

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ
СПРАВ**

**Кафедра інформаційних технологій та кібербезпеки
Факультет №4**

**МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
до лабораторних занять
із навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент освітньої програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**

**Спеціальність: 125 Кібербезпека
(«Безпека інформаційних та комунікаційних систем»)**

Харків 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 22.10.20 № 10

СХВАЛЕНО

Вченою радою факультету № 4
Протокол від 21.10.20 № 6

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 22. 10.20 № 6

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій та кібербезпеки
(протокол від 20.10.2020р. №19)

Розробники:

1. *Доцент кафедри, к.т.н. Можяев М.О.*
2. *Старший викладач кафедри Мелащенко О.П.*

Рецензенти:

1. *Професор кафедри обчислювальної техніки та програмування НТУ ХПІ, д.т.н., професор Кучук Г. А.*
2. *Доцент кафедри штучного інтелекту ХНУРЕ, к.т.н., доцент Чала Л. Є.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Номер та назва змістового модулю, номер та найменування теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		Лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр 3							
ТЕМА № 1. Основні поняття теорії множин	14	4		2	2	6	
ТЕМА № 2.Відношення та відображення	14	4		2	2	6	
ТЕМА № 3. Алгебра логіки. Нормальні форми	16	4		2	2	8	
ТЕМА № 4 Мінімізація формул алгебри логіки	16	4		2	2	8	
ТЕМА № 5. Елементи комбінаторного аналізу.	14	2		2	2	8	
ТЕМА № 6. Основні поняття теорії графів	16	4		2	2	8	
Всього за семестр 3	90	22		12	12	44	Екзамен

2. Методичні вказівки до лабораторних занять.

Тема № 1: Основні поняття теорії множин.

Лабораторне заняття №1.

Навчальна мета заняття : закріплення теоретичних знань з теорії множин; вироблення навичок розв'язання задач теорії множин. У пакеті Excel виконати операції над множинами.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – комп'ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Булева алгебра множин.
2. Операції над множинами та їх властивості.
3. Тотожні перетворення формул алгебри множин.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

Основна

1. Конспект лекцій.
2. Яковлев С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. "Дискретна математика", Харків: Изд. ХНУВС, 2008. – 88с.
3. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина Дискретна математика. Підручник. Видання третє, виправлене та доповнене – Львів. – 432 с.
4. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
5. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник — Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2013. — 487с.
6. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 160 с.
7. М. Ф. Бондаренко Комп'ютерна дискретна математика: підручник / Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. –Харків, «Компанія СМІТ», 2004- 485с.
8. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СХУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.

Допоміжна

10. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломєсц М.О. Дискретний аналіз. Учебний посібник.— Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007.—29 с.

11. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч. посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.
12. З.П. Халецька, В.В. Нарадовий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 128 с
13. Трохимчук, Р. М. Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

14. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. . [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
15. Р. М. Трохимчук М. С. Нікітченко ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf
16. Коноваленко О.Є. Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/38881/1/Book_2016_Konovalenko_Diskretna_matematika.pdf
17. Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 71 с.
18. Навчально-методичний посібник з курсу «Дискретна математика» для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп'ютерні системи та мережі» / Балоба С.І. // Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2012. – 92 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://dSPACE.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1>

Заняття проводиться в комп'ютерному класі. Кожний здобувач вищої освіти забезпечується окремим робочим місцем (комп'ютером, підключеним до мережі Internet). Методичне забезпечення надаються в електронному вигляді через локальну комп'ютерну мережу університету.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типових прикладів. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу.

Приклад 1. Спростити вираз, користуючись законами алгебри множин:

$$A \cap (\bar{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B.$$

Розв'язання.

Оскільки операція перетину множин має більш високий пріоритет, ніж об'єднання множин, то, якщо немає дужок, що змінюють пріоритет, спочатку виконується перетин, а потім об'єднання. Користуючись цим правилом і законом асоціативності визначимо порядок дій: $\left(A \overset{1}{\cap} (\bar{A} \cup B) \right) \overset{3}{\cup} \left((B \cup C) \overset{2}{\cup} B \right)$.

