \to 3$$

Варіанти завдань для самостійного розв’язання.

Задано точки $A(k;-1;2), B(1;k;-1), C(-k;1;-3), D(3;-5;k)$.

Знайти:

а). $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$, б). $\vec{AC} \times \vec{AB}$, с). $\cos(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$, д). $\sin(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$,

е) площу трикутника ACD, ж) об’єм тетраедра ABCD та довжину висоти тетраедра, яка опущена з вершини D (***k***-номер здобувача вищої освіти по списку у журналі групи).

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №5.

Навчальна мета заняття : закріплення теоретичних знань з аналітичної геометрії на площині; вироблення навичок розв’язання задач аналітичної геометріїна площині за допомогою середовища MathCad; аналіз отриманих результатів.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Рівняння пряої на площині.
2. Кут між двома прямими.
3. Умова паралельності та перпендикулярності прямих.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчан-ня / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Україна», 2004. – 444 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
5. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
6. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62.
7. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екра-ну.

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Вершини трикутника знаходяться в точках $A_1(2, 3)$, $A_2(5, 4)$, $A_3(9, 1)$.

Скласти:

1. Рівняння прямої A_1A_2.

Розв'язання.

Рівняння прямої A_1A_2 запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, тобто $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}$ або $y=\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$ – рівняння прямої A_1A_2.

2. Рівняння висоти та медіани цього трикутника, опущених з вершини A_2.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої A_1A_3 як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$\frac{x-2}{7}=\frac{y-3}{-2}$ або $y=-\frac{2}{7}x+3\frac{4}{7}$ – рівняння прямої A_1A_3.

Для знаходження рівняння висоти A_2D трикутника використаємо умову перпендикулярності прямих

$$k_1=-\frac{1}{k_2},$$

де k_1 та k_2 – кутові коефіцієнти висоти A_2D та прямої A_1A_3 відповідно.

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої A_1A_3 – $k_2=-\frac{2}{7}$, то кутовий коефіцієнт висоти $k_1=\frac{7}{2}=3{,}5$.

Тепер можемо записати рівняння висоти A_2D як рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y=k_1x+b,$$

тобто $y=3{,}5x+b$.

Оскільки точка A_2 належить висоті A_2D, її координати повинні задовольняти рівняння висоти, тобто

$4 = 3{,}5 \cdot 5 + b$ або $b = -13{,}5$.

Отже, рівняння висоти A_2D має вигляд

$y = 3{,}5x - 13{,}5$.

Для знаходження рівняння медіани A_2C знайдемо координати основи медіани – точки C, яка ділить відрізок A_1A_3 навпіл.

Координати середини відрізку знаходимо за формулами:

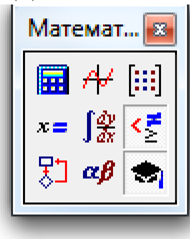
$x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\quad y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, тобто координати точки C: $x_c = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$, $\quad y_c = 2$,

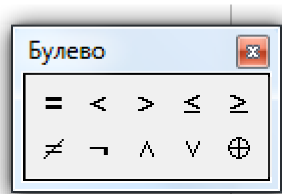
або C(5,5; 2).

Запишемо рівняння медіани A_2C як прямої, що проходить через дві задані точки A_2 та C:

$\dfrac{x-5}{0{,}5} = \dfrac{y-4}{-2}$ або $y = -4x + 24$.

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad





$x1 := 2 \qquad x2 := 5 \qquad x3 := 9$

$y1 := 3 \qquad y2 := 4 \qquad y3 := 1$

Знайдемо рівняння прямої A1A2

$\dfrac{x - x1}{x2 - x1} = \dfrac{y - y1}{y2 - y1}$ solve, y $\rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot x + \dfrac{7}{3}$

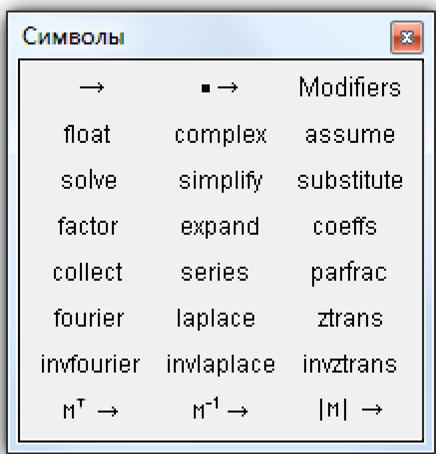
Знайдемо рівняння прямої A1A3

$\dfrac{x - x1}{x3 - x1} = \dfrac{y - y1}{y3 - y1}$ solve, y $\rightarrow \dfrac{-2}{7} \cdot x + \dfrac{25}{7}$

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої A1A3

$k := \dfrac{y3 - y1}{x3 - x1}$

$k \rightarrow \dfrac{-2}{7} = -0.286 \qquad k1 := \dfrac{-1}{k}$



Знайдемо рівняння висоти A2D

$$y - y2 = k1 \cdot (x - x2)\ \text{solve}, y \rightarrow \frac{-27}{2} + \frac{7}{2} \cdot x$$

Знайдемо рівняння медіани A2C

Знайдемо для цього координати середини відрізка A1A3

$$xc := \frac{x1 + x3}{2} \qquad yc := \frac{y1 + y3}{2}$$

$$xc = 5.5 \qquad yc = 2$$

$$\frac{x - x2}{xc - x2} = \frac{y - y2}{yc - y2}\ \text{solve}, y \rightarrow -4 \cdot x + 24$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Дано координати вершин трикутника АВС. Застосувавши методи аналітичної геометрії, знайти:

а) рівняння та кутові коефіцієнти прямих АВ і АС;
б) рівняння висоти CD та її довжину;
в) рівняння медіани ВК:
г) рівняння прямої, що проходить через точку В паралельно до прямої АС.
д) побудувати трикутник АВС та висоту CD.

1.	A(11; -5),	B(-1; 4),	C(15; 17).
2.	A(14; -4),	B(2; 5),	C(18; 18).
3.	A(8; 1),	B(-4; 10),	C(12; 23).
4.	A(13; -9),	B(1; 0),	C(17; 13).
5.	A(3; -3),	B(-9; 6),	C(7; 19).
6.	A(12; -7),	B(0; 2),	C(16; 15).
7.	A(2; 0),	B(-10; 9),	C(6; 22).
8.	A(0; -10),	B(-12; -1),	C(4; 12).
9.	A(7; -2),	B(-5; 7),	C(11; 20).
10.	A(4; -12),	B(-8; -3),	C(8; 10).

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема № 3. Функція однієї змінної. Границя функції однієї змінної.
Лабораторне заняття №6.

Навчальна мета заняття : вироблення у студентів навичок обчислення гриниць за допомогою середовища MathCad.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Границя функції та її властивості.
2. Розкриття невизначеностей.
3. Дві особливі границі.
4. Застосування нескінченно малих величин при обчисленні границь.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Україна», 2004. – 444 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
5. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
6. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62.
7. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв’язання типового прикладу. За аналогією розв’язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв’язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв’язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Обчислити границі, не використовуючи правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-1}{x-3x^2+2}$.

Розв'язання.

У даній границі маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, причому степені чисельника й знаменника рівні між собою. Для обчислення цієї границі й у чисельнику, і в знаменнику винесемо x^2 за дужку. В результаті одержуємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(7+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-3+\frac{2}{x^2}\right)}.$$

Доданки $\dfrac{1}{x}; -\dfrac{1}{x^2}; \dfrac{2}{x^2}$ прямують до нуля при $x\to\infty$. Т.ч. дужка в чисельнику прямує до 7 при $x\to\infty$, а дужка в знаменнику прямує до –3 при $x\to\infty$. У результаті маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+x-1}{x-3x+2}=-\frac{7}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-4}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. При обчисленні цієї границі необхідно чисельник і знаменник розкласти на множники.

Знаменника запишемо у вигляді $x^2-4=(x-2)(x+2)$.

Для розкладання чисельника знайдемо коріння рівняння $x^2-8x+12=0$,

$$D=(-8)^2-4\cdot 12=16,\ x_1=\frac{8+4}{2}=6;\quad x_2=\frac{8-4}{2}=2.$$

Використовуючи формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, одержуємо $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$.

Таким чином, вихідна межа можна записати у вигляді $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-6)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$.

Скоротивши на $(x-2)$, одержуємо $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-6}{x+2}$.

Ця межа вже не має невизначеностей. Підставляючи $x = 2$, одержуємо, що вихідна межа рівна –1.

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$.

Розв'язання.

Аналогічно прикладу б) розкладемо квадратний тричлен x^2+2x-8 на множники, а саме,

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}.$$

Для перетворення знаменника домножимо і чисельник, і знаменник дробу на спряжене до знаменника, тобто на $\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}$ та скористаємося формулою скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{6-x})^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{x+2-(6-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{2(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{2} = 12$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{6x-5}$.

Розв'язання.

При обчисленні цієї межі скористаємося наслідком другої чудової границі, а саме,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Приведемо дану границю до виду:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{6x-5} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3x+2}{3x-5}-1\right)^{6x-5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3x+2-(3x-5)}{3x-5}\right)^{6x-5} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{6x-5} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-5}{7}}\right)^{6x-5}.$$

Для застосування наслідку другої чудової границі необхідно, що знаменник дробу, що знаходиться в дужках (у нашому випадку $\frac{3x-5}{7}$) і степінь (у нашому випадку $6x-5$) були рівні між собою. Доб'ємося виконання цієї умови:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-5}{7}}\right)^{6x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-5}{7}}\right)^{\frac{3x-5}{7}\cdot\frac{7}{3x-5}\cdot(6x-5)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-5}{7}}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right)^{\frac{7(6x-5)}{3x-5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{42x-35}{3x-5}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{42x-35}{3x-5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x(42-35/x)}{x(3-5/x)}}=e^{14}.$$

Обчислемо

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\arcsin 3x\cdot\ln(1-2x)}$.

Розв'язання.

У цьому прикладі будемо користуватися наслідком першої й другої чудових границь, а саме,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\frac{\arcsin 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\ln(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x\cdot\ln(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x\cdot\ln(1+(-2x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x\cdot\frac{\ln(1+(-2x))}{-2x}\cdot(-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x\cdot(-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{-6x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\frac{(2x)^2}{-6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^2}{-6x^2}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}.$$

Приклад 2.Дослідити функцію f(x) на неперервність, встановити тир точок розріву, якщо вони є, схематично побудувати графік, якщо

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<-1; \\ -2x, & -1\le x\le 0; \\ 3, & x>0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Функції $y_1(x)=x^2+1,\ y_2(x)=-2x,\ y_3(x)=3$ неперервні при $x\in(-\infty;+\infty)$. Тому f(x) може мати точки розриву лише при $x=-1,\ x=0$. Перевіримо виконання умови неперервності в цих точках.

При $x=-1$ маємо:

1. f(x) визначена при $x=-1$, причому $f(-1)=-2\cdot(-1)=2$.
2. $A=\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x^2+1)=(-1)^2+1=2,$

   $B=\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(-2x)=-2\cdot(-1)=2.$

   Ми отримали, что односторонні границі A и B існують та скінченн.
3. $A=B=f(x_0)$.

Усі умови неперервності виконані, т.ч. $x=-1$ - точка неперервності функцію f(x).

При $x=0$ маємо:

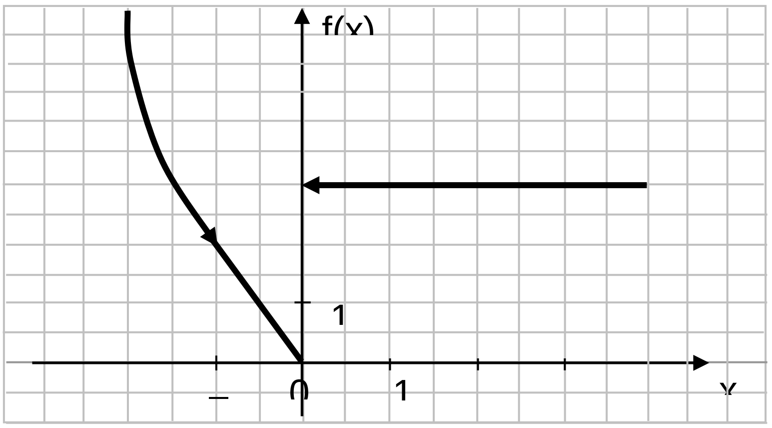
1. f(x) визначена при $x=0$, причому $f(0)=-2\cdot 0=0$.
2. $A=\lim\limits_{x\to0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}(-2x)=0,$

   $B=\lim\limits_{x\to0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to0+0} 3=3.$

   Односторонні границі A и B існують та скінченні.
3. $A\ne B$.

Ми з'ясували, що односторонні границі існують та скінченні,але не дорівнюють одна одній. Таким чином, $x=0$ *є точка розриву першого роду, неусувного розриву.*

Схематично графік функції f(x) має вигляд

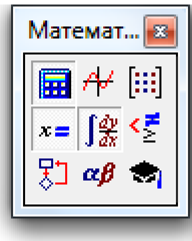


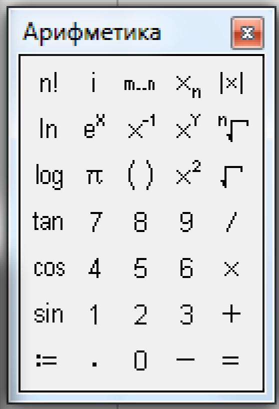
Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad.