Виконаємо перетворення, вказуючи номер закону над знаком рівності:

Перша дія

Приклад	Формула
$A \cap (\bar{A} \cup B) =$ $= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) =$ $= \emptyset \cup (A \cap B) =$ $= A \cap B$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \emptyset = A$

Друга дія

Приклад	Формула
$(B \cup C) \cup B =$ $C \cup (B \cup B) =$ $= C \cup B$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $A \cup A = A$

Третя дія

Тобто, після перших двох дій ми отримали

Приклад	Формула
$(A \cap B) \cup (C \cup B) =$ $(A \cap B) \cup (B \cup C) =$ $= ((A \cap B) \cup B) \cup C =$ $= (B \cup (B \cap A)) \cup C = B \cup C.$	$A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $A \cap B = B \cap A$ $A \cup (A \cap B) = A$

Приклад 2. Довести, використовуючи закони алгебри множин, що $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Розв'язання:

Приклад	Формула
---------	---------

$A \cup (B \setminus A) =$ $= A \cup (B \cap \bar{A}) =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) =$ $= (A \cup B) \cap U = A \cup B.$	$B \setminus A = B \cap \bar{A}$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $A \cup \bar{A} = U$ $A \cap U = A$
---	---

Приклад 3. Спростити вираз $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

Розв'язання:

Використовуючи закони алгебри множин:

Приклад	Формула
$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} =$ $= [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} =$ $= U \cap B \cap C \cup \bar{B} \cup \bar{C} =$ $= (B \cap C) \cup \overline{(B \cap C)} = U$	Винести за дужки $B \cap C$ $A \cup \bar{A} = U$ $A \cap U = A$ $A \cup \bar{A} = U$

Приклад 4. Довести тотожність або спростити вираз
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Розв'язання.

Застосуємо формули алгебри множин до правої частини рівності

Приклад	Формула
$(A \cup B) \cap (A \cup C) =$ $= (A \cap A) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) =$ $= A \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) =$ $= A \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C) =$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $A \cap A = A$ $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$

Приклад 5. Довести тотожність $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Розв'язання.

Приклад	Формула
$(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$ $= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} =$ $= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$ $= ((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cup B) \cap \bar{B}) =$ $= ((A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})) \cup ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})) =$ $= (\emptyset \cup (B \cap \bar{A})) \cup ((A \cap \bar{B}) \cup \emptyset) =$ $= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) =$ $= (B \setminus A) \cup (A \setminus B).$	$A \setminus B = A \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \emptyset = A$ $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Приклад 6. Спростити вираз $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$

Розв'язання.

Приклад	Формула
$ \begin{aligned} &(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = \\ &= A \cap (\bar{A} \cup B) = \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) = \\ &= (A \cap B) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &A \cap B = B \cap A. \\ &(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \\ &(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \\ &A \cap \bar{A} = \emptyset \\ &A \cup \emptyset = A \end{aligned} $

Приклад 7. Довести рівність $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$.

Розв'язання.

Приклад	Формула
$ \begin{aligned} &\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)} \\ &= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A} \\ &= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ &\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ &A \cup B = B \cup A \\ &A \cap B = B \cap A \end{aligned} $

Приклад 8. Задано множини $U = \{a, b, c, d, e\}$; $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, e\}$.

Виконати операції над множинами за допомогою пакету Excel.

Розв'язання.

Об'єднання множин

1. У відповідності до завдання введемо елементи множини А та В у відповідні стовпчики електронної таблиці. Визначити потужність множин.

2. У стовпчик D копіюємо елементи множини А, у комірку, наступну за елементами множини А вводимо формулу $=\text{ЕСЛИ}(\text{ЕНД}(\text{ПОИСКПОЗ}(B2:D\$2:D\$5;0));B2;\text{ПОИСКПОЗ}(B2;O\$1))$

та застосовуємо її до всіх елементів множини В.

D6 fx $=\text{ЕСЛИ}(\text{ЕНД}(\text{ПОИСКПОЗ}(B2:D\$2:D\$5;0));B2;\text{ПОИСКПОЗ}(B2;O\$1))$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Множина А	Множина В	Універсум U	Об'єднання А та В			
2	a	a	a	a			
3	b	e	b	b			
4	c		c	c			
5	d		d	d			
6			e	#Н/Д			
7				e			

Після виконання усіх операцій «значення» «#Н/Д», можна видалити

A	B	C	D
Множина А	Множина В	Універсум U	Об'єднання А та В
a	a	a	a
b	e	b	b
c		c	c
d		d	d
		e	
			e

Перетин множин

1. У комірку стовпчика Е вводимо формулу
`=ЕСЛИ(ПОИСКПОЗ(A2;B2:B3;0)>0;A2)`

2. Розповсюджуємо формулу на всі елементи множини А.