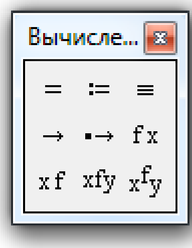
$$\lim_{x\to\infty}\frac{7\cdot x^2+x-1}{x-3\cdot x^2+2}\to\frac{-7}{3}\qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-8\cdot x+12}{x^2-4}\to -1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2\cdot x-8}{\sqrt{x+2}+\left(-\sqrt{6-x}\right)}\to 12\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\cdot x+2}{3\cdot x-5}\right)^{6\cdot x-5}\to \exp(14)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\cdot x)}{\operatorname{asin}(3\cdot x)\cdot\ln(1-2\cdot x)}\to\frac{-1}{3}$$







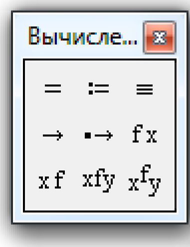
$$f(x) := \begin{cases} x^2+1 & \text{if } x<-1\\ -2\cdot x & \text{if } -1\le x\le 0\\ 3 & \text{if } x>0\end{cases}$$

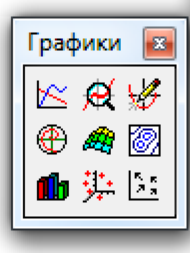
$$\lim_{x\to -1^-} x^2+1 \to 2\qquad \lim_{x\to -1^+} x^2+1\to 2$$

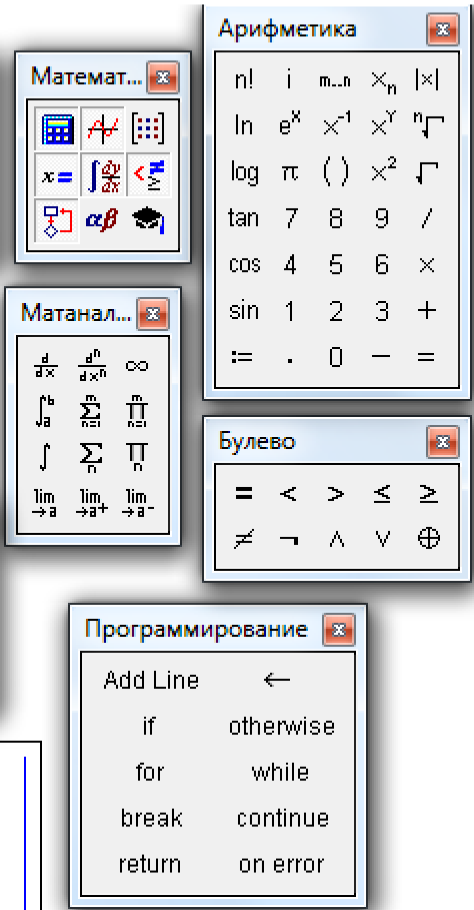
$$\lim_{x\to -0^-} -2\cdot x\to 0\qquad \lim_{x\to -1^+} -2\cdot x\to 2$$

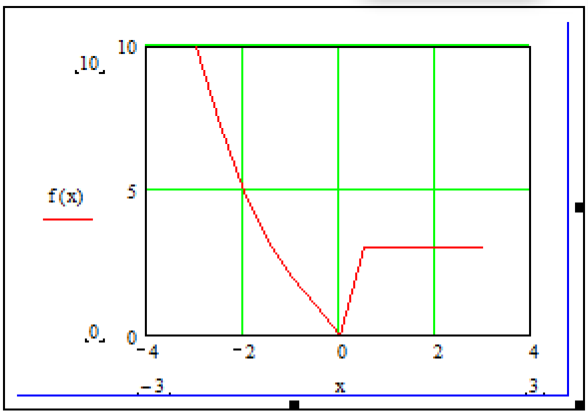
$$\lim_{x\to 0^+} 3\to 3$$

$$x := -3,-2.5\,..\,3$$









Варіанти завдань для самостійного розв’язання.

Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2+6x-1}{3-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x^2+4x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\sin 4x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-x-1}{3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\cdot \mathrm{tg}x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-x^2-1}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2+7x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{2x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-1}{\sin 6x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3+6x-1}{x^3-x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}{x^2+4x-12}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{5x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\arcsin x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5-2x^2-2x}{x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+x-20}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x+3}{7x-2}\right)^{4x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x-1}{5-6x^3+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{6-x}}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+7}\right)^{3-x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-4^x}{\operatorname{arctg} x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1-x^2}{3-x+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+4x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-4}\right)^{3x^2+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\ln(1+2x)}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-x+2}{x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+2x}{6+2x}\right)^{3x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1-x)}{\sin 2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-6x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2+x-12}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{2x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1-6x)}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\sin 5x}$.

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема №4. Похідна функції, її практичний зміст і правила диференціювання
Лабораторне заняття №7.

Навчальна мета заняття : вироблення у студентів навичок обчислення похіднихза допомогою середовища MathCad, закріплення теоретичних знань з диференціального числення.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Знаходження похідних функцій.
2. Похідна складної функції.
3. Похідна неявної функції та параметрично заданої функції.
4. Правило Лопіталя.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Варіанти завдань та методичні вказівки для самостійної роботи студентів. Ч. 1. – Житомир: ЖДТУ, 2014. – 50 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Знайти похідну y': $y = \dfrac{7x^3 - 4x + 1}{\sqrt{1-4x}}$

Розв'язання.

$$y' = \left(\frac{7x^3 - 4x + 1}{\sqrt{1-4x}}\right)' =$$

$$= \frac{(7x^3 - 4x + 1)' \cdot \sqrt{1-4x} - (7x^3 - 4x + 1)(\sqrt{1-4x})'}{(\sqrt{1-4x})^2} =$$

$$= \frac{(21x^2 - 4) \cdot \sqrt{1-4x} - (7x^3 - 4x + 1) \cdot \dfrac{(1-4x)'}{2\sqrt{1-4x}}}{1-4x} =$$

$$= \frac{(21x^2 - 4) \cdot \sqrt{1-4x} - (7x^3 - 4x + 1) \cdot \dfrac{-4}{2\sqrt{1-4x}}}{1-4x} =$$

$$= \frac{(21x^2 - 4) \cdot (1-4x) + 2(7x^3 - 4x + 1)}{(1-4x)^{3/2}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну y': $y = \cos 3 \cdot \ln(2 + e^x \cdot \sqrt[3]{1+4e^{3x}})$

Розв'язання.

$$y' = (\cos 3 \cdot \ln(2 + e^x \cdot \sqrt[3]{1+4e^{3x}}))' = \cos 3(\ln(2 + e^x \cdot \sqrt[3]{1+4e^{3x}}))' =$$

$$= \cos 3 \cdot \frac{(2 + e^x \sqrt[3]{1+4e^{3x}})'}{2 + e^x \cdot \sqrt[3]{1+4e^{3x}}} = \cos 3 \cdot \frac{(e^x)' \cdot \sqrt[3]{1+4e^{3x}} + e^x (\sqrt[3]{1+4e^{3x}})'}{2 + e^x \cdot \sqrt[3]{1+4e^{3x}}} =$$

$$=\cos 3\cdot\frac{e^x\cdot\sqrt[3]{1+4e^{3x}}+e^x\cdot\frac{1}{3}(1+4e^{3x})^{-2/3}(1+4e^{3x})'}{2+e^x\cdot\sqrt[3]{1+4e^{3x}}}=$$

$$=\cos 3\cdot\frac{e^x\cdot\sqrt[3]{1+4e^{3x}}+e^x\cdot\frac{1}{3}(1+4e^{3x})^{-2/3}\cdot 4e^{3x}\cdot(3x)'}{2+e^x\cdot\sqrt[3]{1+4e^{3x}}}=$$

$$=\cos 3\cdot\frac{e^x\cdot\sqrt[3]{1+4e^{3x}}+4e^{4x}(1+4e^{3x})^{-2/3}}{2+e^x\cdot\sqrt[3]{1+4e^{3x}}}.$$

Приклад 3. Знайти похідну y'_x: $\begin{cases} y=\cos t, \\ x=t^2+t+1. \end{cases}$

Розв'язання.

Так як $\begin{cases} y'_t=-\sin t, \\ x'_t=2t+1, \end{cases}$ то $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=-\dfrac{\sin t}{2t+1}.$

Приклад 4. Знайти похідну..Записати диференціал dy, якщо

$$y=arctg\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Розв'язання.

Так як

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)-\sqrt{1-x}\left(1-\sqrt{x}\right)'}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}}}{1-2\sqrt{x}+x+1-x}=$$

$$=\frac{-\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}+1-x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}\cdot 2\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{-\sqrt{x}+x+1-x}{4\sqrt{x-x^2}\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{x-x^2}},$$

то диференціал $dy=\dfrac{1}{4\sqrt{x-x^2}}dx$.

Приклад 5. Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, знайти похідну функції

$$y=\sqrt[5]{\frac{(x+1)^4}{2x+3}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x-3)^7}}$$

Розв'язання.

Пролологорифмуємо даний вираз та скористаємося властивостями логарифму.

$$\ln y = \frac{4}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{5}\ln(2x+3) + \ln(x^2+x+1) - 7\ln(x-3).$$

Знайдемо похіднупо x, вважаючи, що $y = y(x)$. Маємо

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{4}{5(x+1)} - \frac{2}{5(2x+3)} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x-3}.$$

$$y' = y\left(\frac{4}{5(x+1)} - \frac{2}{5(2x+3)} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x-3}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(x+1)^4}{2x+3}}\cdot\frac{x^2+x+1}{(x-3)^7}\cdot\left(\frac{4}{5(x+1)} - \frac{2}{5(2x+3)} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{7}{x-3}\right).$$

Приклад 6. Знайти похідну y'_x функции, задану параметрично:

$$x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ t \in (-\infty;+\infty).$$

Розв'язання.

Так як

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2} - t\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$y'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\cdot\frac{-\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}\cdot\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

то $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \operatorname{sgn} t.$

Приклад 7. Обчислити $y'(x_0)$ для функції $y(x)$, що задовільняє рівнянню $3x^4 - y^5 + 2xy = 0,$ якщо $x_0 = -1.$

Розв'язання.

Продиференціюємо обидві частини данної рівності, враховуючи, що у є функція від х:$12x^3 - 5y^4y' + 2(y + x\cdot y') = 0.$

З отриманої рівности виразему y':

$$y'(2x - 5y^4) = -12x^3 - 2y,$$

$$y' = \frac{12x^3 + 2y}{5y^4 - 2x}.$$

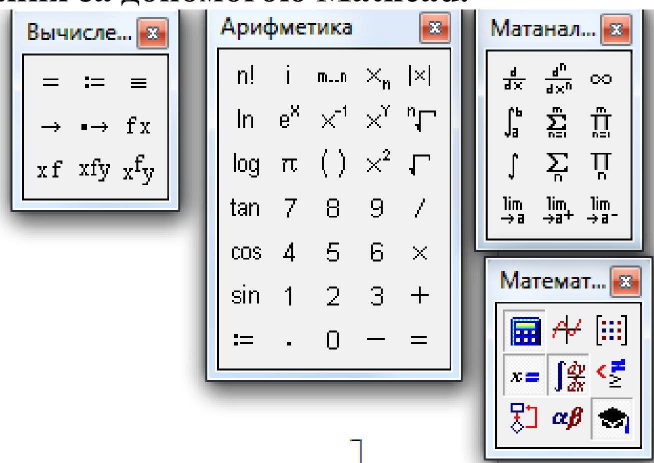
Для знаходження y_0, підставимо в данне рівняння $x = x_0 = -1$:

$$3 - y^5 - 2y = 0.$$

Так як зліва - монотонна функція, то рівняння може мати не більше одного рішення. Очевидно, це $y_0 = 1$.