Е3 `=ЕСЛИ(ПОИСКПОЗ(A3;B2:B3;0)>0;A3)`

A	B	C	D	E
Множина А	Множина В	Універсум U	Об'єднання А та В	Перетин А та В
a	a	a	a	a
b	e	b	b	#Н/Д
c		c	c	#Н/Д
d		d	d	#Н/Д
		e		
			e	

Після виконання усіх операцій «значення» «#Н/Д», можна видалити

F12

A	B	C	D	E
Множина А	Множина В	Універсум U	Об'єднання А та В	Перетин А та В
a	a	a	a	a
b	e	b	b	
c		c	c	
d		d	d	
		e		
			e	

Доповнення множин

Множина А.

1. У комірку стовпчика F ввести формулу
`=ЕСЛИ(ЕНД(ПОИСКПОЗ(C2;A$2:A$5;0));C2;ПОИСКПОЗ(C2;O$1))`

2. Розповсюджуємо формулу на усі елементи універсуму

Множина В.

1. У комірку стовпчика G ввести формулу
`=ЕСЛИ(ЕНД(ПОИСКПОЗ(C2;B$2:B$5;0));C2;ПОИСКПОЗ(C2;O$1))`

а. Розповсюджуємо формулу на усі елементи універсуму

2. Після виконання усіх операцій «значення» «#Н/Д», можна видалити

Різниця множин А та В.

1. У комірку стовпчика H вводимо формулу
`ЕСЛИ(ЕНД(ПОИСКПОЗ(A2;B$2:B$5;0));A2;ПОИСКПОЗ(A2;O$1))`

2. Розповсюджуємо формулу на всі елементи універсуму.

G2		fx =ЕСЛИ(ЕНД(ПОИСКПОЗ(C2;B\$2:B\$5;0));C2;ПОИСКПОЗ(C2;O\$1))					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Множина A	Множина B	Універсум U	Об'єднання A та B	Перетин A та B	Доповнення множини A	Доповнення множини B
2	a	a	a	a	a	#Н/Д	#Н/Д
3	b	e	b	b		#Н/Д	b
4	c		c	c		#Н/Д	c
5	d		d	d		#Н/Д	d
6			e			e	#Н/Д
7				e			

Симметрична різниця множин A та B.

- У комірку стовпчика I вводимо формулу =ЕСЛИ(ЕНД(ПОИСКПОЗ(A2;B\$2:B\$3;0));A2;ПОИСКПОЗ(A2;O\$1))
- Поширюємо введену формулу на всі елементи множини A.
- У першу не зайняту після кроку 2 комірку стовпчика I вводимо формулу =ЕСЛИ(ЕНД(ПОИСКПОЗ(B2;A\$2:A\$5;0));B2;ПОИСКПОЗ(B2;O\$1))
- Поширюємо введену формулу на всі елементи множини B.
- Після виконання всіх операцій комірки, які містять «значення» «#Н / Д», можна видалити.

J10		fx		
	A	B	C	H
1	Множина A	Множина B	Універсум U	Симметрична різниця
2	a	a	a	#Н/Д
3	b	e	b	b
4	c		c	c
5	d		d	d
6			e	#Н/Д
7				e

6. Знайти потужності всіх отриманих множин.

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Завдання 1. Спростити вирази, використовуючи формули алгебри множин.

- $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B)$.
- $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{A} \cap C$.
- $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
- $A \cap (\bar{A} \cup B) \cup B \cap (B \cap C) \cup B$.
- $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cup \bar{B})$.
- $A \cap (A \cap B) \cup \bar{B}$.

8. $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{B} \cup \bar{C})$.
9. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup A$.
10. $((A \cap B) \cup B) \cap \bar{A} \cup B$.

Завдання 2. Довести тотожність, 1) використовуючи закони алгебри множин та 2) за допомогою діаграм Ейлера-Венна:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
2. $A \cup A = A \cap A = A$; $A \setminus (BC) = (A \setminus B) \setminus C$;
3. $A \cap B = B \cap A$; $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
4. $A \cap B = B \cap A$; $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$;
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$;
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$;
8. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$; $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;
9. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
10. $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

Завдання 3.

Задано множини $P = \{a, b, c, d\}$; $Q = \{a, e, d, f, r, t\}$; $V = \{a, f, r, t, v, n\}$
 $R = \{a, b, d, e, f, g, s, j\}$, $N = \{1, 5, 7, 9, 10\}$; $M = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13\}$;
 $L = \{4, 9, 10, 12, 15, 16, 21\}$ $S = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$.