Тоді $y'(-1) = \frac{-12+2}{5+2} = -\frac{10}{7}.$

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad.



$$y(x) := \frac{7 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 1}{\sqrt{1 - 4 \cdot x}}$$

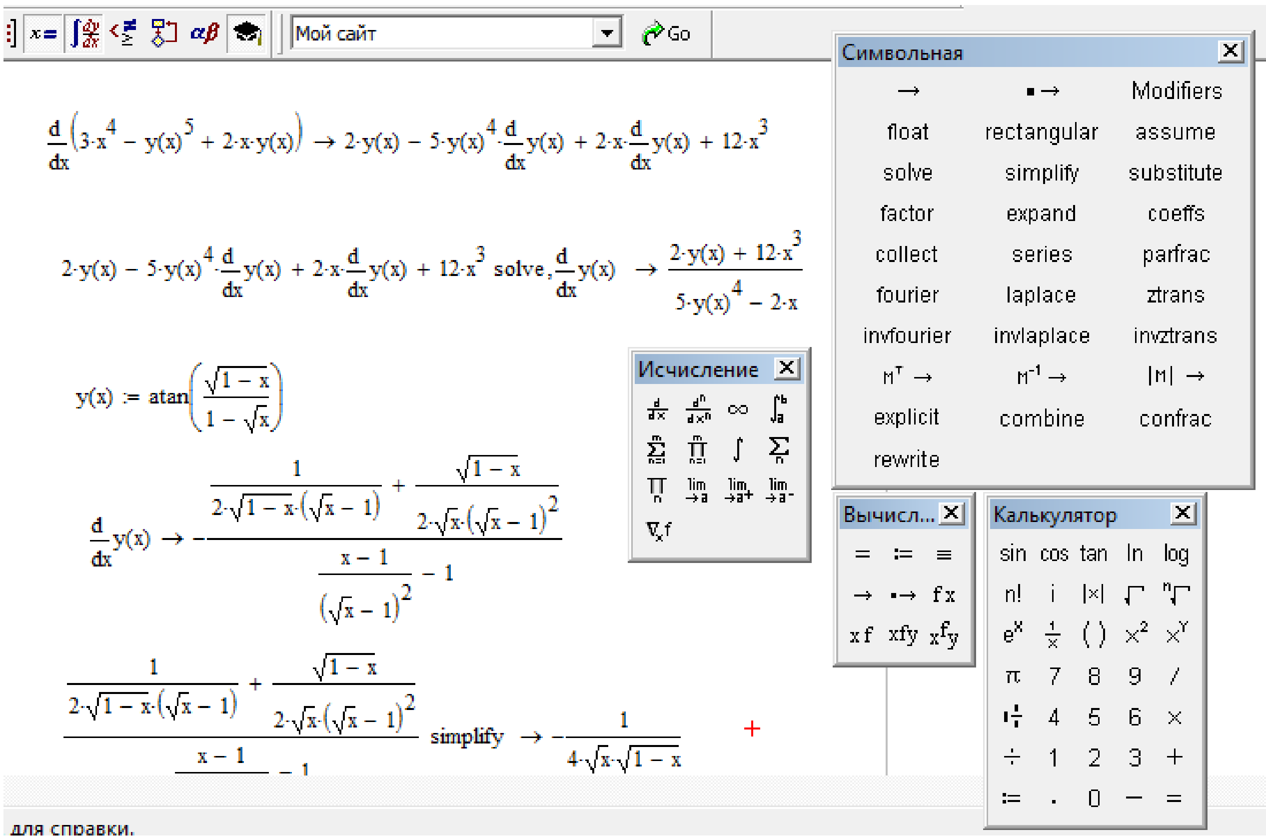
$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{\left(21 \cdot x^2 - 4\right)}{(1 - 4 \cdot x)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} + 2 \cdot \frac{\left(7 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 1\right)}{(1 - 4 \cdot x)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

$$y := \cos(3) \cdot \ln\left(2 + e^x \cdot \sqrt[3]{1 + 4 \cdot e^{3 \cdot x}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}y \rightarrow \cos(3) \cdot \frac{\left[\exp(x) \cdot (1 + 4 \cdot \exp(3 \cdot x))^{\left(\frac{1}{3}\right)} + 4 \cdot \frac{\exp(x)}{(1 + 4 \cdot \exp(3 \cdot x))^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \cdot \exp(3 \cdot x)\right]}{\left[2 + \exp(x) \cdot (1 + 4 \cdot \exp(3 \cdot x))^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right]}$$

$$y(t) := \cos(t) \qquad x(t) := t^2 + t + 1$$

$$y1(t) := \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)} \qquad y1(t) \rightarrow \frac{-\sin(t)}{(2 \cdot t + 1)}$$



Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Знайти похідну:

а) $y=\dfrac{2(3x^2+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y=\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$;

в) $y=\sqrt{x}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\right)$; г) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}$;

д) $y=(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$.

2. а) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$; б) $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)$; ;

в) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)$; г) $y=\dfrac{2x-1}{4}\cdot\arcsin\dfrac{2x-11}{3}$;

д) $y=\ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right)-e^{-2x}\cdot\arcsin e^{2x}$.

3. а) $y=\dfrac{(1+x^8)\cdot\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3^x-3}{2}$;

в) $y = 2\sqrt{x} - 4\ln^2(2+\sqrt{x})$; г) $y = \arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+16}}$;

д) $y = \dfrac{2\sqrt{2x-x^2}}{x-1} + \ln\dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

4. а) $y = \dfrac{(x^6-2)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$;

в) $y = \sqrt{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}$; г) $y = \dfrac{1}{4}\ln(x-1)\cdot \operatorname{arctg}x$;

д) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.

5. а) $y = \dfrac{4+3x^3}{x\cdot\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; б) $y = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg}e^x$;

в) $y = \ln^2(x+\cos x)$; г) $y = \dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}$;

д) $y = \ln(4x - \sqrt{16x^2-8x+2}\cdot\operatorname{arctg}(4x-1))$.

6. а) $y = \dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y = \dfrac{1}{\ln 4}\cdot\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$;

в) $y = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$; г) $y = \dfrac{1+x^2}{2x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

д) $y = (2x+4)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x+3}$.

7. а) $y = \dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}e^x)^3}$;

в) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$; г) $y = \dfrac{4+x^4}{x^3}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}$;

д) $y = \ln(1+\sqrt{1-e^{10x}})\cdot\arcsin e^{5x}$.

8. а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\ln(e^x+1)+\dfrac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$;

в) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}\cdot\arccos x$;

д) $y=\sqrt{-3+4x-x^2}\cdot\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x}$.

9. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=2(\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{2^x-1})$;

в) $y=\log_4\log_2 \mathrm{tg}x$; г) $y=\dfrac{2}{x-3}\cdot\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}$;

д) $y=\sqrt{9x^2-12x+3}\cdot\arcsin\dfrac{1}{3x-2}$.

10. а) $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; б) $y=2\cdot\dfrac{\ln(\sqrt{1+e^x}-1)}{\ln(\sqrt{1+e^x}+1)}$;

в) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{3x+2}$; г) $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}}{x}$;

д) $y=\dfrac{\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)}{x^2-2x+3}$.

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №8.

Навчальна мета заняття : вироблення у студентів навичок застосування похідних до дослідження функціїї та побудови її графіка за допомогою середовища MathCad.

Кількість годин - 2.
Місце проведення – комп'ютерний класс.

Навчальні питання:
1. Дослідження функції та побудова її графіка.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Варіанти завдань та методичні вказівки для самостійної роботи студентів. Ч. 1. – Житомир: ЖДТУ, 2014. – 50 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

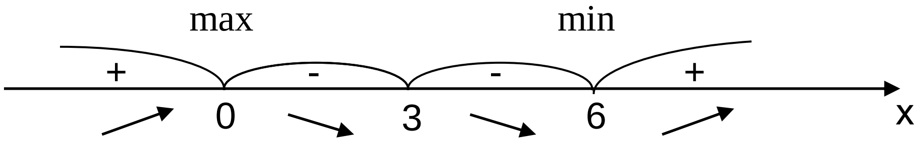
Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв’язання типового прикладу. За аналогією розв’язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв’язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв’язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Дослідити функцію та побудувати її графікі $y = \frac{x^2}{x-3}$.

1. Область визначення функції : $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
2. $y(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-3} = \frac{x^2}{-x-3}$. Дана функція не є ні парною, ні непарною, ні періодичною.
3. При $x = 0$, $y = 0$. Графік проходить через початок координат.
4. Знаходимо :

$$y^{/} = \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^{/} = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}.$$

$$\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 6; \quad x_3 = 3 - \text{критичні точки}$$



$$y(0) = 0; \quad y(6) = 12 \quad (0;0) - \max, \qquad (6;12) - \min$$

5. Знаходимо

$$y^{//} = \left(\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}\right)^{/} = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2 \cdot (x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x}{(x-3)^3} = \frac{18}{(x-3)^3}.$$

Друга похідна в нуль не перетворюється і зазнає розриву при $x = 3$. У проміжку $(-\infty; 3)$ маємо $y^{//} < 0$, тобто в цьому проміжку крива опукла вгору; в проміжку $(3; +\infty)$ маємо $y^{//} > 0$, тобто в цьому проміжку крива опукла вниз. Точок перегину немає.

6. Знайдемо асимптоти графіка функції.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 3 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою.

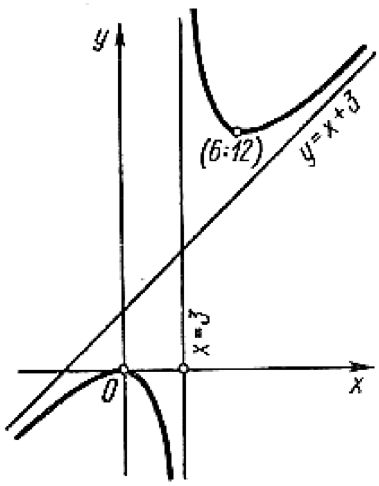
Знаходимо похилу асимптоту :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x-3} = 3.$$

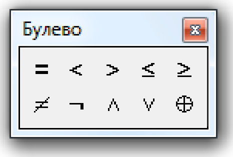
Пряма $y = x + 3$ є похилою асимптотою графіка.

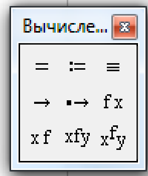
7. На основі знайдених даних будуємо графік функції

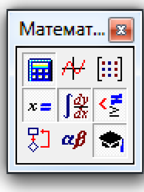


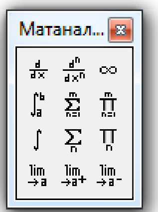
Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad.

$y(x) := \dfrac{x^2}{x-3}$

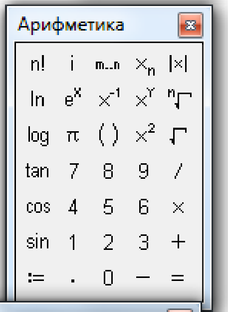








1. Область визначення функції : $x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$.
2. $y(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-3} = \frac{x^2}{-x-3}$. Дана функція не є ні парною, ні непарною, ні періодичною.
3. При $x = 0$, $y = 0$. Графік проходить через початок координат.
4. Знаходимо :



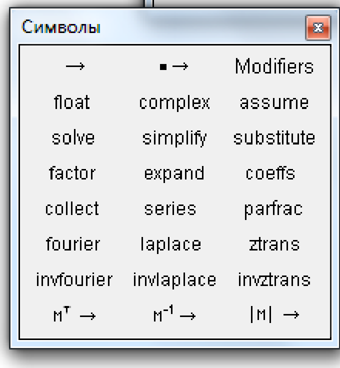
$y1(x) := \dfrac{d}{dx} y(x)$

$y1(x) \rightarrow 2 \cdot \dfrac{x}{(x-3)} - \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

$y1(x) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$y1(-1) = 0.437$ $\quad y1(1) = -1.25$ $\quad y1(4) = -8$ $\quad y1(7) = 0.438$

$xmin := 0 \qquad y(xmin) = 0$



5. Знаходимо

$y2(x) := \dfrac{d}{dx} y1(x)$

$y2(x) \rightarrow \dfrac{2}{(x-3)} - 4 \cdot \dfrac{x}{(x-3)^2} + 2 \cdot \dfrac{x^2}{(x-3)^3}$

$y2(x) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow$

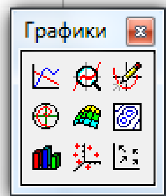
Друга похідна в нуль не перетворюється і зазнає розриву при $x = 3$. У проміжку $(-\infty;3)$ маємо $y^{//} < 0$, тобто в цьому проміжку крива опукла вгору; в проміжку $(3;+\infty)$ маємо $y^{//} > 0$, тобто в цьому проміжку крива опукла вниз. Точок перегину немає.

6. Знайдемо асимптоти графіка функції.

$\lim_{x \to 3^+} y(x) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to 3^-} y(x) \rightarrow -\infty$

Оскільки $\lim_{x \to 3 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою.

Знаходимо похилу асимптоту :

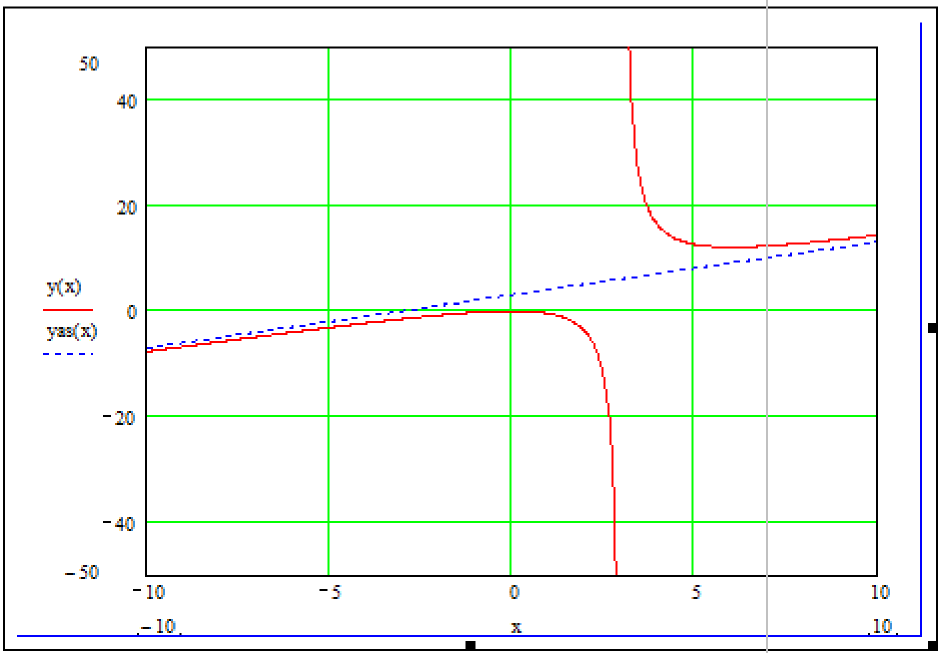


$k(x) := \lim_{x \to \infty} \dfrac{y(x)}{x}$

$k(x) \rightarrow 1 \qquad b(x) := \lim_{x \to \infty} (y(x) - k(x) \cdot x) \qquad b(x) \rightarrow 3$

Пряма $y = x + 3$ є похилою асимптотою графіка. $\quad yas(x) := x + 3$

7. На основі знайдених даних будуємо графік функції



Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Дослідити функцію та побудувати її графік.

<u>Варіант завдання.</u>

1. а) $y = 3x^3 - 9x^2 + 5x + 1$ б) $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$

2. а) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ б) $y = \dfrac{1 - x}{x + 1}$

3. а) $y = x^3 - \dfrac{15}{2}x^2 - 12x + \dfrac{37}{2}$ б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

4. а) $y = x^3 - 24x^2 + 23$ б) $y = \dfrac{1 + x}{x^3 + 1}$

5. а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$ б) $y = \dfrac{4x^2}{x^2 + 3}$

6. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 50$ б) $y = \dfrac{-8x}{x^2 + 4}$

7. а) $y = x^3 + 9x^2 + 15x + 2$ б) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

8. а) $y = x^3 - 12x - 9$ б) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

9. а) $y = 3x^3 - 9x^2 - 21x + 164$ б) $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$

10. а) $y = x^3 + 9x^2 - 48x - 56$ б) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема № 8. Основи аналізу функції кількох змінних.
Лабораторне заняття №9.

Навчальна мета заняття: опанувати навичками дослідження функцій багатьох змінних за допомогою середовища Mathcad; закріплення теоретичних знань за темою.

Кількість годин – 2.
Місце проведення - комп'ютерний клас.

Навчальні питання:
1. Частинні похідні першого та другого порядку.
2. Повний диференціал функції двох змінних.

Література, методичне та матеріально – технічне забезпечення занять:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану
6. Вища математика. Лабораторний практикум / І. В. Ветлугіна, К. М. Дубовик, М. В. Кайдаш, Є. Ю. Місюра, Є. В. Рєзнік, Т. В. Сілічова. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2009. – 224 с.

Заняття проводиться в комп'ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп'ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп'ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Знайти частинні похідні першого та другого порядків функції $z(x,y)=e^{x^3y}+2xy$, переконатися, що змішанні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ рівні.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{x^3y}+2xy\right)'_x=3x^2y*e^{x^3y}+2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{x^3y}+2xy\right)'_y=x^3*e^{x^3y}+2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(3x^2y*e^{x^3y}+2y\right)'_x=6xy*e^{x^3y}+3x^2y*3x^2y*e^{x^3y}$$
$$=6xy*e^{x^3y}+9x^4y^2*e^{x^3y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^3*e^{x^3y}+2x\right)'_y=x^3*x^3*e^{x^3y}=x^6*e^{x^3y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3x^2y*e^{x^3y}+2y\right)'_y=3x^2*e^{x^3y}+3x^5y*e^{x^3y}+2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(x^3*e^{x^3y}+2x\right)'_x=3x^2*e^{x^3y}+3x^5y*e^{x^3y}+2$$

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)'_x=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy$$

Приклад 3. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7=0$.

Розв’язання.

Позначимо $F(x,\ y,\ z)=x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x,\ y,\ z)=3x^2y$, $F_y'(x,\ y,\ z)=x^3-4y-\cos z$, $F_z'(x,\ y,\ z)=6z+y\sin z$.

За формулами $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,\ y,\ z)}{F_z'(x,\ y,\ z)}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2y}{6z+y\sin z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^3-4y-\cos z}{6z+y\sin z}.$$

Приклад 3. Найти du и d^2u для функции $u=2x^3y+y^3$.

Розв’язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^3+3y^2;$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=6x^2ydx+(2x^3+3y^2)dy.$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=12xy,\quad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=6y,\quad \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=6x^2.$$

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2=12xydx^2+12x^2dxdy+6ydy^2.$$

Приклад 4. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $u=2x^2y-3xyz^4+z^2$. Знайти $z''_{xy}(1;-1;\ 2)$.

Розв’язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4xy-3yz^4,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^2-3xz^4,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-12xyz^3+2z,$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(4xy-3yz^4)=4y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2x^2 - 3xz^4)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (-12xyz^3 + 2z)'_z = -36xyz^2 + 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 3yz^4) = 4x - 3z^4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x^2 - 3xz^4)'_x = 4x - 3z^4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = (4xy - 3yz^4)'_z = -12yz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = (-12xyz^3 + 2z)'_x = -12yz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x^2 - 3xz^4)'_z = -12xz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = (-12xyz^3 + 2z)'_y = -12xz^3;$$

$u''_{xy}(1; -1; 2) = 4 - 3 \cdot 2^4 = 4 - 48 = -44.$

Приклад виконання завдання за допомогою Mathcad

Частинні похідні першого та другого порядків від функції

$$z(x,y) := e^{x^3 \cdot y} + 2 \cdot x \cdot y$$

$$\frac{d}{dx} z(x,y) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot y \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 2 \cdot y$$

$$\frac{d}{dy} z(x,y) \rightarrow x^3 \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 2 \cdot x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z(x,y) \rightarrow 6 \cdot x \cdot y \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 9 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} z(x,y) \rightarrow x^6 \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right)$$

Перевіримо, що змішанні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ рівні.

$$z(x,y) := e^{x^3 \cdot y} + 2 \cdot x \cdot y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy} z(x,y)\right) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 3 \cdot x^5 \cdot y \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 2$$

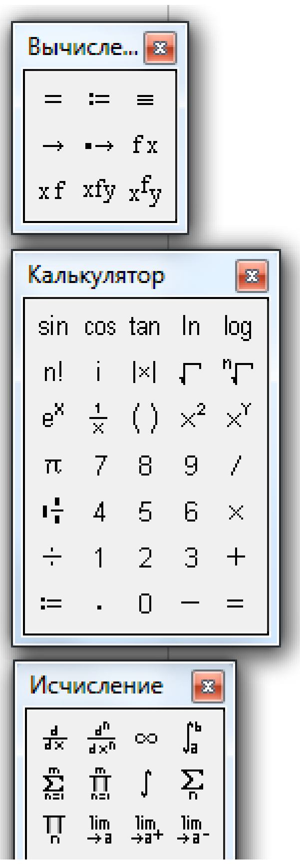
$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} z(x,y)\right) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 3 \cdot x^5 \cdot y \cdot \exp\left(x^3 \cdot y\right) + 2$$

$$z(x,y) := \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

$$Zx(x,y) := \frac{d}{dx} z(x,y) \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)} \qquad Zy(x,y) := \frac{d}{dy} z(x,y) \rightarrow 2 \cdot \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$dz := 2 \cdot \frac{x \cdot dx}{\left(x^2 + y^2\right)} + 2 \cdot \frac{y \cdot dy}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$+$$



$$F(x,y,z) := x^3 \cdot y - 2 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - y \cdot \cos(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y,z) = 3 \cdot x^2 \cdot y \qquad \frac{\partial}{\partial x} F(x,y,z) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot y \qquad \frac{\partial}{\partial x} F(x,y,z) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot y$$

$$Zx(x,y,z) := \frac{-\frac{\partial}{\partial x} F(x,y,z)}{\frac{\partial}{\partial z} F(x,y,z)} \qquad Zx(x,y,z) \rightarrow -\frac{3 \cdot x^2 \cdot y}{6 \cdot z + y \cdot \sin(z)}$$

$$Zy(x,y,z) := \frac{-\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,z)}{\frac{\partial}{\partial z} F(x,y,z)} \qquad Zy(x,y,z) \rightarrow \frac{4 \cdot y - x^3 + \cos(z)}{6 \cdot z + y \cdot \sin(z)}$$

$$u(x,y) := 2\cdot x^3\cdot y + y^3$$

$$ux(x,y) := \frac{d}{dx}u(x,y) \rightarrow 6\cdot x^2\cdot y \qquad uy(x,y) := \frac{d}{dy}u(x,y) \rightarrow 2\cdot x^3 + 3\cdot y^2$$

$$du(x,y) := ux(x,y)\cdot dx + uy(x,y)\cdot dy$$

$$du(x,y) \rightarrow dy\cdot\left(2\cdot x^3 + 3\cdot y^2\right) + 6\cdot dx\cdot x^2\cdot y$$

$$u2xy(x,y) := \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}u(x,y)\right) \rightarrow 6\cdot x^2$$

$$u2x(x,y) := \frac{d}{dx}ux(x,y) \rightarrow 12\cdot x\cdot y \qquad u2y(x,y) := \frac{d}{dy}uy(x,y) \rightarrow 6\cdot y$$

$$d2u(x,y) := u2x(x,y)\cdot dx^2 + 2\cdot u2xy(x,y)\cdot dx\cdot dy + u2y(x,y)\cdot dy^2$$

$$d2u(x,y) \rightarrow 12\cdot y\cdot dx^2\cdot x + 12\cdot dx\cdot dy\cdot x^2 + 6\cdot y\cdot dy^2$$

$$u(x,y,z) := 2\cdot x^2\cdot y - 3\cdot x\cdot y\cdot z^4 + z^2$$

$$uz(x,y,z) := \frac{d}{dz}u(x,y,z) \rightarrow 2\cdot z - 12\cdot x\cdot y\cdot z^3$$

$$ux(x,y,z) := \frac{d}{dx}u(x,y,z) \rightarrow 4\cdot x\cdot y - 3\cdot y\cdot z^4 \qquad uy(x,y,z) := \frac{d}{dy}u(x,y,z) \rightarrow 2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot z^4$$

$$u2z(x,y,z) := \frac{d}{dz}uz(x,y,z) \rightarrow 2 - 36\cdot x\cdot y\cdot z^2$$

$$u2x(x,y,z) := \frac{d}{dx}ux(x,y,z) \rightarrow 4\cdot y \qquad u2y(x,y,z) := \frac{d}{dy}uy(x,y,z) \rightarrow 0$$

$$u2xy(x,y,z) := \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}u(x,y,z)\right) \rightarrow 4\cdot x - 3\cdot z^4$$

$$u2xz(x,y,z) := \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dx}u(x,y,z)\right) \rightarrow -12\cdot y\cdot z^3$$

$$u2zy(x,y,z) := \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dy}u(x,y,z)\right) \rightarrow -12\cdot x\cdot z^3$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Знайти частинні похідні першого та другого порядків функції $z = f(x, y)$ переконатися, що змішанні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ рівні. Знайти повний диференціал функції.

1. $z = 2x^3 y - 4xy^5$;

2. $z = x^2 y \sin x - 3y;$
3. $z = arctgx + \sqrt{y};$
4. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2;$
5. $z = 5xy^4 + 2x^2 y^7;$
6. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3;$
7. $z = \ln(3x^2 - 2y^2);$
8. $z = 5xy^2 - 3x^3 y^4;$
9. $z = \arcsin(x + y);$
10. $z = arctg(2x - y);$

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №10.

Навчальна мета заняття: вироблення у здобувачів вищої освіти навичок дослідження функцій багатьох змінних за допомогою середовища Mathcad; закріплення теоретичних знань за темою.

Кількість годин – 2.
Місце проведення - комп'ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Локальний та умовний екстремум функції двох змінних.
2. Найменьше та найбільше значення функції в замкненій області.

Література, методичне та матеріально – технічне забезпечення занять:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв’язання типового прикладу. За аналогією розв’язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв’язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Знайти точки екстремума функції

$$u = z^3 - x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2 - 4x + 6y + 2.$$

Розв'язання.

Знайдемо стаціонарні точки функції: $\frac{\partial u}{\partial x} = -2x - 4$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6y + 6$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3z$. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x - 4 = 0, \\ -6y + 6 = 0, \\ 3z^2 - 3z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

Отримали дві стаціонарні точки: $M_1(-2;\ 1;\ 0)$ и $M_2(-2;\ 1;\ 1)$. Перевіримо, чи є вони точками екстремума.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z - 3,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

$$\Delta_1(x;\ y;\ z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad \Delta_2(x;\ y;\ z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_3(x;y;z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 6z-3\end{vmatrix}=36(2z-1).$$

$\Delta_1(M_1)=-2<0,\quad \Delta_2(M_1)=12>0,\quad \Delta_3(M_1)=-36<0.$

Тобто, $M_1(-2;1;0)$ є точкою максимума.

$\Delta_1(M_2)=-2<0,\quad \Delta_2(M_2)=12>0,\quad \Delta_3(M_2)=36>0$, тобто $M_2(-2;1;1)$ не є точкою екстремума.

Приклад 2. Знайти умовний екстремум функції $u=x^2+2y^2-$ $-3xy+3x-6y+2$ за умови $x+y-3=0$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x;y;\lambda)=x^2+2y^2-3xy+3x-6y+2+\lambda(x+y-3).$$

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції

$L'_x=2x-3y+3+\lambda$, $L'_y=4y-3x-6+\lambda$, $L'_\lambda=x+y-3$.

Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}2x-3y+3+\lambda=0,\\ 4y-3x-6+\lambda=0,\\ x+y-3=0.\end{cases}$$

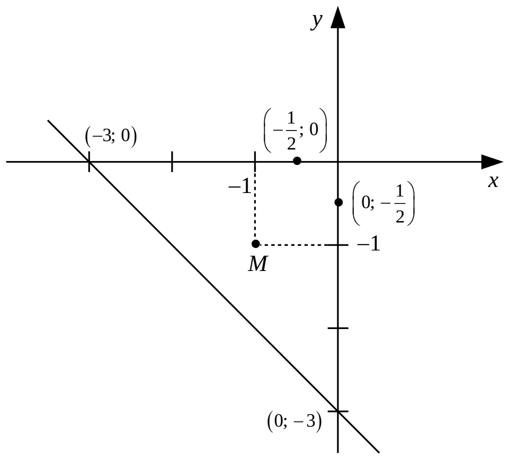
Отримали $x_0=1$, $y_0=2$, $\lambda_0=1$. Маємо $\varphi'_x\equiv\varphi'_y\equiv 1$, $L''_{xx}(1;2;1)=2$, $L''_{xy}(1;2;1)=-3$, $L''_{yy}(1;2;1)=4$.

$$\Delta(1;2;1)=\left(L''_{xx}(\varphi'_y)^2-2L''_{xy}\cdot\varphi'_x\cdot\varphi'_y+L''_{yy}\left(\varphi'_y\right)^2\right)\Big|_{(1;2;1)}=$$

$=2-2(-3)+4=12>0$, тобто $M(1;2)$ є точкою умовного максимуму.

Приклад 3. Визначити найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в області $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y\ge -3$.

Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції: $z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},\quad z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,\quad z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1.$$

$$z' = 0:\ 2x + 1 = 0,\ x = -\frac{1}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію $z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізку $-3 \le x \le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z' = (3x^2 + 9x + 6)' = 6x + 9$.

$z' = 0$: $6x + 9 = 0$, $x = -\frac{3}{2} \in [-3, 0]$.

$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4}$,

$z(-3) = 3\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-3) + 6 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0; -3)$ і $(-3; 0)$; $z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1; -1)$.

Приклад виконання завдання за допомогою середовища Mathcad

Знайти екстремуми функції:

$u(x,y,z) := z^3 - x^2 - 3\cdot y^2 - 1.5\cdot z^2 - 4\cdot x + 6\cdot y + 2$

$ux(x,y,z) := \frac{\partial}{\partial x} u(x,y,z) \rightarrow -2\cdot x - 4$

$uy(x,y,z) := \frac{\partial}{\partial y} u(x,y,z) \rightarrow 6 - 6\cdot y$

$uz(x,y,z) := \frac{\partial}{\partial z} u(x,y,z) \rightarrow -3.0\cdot z + 3\cdot z^2$

Given

$ux(x,y,z) = 0$

$uy(x,y,z) = 0$

$uz(x,y,z) = 0$

$Find(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} -2.0 & -2.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}$

$x1 := -2$ $\quad x2 := -2$

$y1 := 1$ $\quad y2 := 1$

$z1 := 0$ $\quad z2 := 1$

$$u2z(x,y,z) := \frac{d}{dz}uz(x,y,z) \rightarrow 6 \cdot z - 3.0$$

$$u2x(x,y,z) := \frac{d}{dx}ux(x,y,z) \rightarrow -2 \qquad u2y(x,y,z) := \frac{d}{dy}uy(x,y,z) \rightarrow -6$$

$$u2xy(x,y,z) := \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}u(x,y,z)\right) \rightarrow 0 \qquad u2xz(x,y,z) := \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dx}u(x,y,z)\right) \rightarrow 0$$

$$u2zy(x,y,z) := \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dy}u(x,y,z)\right) \rightarrow 0$$

$$\Delta1(x,y,z) := u2x(x,y,z) \qquad \Delta1(x,y,z) \rightarrow -2$$

$$\Delta2(x,y,z) := \left|\begin{pmatrix} u2x(x,y,z) & u2xy(x,y,z) \\ u2xy(x,y,z) & u2y(x,y,z) \end{pmatrix}\right| \rightarrow 12$$

$$\Delta3(x,y,z) := \left|\begin{pmatrix} u2x(x,y,z) & u2xy(x,y,z) & u2xz(x,y,z) \\ u2xy(x,y,z) & u2y(x,y,z) & u2zy(x,y,z) \\ u2xz(x,y,z) & u2zy(x,y,z) & u2z(x,y,z) \end{pmatrix}\right|$$

$$\Delta3(x,y,z) \rightarrow 72.0 \cdot z - 36.0 \qquad \Delta1(x1,y1,z1) = -2 \qquad \Delta1(x2,y2,z2) = -2$$

$$\Delta3(x1,y1,z1) = -36 \qquad \Delta3(x2,y2,z2) = 36 \qquad \Delta2(x1,y1,z1) = 12 \qquad \Delta2(x2,y2,z2) = 12$$

М1 – точка максимума

$$u(x,y) := x^2 + 2 \cdot y^2 - 3 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x - 6 \cdot y + 2 \qquad g(x,y) := x + y - 3$$

$$F(x,y,\lambda) := u(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

$$Fx(x,y,\lambda) := \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,\lambda) \rightarrow \lambda + 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3$$

$$Fy(x,y,\lambda) := \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,\lambda) \rightarrow \lambda - 3 \cdot x + 4 \cdot y - 6$$

$$F\lambda(x,y,\lambda) := \frac{\partial}{\partial \lambda}F(x,y,\lambda) \rightarrow x + y - 3$$

Given

$Fx(x,y,\lambda) = 0$

$Fy(x,y,\lambda) = 0$

$F\lambda(x,y,\lambda) = 0$

$$Find(x,y,\lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \rightarrow 1$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \rightarrow 1$

$Fxx(x,y,\lambda) := \frac{d}{dx} Fx(x,y,\lambda) \rightarrow 2$ $\qquad$ $Fxy(x,y,\lambda) := \frac{d}{dy} Fx(x,y,\lambda) \rightarrow -3$

$Fyy(x,y,\lambda) := \frac{d}{dy} Fy(x,y,\lambda) \rightarrow 4$

$$\Delta(x,y,\lambda) := Fxx(x,y,\lambda) - 2 \cdot Fxy(x,y,\lambda) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x,y)\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\right) + Fyy(x,y,\lambda) \rightarrow 12$$

Тобто M(1,2) - точка максимуму

$z(x,y) := x^2 + y^2 - x \cdot y + x + y$ $\qquad$ $x \le 0$ $\qquad$ $y \le 0$ $\qquad$ $x + y \ge -3$

1) Знайдемо стаціонарні точки

Given

$\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) = 0$

$\frac{\partial}{\partial y} z(x,y) = 0$

$Find(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ M(1,1)

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$

$z(y) := y^2 + y$

$\frac{d}{dy} z(y) = 0 \text{ solve}, y \rightarrow -\frac{1}{2}$

$z(-0.5) = -0.25$ $\qquad$ $z(-3) = 6$ $\qquad$ $z(0) = 0$

При $y=0$ маємо

$z(x) := x^2 + x \qquad \frac{d}{dx}z(x) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow -\frac{1}{2}$

$z(-0.5) = -0.25 \qquad z(-3) = 6 \qquad z(0) = 0$

При $x+y=-3$, або $y=-3-x$ маємо функцію

$z(x) := 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 6$

$\frac{d}{dx}z(x) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow -\frac{3}{2}$

$z\left(\frac{-3}{2}\right) = -0.75 \qquad z(0) = 6 \qquad z(-3) = 6$

Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0;-3)$ і $(-3;0)$; $z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1;-1)$.

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Дослідити на екстремум:

1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.
2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.
4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.
7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
9. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.
10. $z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2$.

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x,y)$ в області D, що обмежена заданими лініями.

1. $z = 3x + y - xy, \quad D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$.
2. $z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0$.
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2$.
4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0$.
6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.
7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6$.

8. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2,\ \ D: x=0,\ \ x=1,\ \ y=0,\ \ y=1$.

9. $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1,\ \ D: x=0,\ \ y=0,\ \ x+y-3=0$.

10. $z=x^2+2xy-10,\ \ D: y=0,\ \ y=x^2-4$.

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

ТЕМА № 6. Інтегральне числення функції однієї змінної.

Навчальна мета заняття: вироблення у здобувачів вищої освіти навичок знаходження невизначених інтегралів за допомогою середовища Mathcad; закріплення теоретичних знань за темою.

Лабораторне заняття №11-12.

Кількість годин – 4.
Місце проведення - комп'ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Метод зведення до табличних на основі незалежності його від вибору змінної інтегрування.
2. Метод підстановки,
3. Метод інтегрування частинами.

Література, методичне та матеріально – технічне забезпечення занять:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

Заняття проводиться в комп'ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп'ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп'ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. $\int \frac{dx}{9-x^2}$.

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \int \frac{dx}{-\left(x^2-4\right)} = -\int \frac{dx}{x^2-3^2} = -\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

Приклад 2. $\int \left(4x^3 + 5\cos x\right)\, dx$.

$$\int \left(4x^3 + 5\cos x\right)\, dx = \int 4x^3\, dx + \int 5\cos x\, dx = 4\int x^3\, dx + 5\int \cos x\, dx.$$

$$\int \left(4x^3 + 5\cos x\right)\, dx = 4\frac{x^4}{4} + 5\sin x + C = x^4 + 5\sin x + C.$$

Приклад 3. $\int \left(4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2}\right) dx$.

$$\int \left(4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2}\right) dx = \int 4x\, dx - \int 5x^{-2}\, dx + \int \frac{1}{2}3^x\, dx =$$

$$= 4\int x dx - 5\int x^{-2}\, dx + \frac{1}{2}\int 3^x\, dx = 4\frac{x^2}{2} - 5\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\, 3^x \ln 3 + C =$$

$$= 2x^2 + \frac{5}{x} + \frac{3^x \ln 3}{2} + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл, результат перевірити диференціюванням*:* $\int e^{3-4x} dx$.

Розв'язання.

Нехай $3-4x = t$, продиференцюємо обидві частини рівняння

$$d(3-4x) = dt, \quad (3-4x)' dx = dt, \quad -4dx = dt, \quad dx = \frac{1}{4}dt.$$

отримаємо

$$\int e^{3-4x} dx = \int e^t \left(-\frac{1}{4}dt\right) = -\frac{1}{4}\int e^t dt = -\frac{1}{4}e^t + C = -\frac{1}{4}e^{3-4x} + C.$$

Перевірка:

$$\left(-\frac{1}{4}e^{3-4x}+C\right)' = -\frac{1}{4}(e^{3-4x})' = -\frac{1}{4}\cdot e^{3-4x}(3-4x)' =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{3-4x}(-4) = e^{3-4x}$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл, результат перевірити диференціюванням: $\int \frac{2^{\arcsin x}+x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{2^{\arcsin x}+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Для першого інтеграла введемо заміну змінної $\arcsin x = t,\ d(\arcsin x) = dt,\ (\arcsin x)'dx = dt,\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt.$

Тоді

$$\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int 2^t dt = \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{\arcsin x}}{\ln 2} + C_1.$$

Для другого інтеграла $1-x^2 = t,\ d(1-x^2) = dt,\ (1-x^2)'dx = dt,$ $-2x\,dx = dt,\ x\,dx = -\frac{1}{2}dt$, тоді

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_2 =$$

$$= -t^{\frac{1}{2}} + C_2 = -\sqrt{t} + C_2 = -\sqrt{1-x^2} + C_2.$$

В результаті ми отримали

$$\int \frac{2^{\arcsin x}+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2^{\arcsin x}}{\ln 2} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Перевірка:

$$\left(\frac{2^{\arcsin x}}{\ln 2} - \sqrt{1-x^2} + C\right)' = \frac{2^{\arcsin x}\cdot \ln 2\cdot(\arcsin x)'}{\ln 2} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' =$$

$$=\frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2^{\arcsin x}+x}{\sqrt{1-x^2}}-\textit{верно.}$$

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл, результат перевірити диференціюванням: $\int(3^x+2^x)^2dx$.

Розв'язання.

$$\int(3^x+2^x)^2dx=\int((3^x)^2+2\cdot 3^x\cdot 2^x+(2^x)^2)dx=$$

$$=\int(9^x+2\cdot 6^x+4^x)dx=\int 9^x dx+2\int 6^x dx+\int 4^x dx=$$

$$=\frac{9^x}{\ln 9}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{4^x}{\ln 4}+C.$$

Перевірка:

$$\left(\frac{9^x}{\ln 9}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{4^x}{\ln 4}+C.\right)'=\frac{9^x\cdot\ln 9}{\ln 9}+2\cdot\frac{6^x\cdot\ln 6}{\ln 6}+\frac{4^x\cdot\ln 4}{\ln 4}=$$

$$=9^x+2\cdot 6^x+4^x=(3^x+2^x)^2-\textit{верно.}$$

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл, результат перевірити диференціюванням: $\int(4+3x)\cdot e^{\frac{4x}{3}}dx.$

Розв'язання.

Застосуємо формулу інтегрування за частинами. Нехай $u=4+3x$, *а* $d\upsilon=e^{\frac{4x}{3}}dx$. Тоді $\int d\upsilon=\int e^{\frac{4x}{3}}dx,\quad \upsilon=\frac{3}{4}\int e^{\frac{4x}{3}}d\frac{4x}{3},\quad \upsilon=\frac{3}{4}e^{\frac{4x}{3}}+C.$

$$\int(4+3x)\cdot e^{\frac{4x}{3}}dx=(4+3x)\cdot\frac{3}{4}e^{\frac{4x}{3}}-\int\frac{3}{4}e^{\frac{4x}{3}}d(4+3x)=$$

$$=\frac{3}{4}(4+3x)e^{\frac{4x}{3}}-\frac{3}{4}\int e^{\frac{4x}{3}}(4+3x)'dx=\left(3+\frac{9x}{4}\right)e^{\frac{4x}{3}}-\frac{3}{4}\int e^{\frac{4x}{3}}\cdot 3dx=$$

$$=\left(3+\frac{9x}{4}\right)e^{\frac{4x}{3}}-\frac{9}{4}\int e^{\frac{4x}{3}}dx=\left(3+\frac{9x}{4}\right)e^{\frac{4x}{3}}-\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{4}\int e^{\frac{4x}{3}}d\frac{4x}{3}=$$

$$=\left(3+\frac{9x}{4}\right)e^{\frac{4x}{3}}-\frac{27}{16}e^{\frac{4x}{3}}+C=\left(3+\frac{9x}{4}-\frac{27}{16}\right)e^{\frac{4x}{3}}+C=$$

$$\left(\frac{9x}{4}+\frac{21}{16}\right)e^{\frac{4x}{3}}+C.$$

Перевірка:

$$\left(\left(\frac{9x}{4}+\frac{21}{16}\right)e^{\frac{4x}{3}}+C\right)' = \left(\frac{9x}{4}+\frac{21}{16}\right)' e^{\frac{4x}{3}} + \left(\frac{9x}{4}+\frac{21}{16}\right)\cdot\left(e^{\frac{4x}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{9}{4}e^{\frac{4x}{3}} + \left(\frac{9x}{4}+\frac{21}{16}\right)\cdot e^{\frac{4x}{3}}\cdot\frac{4}{3} = \frac{9}{4}e^{\frac{4x}{3}} + \left(3x+\frac{7}{4}\right)\cdot e^{\frac{4x}{3}} =$$

$$= \left(\frac{9}{4}+3x+\frac{7}{4}\right)e^{\frac{4x}{3}} = (3x+4)\cdot e^{\frac{4x}{3}}$$

Приклад виконання завдання за допомогою середовища Mathcad

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx \rightarrow \frac{\ln(x+3)}{6}-\frac{\ln(x-3)}{6} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x+3)}{6}-\frac{\ln(x-3)}{6}\right) \rightarrow \frac{1}{6\cdot(x+3)}-\frac{1}{6\cdot(x-3)}$$

$$\frac{1}{6\cdot(x+3)}-\frac{1}{6\cdot(x-3)} \text{ collect } \rightarrow -\frac{1}{x^2-9}$$

$$\int \left(4\cdot x^3+5\cdot\cos(x)\right)dx \rightarrow 5\cdot\sin(x)+x^4 \qquad \frac{d}{dx}\left(5\cdot\sin(x)+x^4\right) \rightarrow 5\cdot\cos(x)+4\cdot x^3$$

$$\int \left[4\cdot x+\left(\frac{3^x}{2}\right)-\frac{5}{x^2}\right]dx \rightarrow \frac{3^x}{2\cdot\ln(3)}+\frac{5}{x}+2\cdot x^2 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{3^x}{2\cdot\ln(3)}+\frac{5}{x}+2\cdot x^2\right) \rightarrow 4\cdot x-\frac{5}{x^2}+\frac{3^x}{2}$$

$$\int e^{3-4\cdot x}\,dx \rightarrow -\frac{e^{3-4\cdot x}}{4} \qquad \frac{d}{dx}-\frac{e^{3-4\cdot x}}{4} \rightarrow e^{3-4\cdot x}$$

$$\int \frac{2^{\operatorname{asin}(x)}+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \rightarrow \frac{2^{\operatorname{asin}(x)}}{\ln(2)}-\sqrt{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{2^{\operatorname{asin}(x)}}{\ln(2)}-\sqrt{1-x^2}\right) \rightarrow \frac{2^{\operatorname{asin}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \left(3^x+2^x\right)dx \rightarrow \frac{2^x}{\ln(2)}+\frac{3^x}{\ln(3)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln(2)}+\frac{3^x}{\ln(3)}\right) \rightarrow 2^x+3^x$$

$$\int (4+3\cdot x)\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}\,dx \rightarrow e^{\frac{4\cdot x}{3}}\cdot\left(\frac{9\cdot x}{4}+\frac{21}{16}\right) \qquad \frac{d}{dx}\left[e^{\frac{4\cdot x}{3}}\cdot\left(\frac{9\cdot x}{4}+\frac{21}{16}\right)\right] \rightarrow \frac{9\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}}{4}+\frac{4\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}\cdot\left(\frac{9\cdot x}{4}+\frac{21}{16}\right)}{3}$$

$$\frac{9\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}}{4}+\frac{4\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}\cdot\left(\frac{9\cdot x}{4}+\frac{21}{16}\right)}{3} \text{ collect } \rightarrow 3\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}\cdot x+4\cdot e^{\frac{4\cdot x}{3}}$$

Варіанти завдань для самостійного розв’язання.

Знайти невизначені інтеграли, результат перевірити диференціюванням:

1. а) $\int \sin\frac{x}{3}dx$; б) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$;

в) $\int \sqrt[3]{2\sin x-7}\cos x dx$; г) $\int \frac{4x-5}{x^2+5}dx$;

д) $\int xe^{2x}dx$.

2. а) $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$; б) $\int \frac{7x-(\mathrm{arctg}x)^3}{1+x^2}dx$;

в) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{16+3\cos x}}$; г) $\int \frac{xdx}{x^4+0.25}$;

д) $\int x^2\cos x dx$;

3. а) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-2)}$; б) $\int \frac{x^2+\ln x}{x}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; г) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

д) $\int \mathrm{arctg}x dx$.

4. а) $\int \cos(3x+2)dx$; б) $\int \frac{4x^5-(\ln x)^3}{x}dx$;

в) $\int \sqrt{x^2+16x-7}(x+8)dx$; г) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx$;

д) $\int \ln x dx$.

5. а) $\int e^{\frac{x}{3}}dx$; б) $\int \frac{3+7x^4}{x}dx$;

в) $\int 3x^3e^{2-x^4}dx$; г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}$;

д) $\int x^2\sin x dx$.

6. а) $\int e^{-2x}dx$; б) $\int \frac{15x}{4+9x^2}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$; г) $\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin 2x}dx$;

д) $\int x\cdot\ln x dx$.

7. а) $\int 2^{3x-1}dx$; б) $\int \frac{7xdx}{6+5x^2}dx$;

в) $\int \sqrt{e^{2x}+4}\cdot e^{2x}dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$;

д) $\int \ln^2 xdx$.

8. а) $\int 3^{10x}dx$; б) $\int \frac{9x}{7+3x^2}dx$;

в) $\int (2x+5)\sin(x^2+5x)dx$; г) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$;

д) $\int \arcsin xdx$.

9. а) $\int e^{-3x}dx$; б) $\int (x^2+3x-2)^5(2x+3)dx$;

в) $\int e^x\sin(1-e^x)dx$; г) $\int \frac{2xdx}{x^2-100}$;

д) $\int 2x\cos 2xdx$.

10. а) $\int (1-2x)^{10}dx$; б) $\int (x^3-6x^2+5)(3x^2-12x)dx$;

в) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$; г) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-16}}$;

д) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №13.

Кількість годин – 2.

Місце проведення - комп’ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Формула Ньютона-Лейбніца обчислення визначеного інтеграла.
2. Метод підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Література, методичне та матеріально – технічне забезпечення занять:

1. Конспект лекцій.

2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

Заняття проводиться в комп'ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп'ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп'ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 e^x dx$;

Розв'язання.

$$\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e$$;

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^4 \frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2-1}dx$

Розв'язання.

Під знаком інтеграла неправильний дріб. Застосуємо схему Горнера та отримаємо

$$\frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x^2-1)+1}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = x+2+\frac{1}{x^2-1},$$

Тоді даний інтеграл можна представити у вигляді

$$\int_2^4 \frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2-1}dx = \int_2^4 (x+2)dx + \int_2^4 \frac{dx}{x^2-1} = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^4 =$$

$=10+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$;

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx$

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}(\sin^3\frac{\pi}{2}-\sin^3 0)=\frac{1}{3}.$$

Приклад 4. . Методом заміни змінної обчислити визначений інтеграл:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$$

Розв'язання.

Введемо заміну: $t=x^2+1$. Тоді $dt=2xdx,\quad \frac{dt}{2}=xdx$ нові межі інтегрування $t=1$ при $x=0$ та $t=4$ при $x=\sqrt{3}$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^4\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}\right)=\frac{1}{3}(8-1)=\frac{7}{3};$$

Приклад 5. . Методом заміни змінної обчислити визначений інтеграл:
Розв'язання.

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\left|\begin{array}{c}\ln x=t\\ \frac{dx}{x}=dx\\ x=1,\ t=0\\ x=e,\ t=1\end{array}\right|=\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1^2-0^2\right)=\frac{1}{2}$$

Приклад 6. Методом заміни змінної обчислити визначений інтеграл:
Розв'язання.

$$\int_1^e\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\left|\begin{array}{c}e^x=t\\ e^x dx=dt\\ x=0,\ t=1\\ x=1,\ t=e\end{array}\right|=\int_1^e\frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{arctg}t\Big|_1^e=\mathrm{arctg}e-\mathrm{arctg}1=$$

$$=\mathrm{arctg}e-\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 7. Використовуючи метод інтегрування за частинами, обчислити визначений інтеграл
Розв'язання.

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^{2x}; & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2} = \frac{3-e}{4e^2}.$$

Приклад 8. Використовуючи метод інтегрування за частинами, обчислити визначений інтеграл

Розв'язання.

$$\int_{0}^{\pi} x^2\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^2; & du = 2xdx \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{vmatrix} = x^2\sin x\Big|_{0}^{\pi} - 2\int_{0}^{\pi} x\sin x dx =$$

$$= -2\int_{0}^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -2\left(-x\cos x\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\cos x dx\right) =$$

$$= -2\left(-\pi + 0 + \sin x\Big|_{0}^{\pi}\right) = -2\pi$$

Приклад виконання завдання за допомогою середовища Mathcad

$$\int_{1}^{2} e^x\,dx \rightarrow e^2 - e$$

$$\int_{2}^{4} \frac{x^3 + 2\cdot x^2 - x - 1}{x^2 - 1}\,dx \rightarrow \ln(3) - \frac{\ln(5)}{2} + 10$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^2\cdot\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{3}$$

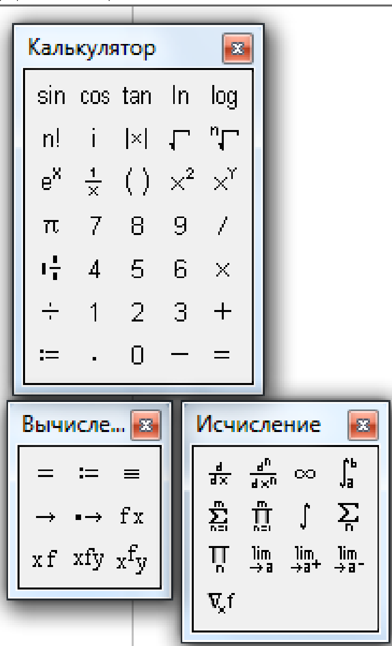
$$\int_{0}^{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{x^2 + 1}\,dx \rightarrow \frac{7}{3}$$

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\int_{1}^{e} \frac{e^x}{1 + e^{2\cdot x}}\,dx \rightarrow \operatorname{atan}\left(e^e\right) - \operatorname{atan}(e)$$

$$\int_{-1}^{0} x\cdot e^{2\cdot x}\,dx \rightarrow \frac{3\cdot e^{-2}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{\pi} x^2\cdot\cos(x)\,dx \rightarrow -2\cdot\pi$$



Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Обчислити визначений інтеграл методом заміни змінної.

1. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\cos^2 x dx$.

2. $\int_{0}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

3. $\int_{0}^{e} \frac{dx}{x(1+1nx)}$.

4. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

5 . $\int_{1}^{e} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

6. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^3 x dx.$

7. $\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{1-1nx}}{x}dx$. 8. $\int_{4}^{9}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 9. $\int_{1}^{e}\sin^{3}xdx$ 10. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца.

1. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{4dx}{x^2+5}$ 2. $\int_{-3}^{0}\frac{3dx}{\sqrt{25+5x}}$ 3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{7dx}{4\sin^2 3x}$ 4. $\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi}3\sin\frac{x}{2}dx$ 6. $\int_{3}^{8}6\sqrt{x+1}dx$ 7. $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}}12\operatorname{ctg}3x\,dx$ 8. $\int_{0}^{1}\frac{2dx}{\sqrt{4-3x}}$

9. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$ 10. $\int_{1}^{e}\left(3+\frac{2}{x}\right)dx$

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №14-15.

Кількість годин – 4.
Місце проведення - комп’ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Обчислення площі криволінійної трапеції.
2. Обчислення об'єму тіла обертання.
3. Обчислення довжини дуги.

Література, методичне та матеріально – технічне забезпечення занять:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану
3. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
4. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=(x-1)^2$, $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину даних ліній:

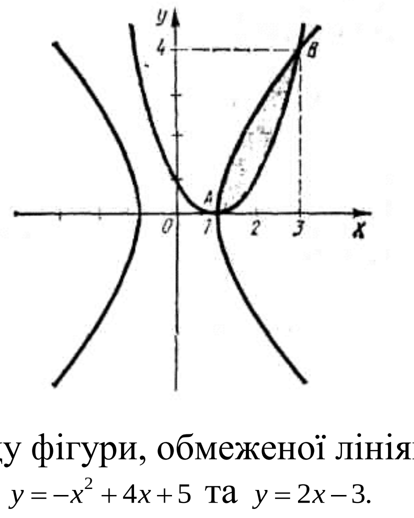
$$\mathrm{x}^2-\frac{(\mathrm{x}-1)^4}{2}=1, \text{ або } \mathrm{x}^4-4\mathrm{x}^3+4\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+3=0.$$

Розв'язуємо отримане рівняння: $x_1=1,\ \ x_2=3\ \ и\ \ y_1=0,\ \ y_2=4$.

Таким чином, криві перетинаються у точках $A(1;\ 0)\ и\ B(3;\ 4)$. Тоді

$$S=\int_1^3\left[\sqrt{2(x^2-1)}-(x-1)^2\right]dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_1^3-\frac{1}{3}\left[(x-1)^3\right]_1^3=$$

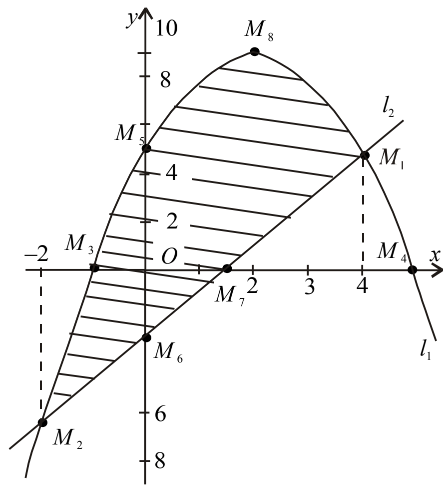
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[3\sqrt{8}+\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\right]-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\approx 4{,}58\ \ (кв.\ ед.)$$



Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y=-x^2+4x+5 \text{ та } y=2x-3.$$

Розв'язання.



Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою .

$$l\begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ буде така:

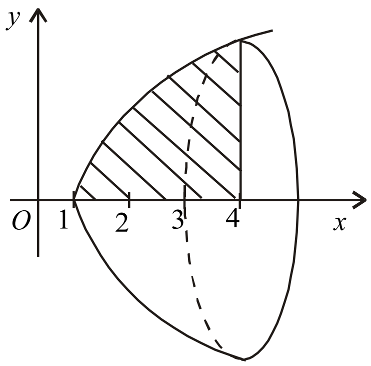
$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

Приклад 3. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох фігури, обмеженої лініями $y^2=3x-3$, x = 1, x = 4.

Розв’язання.

У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями.



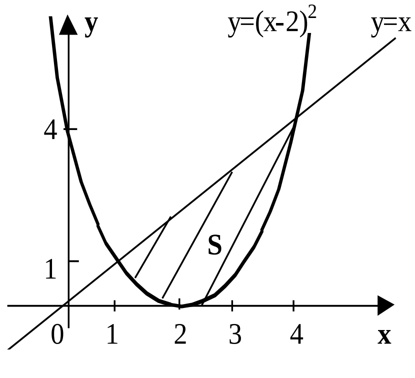
За формулою $V_x = \pi\int\limits_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx$ об'єм тіла буде таким:
$$V = \pi\int\limits_1^4 y^2 dx = \pi\int\limits_1^4 \left(3x-3\right)dx = \frac{3\pi}{2}\left(x-1\right)^2\Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi.$$

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмежену лініями $y=(x-2)^2$ $y=x$.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину даних ліній
$$\begin{cases} y=(x-2)^2, \\ y=x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(x-2)^2, \\ y=x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ y=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \quad x_2=4; \\ y_1=1, \quad y_2=4. \end{cases}$$

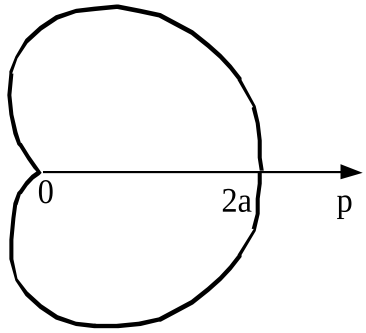
У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями.



$$S = \int\limits_1^4 (x-(x-2)^2)dx = \int\limits_1^4 (-x^2+5x-4)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Big|_1^4 =$$
$$= \left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right) = \frac{9}{2}.$$

Приклад 5. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої кардіоїдою
$$\rho = 2(1+\cos\varphi).$$

Розв'язання.



$$S=\int_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2(1+\cos\varphi))^2d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}4\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}4\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2})d\varphi=$$

$$=2\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=2\left(\frac{3}{2}\cdot2\pi+2\sin2\pi+\frac{1}{4}\sin4\pi-\left(\frac{3}{2}\cdot0+2\sin0+\frac{5}{4}\sin0\right)\right)=6\cdot\pi.$$

Приклад 6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox косинусоид в межах від $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ до $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв’язання.

Скористаємося формулою $V=\pi\int_a^b(f(x))^2dx,$ де

$f(x)=\cos x,\quad a=-\frac{\pi}{2},\quad b=\frac{\pi}{2}.$

$$V=\pi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\cdot dx=\pi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}(x+\frac{1}{2}\sin2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:
$x=0;\ x=2;\ y=2^x;\ y=2x-x^2$

Розв’язання.

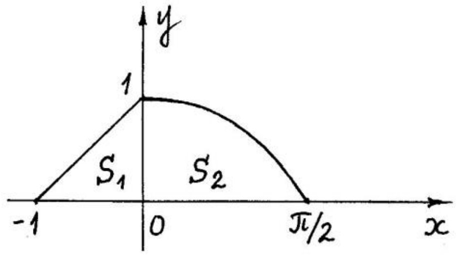
Так як $y_1>y_2$ при усіх значеннях $x\in[0;2]$, то

$$S=\int_0^2(2^x dx-(2x-x^2))dx=\frac{3}{\ln2}-\frac{4}{3}$$

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: :
$y_1=x+1,\ y_2=\cos x;\ y=0.$

Розв’язання:

У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями.



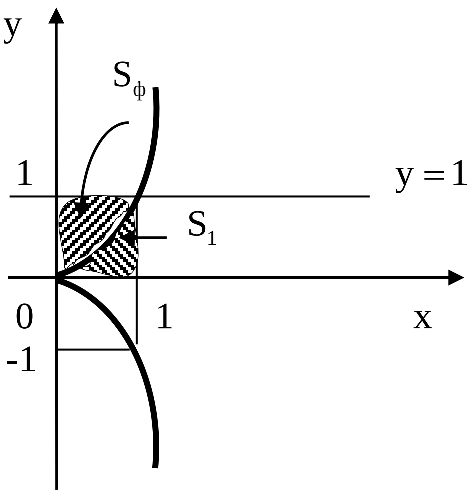
$$S=S_1+S_2=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x dx=\frac{3}{2}$$

Приклад 9.Обчислити площу фігури, обмежену лініями: $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$, прямою $y = 1$ та віссю Oy.

Розв'язання.

Побудуємо графіки даних функцій. Так як одна з ліній задана параметрично, то надаючи параметру довільні значення, складемо таблицю значень функції.

t	-2	-1	0	1	2
x	4	1	0	1	4
y	-8	-1	0	1	8



Таким чином, вважаючи $\begin{cases} y(t) = t^3, \\ x(t) = t^2 \end{cases}$ знайдемо $x'(t) = 2t$, підставимо знайдені вирази в формулу, попередньо обчисливши межі інтегрування по t:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = t^2 \Rightarrow t_1 = 0$$

(у нашому випадку $t_1 = \alpha$).

$$x = 1 \Rightarrow 1 = t^2 \Rightarrow t_2 = \pm 1$$

(у нашому випадку $t_2 = 1 = \beta$).

Тоді $S_ф = S_{кв.} - S_1$, так як $S_{кв.} = 1$ кв. од.;

$$S_1 = \left| \int_0^1 y(t) \cdot x'(t)\, dt \right| = \left| \int_0^1 t^3 \cdot 2t \cdot dt \right| = 2 \left| \int_0^1 t^4\, dt \right| = 2 \left| \frac{t^5}{5} \right\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = 2 \cdot \left| \frac{1}{5} \right| = \frac{2}{5}$$ (кв. од.).

$S_ф = 1 - 2/5 = 3/5$ кв. ед.

Приклад 10. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівнянням $y = 1/3\ x \cdot \sqrt{x}$ від початку координат до точки $B\left(12;\ 8 \cdot \sqrt{3}\right)$.

Розв'язання.

Знайдемо похідну функції $y = f(x) = 1/3\ x \cdot \sqrt{x}$, тобто

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\left(x^{1}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}$$

;

т. як. O(0; 0), $B\left(12;\ 8\cdot\sqrt{3}\right)\Rightarrow$ у нашому випадку $a=0;\ в=12.$

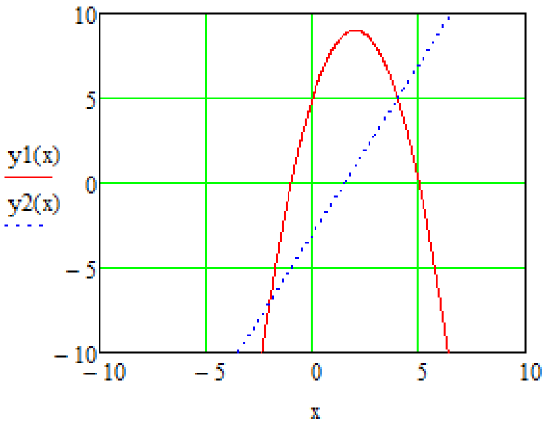
$$\alpha_{ов}=\int_0^{12}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx=\int_0^{12}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/2}dx=$$

$$=4\cdot\int_0^{12}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/2}d\left(1+\frac{x}{4}\right)=4\cdot\left.\frac{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{12}=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^{12}=\frac{8}{3}\cdot\left(1+3\right)\cdot\sqrt{1+3}-\frac{8}{3}\cdot1\cdot\sqrt{1}=\frac{8}{3}\cdot4\cdot2-\frac{8}{3}=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}.$$

Приклад виконання завдання за допомогою середовища Mathcad

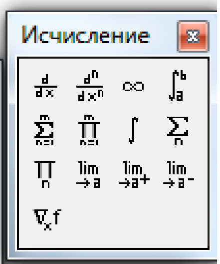
$y1(x) := -x^2 + 4 \cdot x + 5 \qquad y2(x) := 2 \cdot x - 3$

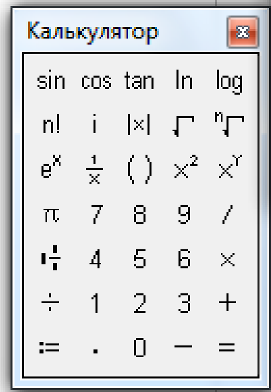


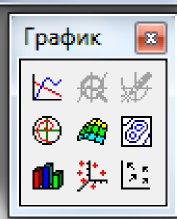
$y1(x) = y2(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$S := \int_{-2}^{4} (y1(x) - y2(x))\, dx$

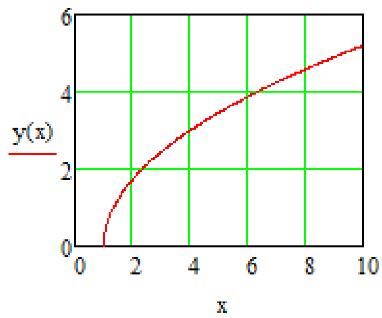
$S = 36$





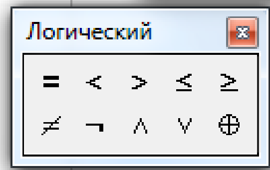


$y(x) := \sqrt{3 \cdot x - 3}$

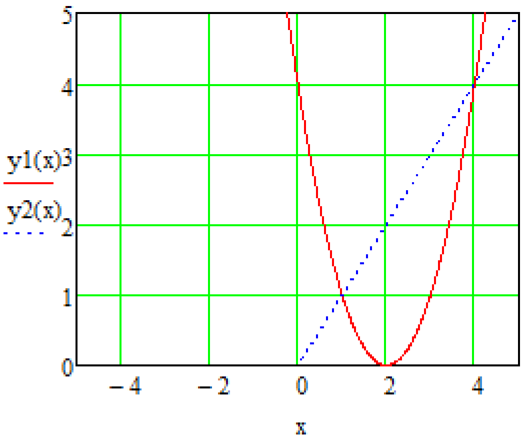


$Vx := \pi \cdot \int_{1}^{4} (y(x))^2\, dx$

$Vx = 42.412 \qquad Vx \rightarrow \frac{27 \cdot \pi}{2}$



$y1(x) := (x-2)^2$ $\qquad$ $y2(x) := x$

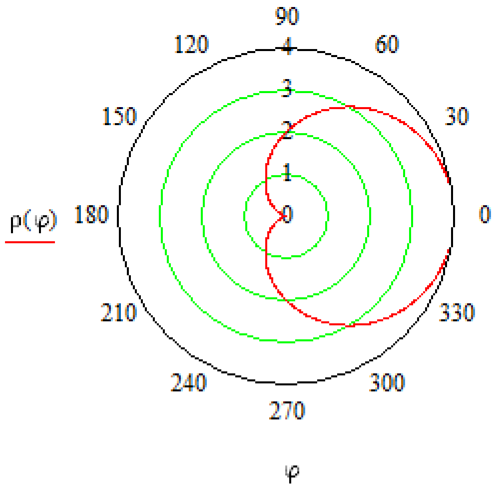


$y1(x) = y2(x)$ solve, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$S := \int_{1}^{4} (y2(x) - y1(x))\, dx$

$S = 4.5$

$\rho(\varphi) := 2\cdot(1 + \cos(\varphi))$



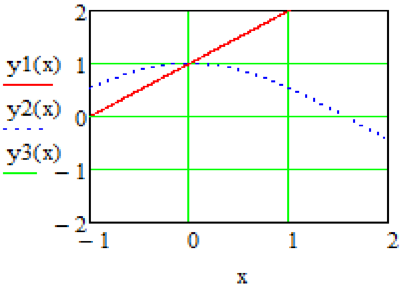
$S := \left[\int_{0}^{\pi} (\rho(\varphi))^2\, d\varphi\right]$

$S = 18.85$ $\qquad$ $S \rightarrow 6\cdot\pi$

$Vx := \pi\cdot\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\, dx$ $\qquad$ $Vx = 4.935$ $\qquad$ $Vx \rightarrow \frac{\pi^2}{2}$

$$V := \pi \cdot \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2\,dx \rightarrow \frac{\pi^2}{2}$$

$y1(x) := x + 1 \qquad y2(x) := \cos(x) \qquad y3(x) := 0$



Given

$y1(x) = y2(x)$

$Y := \mathrm{Find}(x) \rightarrow 0$

Given

$y1(x) = y3(x)$

$Y1 := \mathrm{Find}(x) \rightarrow -1$

$$S := \int_{-1}^{0} y1(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y2(x)\,dx$$

$S \rightarrow \frac{3}{2}$

Given

$y2(x) = y3(x)$

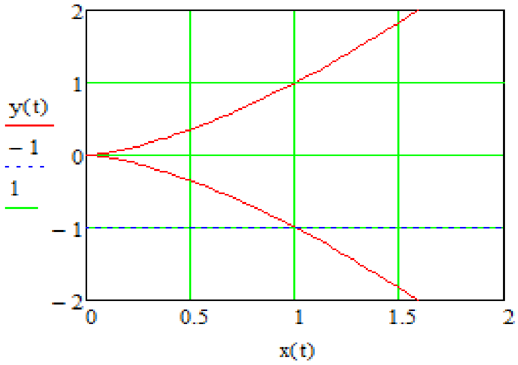
$Y2(x) := \mathrm{Find}(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$y(t) := t^3 \qquad x(t) := t^2$

Given

$y(t) = x(t)$

$T := \mathrm{Find}(t) \rightarrow (0\ \ 0\ \ 1)$



$x1(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

$$S := \left| \int_{0}^{1} y(t)\cdot x1(t)\,dt \right|$$

$S = 0.4$

$Sf := 1 - S \qquad Sf = 0.6$

$y(x) := \frac{x\cdot\sqrt{x}}{3}$

$y1(x) := \frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2}$

$$\alpha := \int_{0}^{12} \sqrt{1 + y1(x)^2}\,dx$$

$\alpha \rightarrow \frac{56}{3}$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

1.Обчислити площу фігури обмеженої лініями.

2. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої заданими лініями навколо осі ox (V_{ox}) та навколо осі oy (V_{oy}).

Варіант 1

1. $y=-x^2+4x-1;\ y=-x-1.$

2. $y=x-2;\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=1;\ y=0.$

Варіант 2

1. $y=x^2+3x+2;\quad y=5x+2.$

2. $y=2x-x^2;\quad y=x$.

Варіант 3

1. $y=-x^2+6x-5;\quad y=x-5$.

2. $y=x^2;\quad y=\sqrt{x}$.

Варіант 4

1. $y=-x^2+7x+3;\quad y=3-x.$

2. $y=-x^2+8;\quad y=x^2.$

Варіант 5

1. $y=-x^2+4;\quad x+2y+1=0.$

2. $y=2x^2-4x;\quad y=0.$

Варіант 6

1. $y=x^2+6x+7;\quad y=x+7.$

2. $y=-2x;\quad \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{3}=1;\quad y=0.$

Варіант 7

1. $y=\dfrac{1}{x^2+1};\quad y=\dfrac{x^2}{2}.$

2. $y=3x^2-30x;\quad y=0.$

Варіант 8

1. $y=x^3;\quad y=4x$

2. $y=-2x;\quad \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{8}=1;\quad y=0.$

Варіант 9

1. $y=-x^2-6x-5;\quad y=-x-5.$

2. $y = 2x - x^2; \quad y = x$.

Варіант 10

1. $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}; \quad y = x^2$.

2. $y = x^2 - 4x; \quad y = 0$.

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Лабораторне заняття №16.

Кількість годин – 2.
Місце проведення - комп’ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування.
2. Невласні інтеграли від обмежених функцій.

Література, методичне та матеріально – технічне забезпечення занять:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану
3. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -М.: Высшая школа, 2000. Ч.1 - 304 с; Ч.2 – 360 с.
5. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібни. – К.: Вища школа, 1993

Заняття проводиться в комп’ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп’ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп’ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типового прикладу. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи). Отриманий результат перевірити у Mathcad. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу та перевірку відповіді, отриману у Mathcad.

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Розв'язання.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (arctgb - arctg\,0) = \lim_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}$$

- інтеграл збіжний і дорівнює $\pi/2$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$$

Розв'язання.

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \ln^{-3}x \; d(\ln x) = \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln^{-2}x}{-2}\Bigg|_e^b =$$

$$- \quad = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{2\ln^2 x}\Bigg|_e^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{2\ln^2 b} - \frac{-1}{2\ln^2 e}\right) = \left(\frac{-1}{2\ln^2\infty} + \frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- інтеграл збіжний і дорівнює 1/2

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$$

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{-x} dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty} \left(-e^0 + e^{-a}\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} + e^0\right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-e^0 + \frac{1}{e^a}\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^b} + e^0\right) = (-1+\infty) + \left(-\frac{1}{\infty} + 1\right) = \infty -$$ інтеграл розбіжний

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

Розв’язання.

Інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ - невласний інтеграл другого роду, підінтегральна функція $\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не існує в т. $x = 1\,(\ln 1 = 0)$. Тоді,

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^e (\ln x)^{-\frac{1}{3}}d(\ln x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{3(\ln x)^{\frac{2}{3}}}{2}\right|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{3\sqrt[3]{(\ln x)^2}}{2}\right|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3\sqrt[3]{(\ln e)^2}}{2} - \frac{3\sqrt[3]{(\ln(1+\varepsilon))^2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{1}}{2} - \frac{3\sqrt[3]{(\ln 1)^2}}{2} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$ - інтеграл збіжний і дорівнює 3/2

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_{-1}^0 \frac{2+3x^2}{\sqrt[3]{x^8}}dx$$

Розв’язання.

Даний інтеграл – невласний інтеграл другого роду.

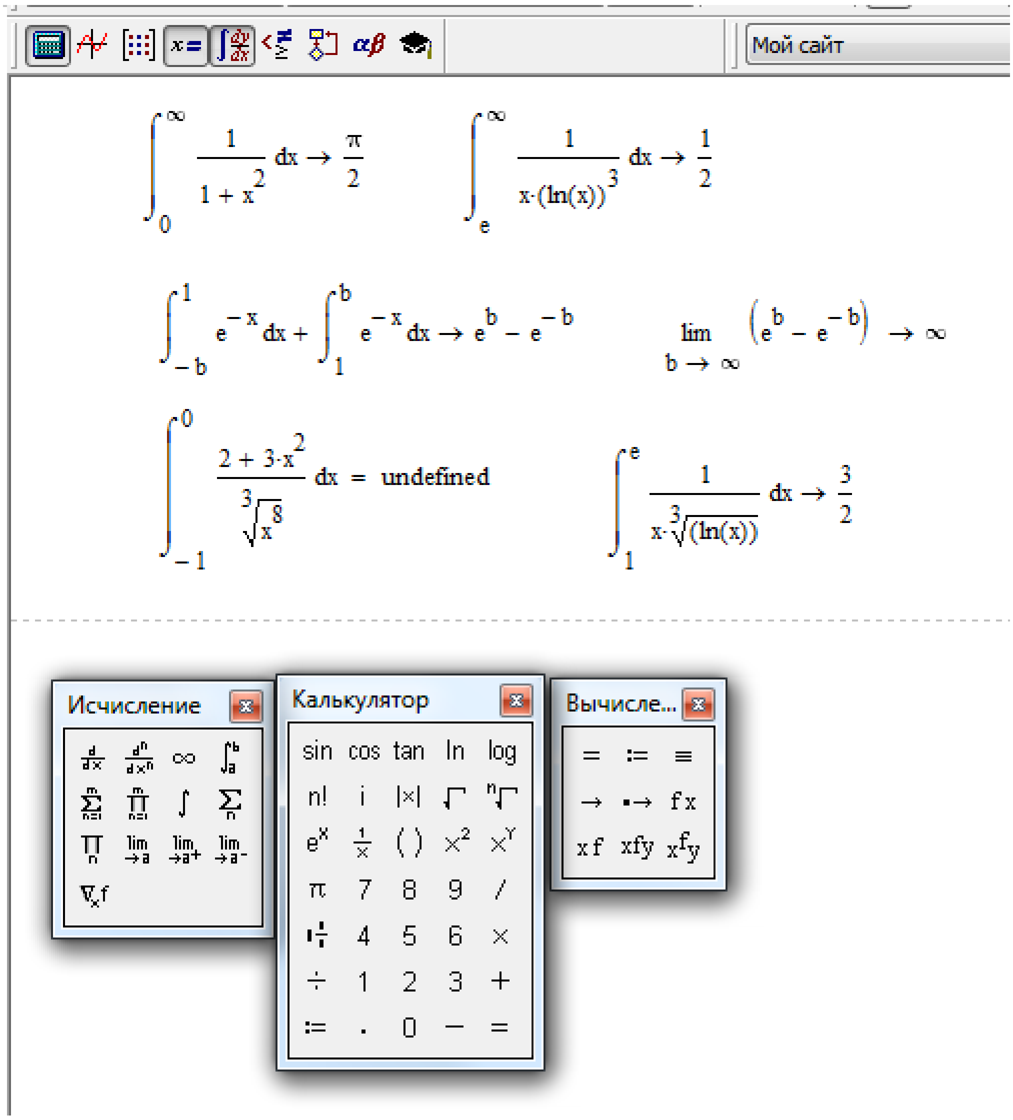
$$\int_{-1}^0 \frac{2+3x^2}{\sqrt[3]{x^8}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{2+3x^2}{\sqrt[3]{x^8}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}(2x^{-\frac{8}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}})dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\left(-\frac{2\cdot 3x^{-\frac{5}{3}}}{5} + \frac{3\cdot 3x^{\frac{1}{3}}}{1}\right)\right|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\left(-\frac{6}{5\sqrt[3]{x^5}} + 9\sqrt[3]{x}\right)\right|_{-1}^{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{6}{5\sqrt[3]{\varepsilon^5}} + \frac{6}{5} - 9\sqrt[3]{\varepsilon} + 9\right) = \frac{6}{5\sqrt[3]{0}} + \frac{6}{5} - 9\sqrt[3]{0} + 9 = \infty + \frac{6}{5} + 9 = \infty$$

- інтеграл розбіжний.

Приклад виконання завдання за допомогою середовища Mathcad



Варіанти завдань для самостійного розв’язання.

Обчислити невласні інтеграли:

1. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 2. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 3. $\int_0^1 \frac{dx}{x\ \ln x}$ 4. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$ 5 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$ 6. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$

7. $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$ 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ 9. $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^6+2}}$ 10. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$

III. **Заключна частина заняття.**

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна література.

1. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993

2. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Укрвїна», 2004. – 444 с.
3. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
4. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
5. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.
6. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
7. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Алгебра та геометрія для економістів. – К.:УФІМБ "Пошук", 1998.
8. Навчально-методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» : [галузь знань: Інформаційні технології; спец.: Кібербезпека; спец.: протидія кіберзлочинності; ступінь вищ. освіти: бакалавр; форма навчання: денна] / розроб. Ю.В. Гнусов. - Харків : ХНУВС. - 2016. - 14 с.

Допоміжна література.

1. Вища математика: Навч. – метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – Вид. 2- ге, перероб. і доп. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
2. Чубатюк В. М. Вища математика. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. – К.: ВД «Професіонал», 2006. – 432 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -М.: Высшая школа, 2000. Ч.1 - 304 с; Ч.2 – 360 с.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2002. – 288 с., с ил.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2002. – 256 с., с илл.
6. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2008. – 576 с.: ил. – (Высшее образование).

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу:

http://library.tneu.edu.ua/files/EVD/matematica/VM_pidr.pdf. - Назва з екрану.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу "Вища математика": Частина I. – Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2015. – 96 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3472/1/Methodychka_VM_Phys.pdf