Виконати операції над множинами за допомогою пакету Excel.

№ варіанту	множини	№ варіанту	множини
1	P, Q	6	M, N
2	P, R	7	N, L
3	Q, R	8	M, S
4	P, V	9	R, V
5	Q, V	10	M, L

III. Заключна частина заняття.

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

ТЕМА № 2. Відношення та відображення.

Лабораторне заняття №2.

Навчальна мета заняття— закріплення теоретичних знань з теорії відношень; вироблення навичок розв'язання задач теорії відношень.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – комп'ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Декартовий добуток множин.
2. Властивості відношень.
3. Операції над відношеннями.
4. Бінарне відношення, їх властивості.
5. Відображення.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

Основна

1. Конспект лекцій.
2. Кондратьев А. И. Выполнение операций над множествами в пакете Excel : метод. указ. к лаб. работам / А. И. Кондратьев. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2005. – 31 с.
3. Яковлев С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. ”Дискретна математика”, Харків: Изд. ХНУВС, 2008. – 88с.
4. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина Дискретна математика. Підручник. Видання третє, виправлене та доповнене – Львів. – 432 с.
5. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
6. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник — Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2013. — 487с.
7. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 160 с.
8. М. Ф. Бондаренко Комп'ютерна дискретна математика: підручник / Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. –Харків, «Компанія СМІТ», 2004- 485с.
9. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СХУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
10. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.

Допоміжна

1. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоец М.О. Дискретний аналіз. Учбовий посібник.— Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007.—29 с.
2. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.
3. З.П. Халецька, В.В. Наратовий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 128 с

4. Трохимчук, Р. М. Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. — К.: Четверта хвиля, 2010. — 104 с. . [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
2. Р. М. Трохимчук М. С. Нікітченко ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf
3. Коноваленко О.Є. Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський — Харків : НТУ «ХПІ», 2016. — 84 с [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/38881/1/Book_2016_Konovalenko_Diskretna_matematika.pdf
4. Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 71 с.
5. Навчально-методичний посібник з курсу «Дискретна математика» для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп'ютерні системи та мережі» / Балоба С.І. // Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2012. — 92 с. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1>

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типових прикладів. За аналогією розв'язати приклади самостійно. Оформити звіт, який повинен містити вихідні дані, розв'язання прикладу.

Приклад 1. Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задано формулою $f(x) = x^2 - 1$. Визначити, чи є відображення f ін'єктивним, сюр'єктивним, бієктивним.

Розв'язання.

Область визначення функції — \mathbb{R} , область значінь функції — $[-1; +\infty)$.

1. f — відображення. Якщо $(x, y) \in f$ та $(x, z) \in f$, то $y = z$, так як $(x, y) \in f$, тобто $y = x^2 - 1$, $(x, z) \in f$, т.е. $z = x^2 - 1$.

2. Існують $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $x_1 \neq x_2$, але: $f(x_1) = f(x_2)$, наприклад $x_1 = 1, x_2 = -1$, тоді $f(x_1) = 0$ и $f(x_2) = 0$, тобто $x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$. Таким чином, це неін'єктивне відображення.

3. Так як область значень функції $[1; +\infty)$ не співпадає з \mathbb{R} , то відображення не сюр'єктивне.

Приклад 2. Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задано формулою $f(x) = x^4$. Чи є відображення ін'єктивним, сюр'єктивним?

Розв'язання.

Так як $x_1 = 2 \in \mathbb{R}, x_2 = -2 \in \mathbb{R}, f(2) = f(-2) = 16$, тобто $x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$, це неін'єктивне відображення.

Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ не існує $f(x)$, такого що $f(x) = -16$, так як $x^4 \neq -16$, то відображення не сюр'єктивне.

Приклад 3. Нехай відображення $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ задано формулою $f(x) = x^2$. Чи є відображення ін'єктивним, сюр'єктивним?

Розв'язання.

Для будь-яких $x_1, x_2 \in [0; +\infty), x_1 \neq x_2, f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$, але $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для кожного x існує єдине $f(x)$, отже, $f(x)$ - ін'єктивне відображення. Для кожного значення $f(x) \in [0; +\infty)$ знайдеться $x \in [0; +\infty)$, тому $f(x)$ - сюр'єктивне відображення. Із п.1 та п.2 випливає, що відображення бієктивне.

Приклад 4. Для заданих множин A та B знайти $A \times B$ та $B \times A$. Виконати операції над множинами за допомогою пакету Excel.

Розв'язання.

1. У відповідності до завдання введемо елементи множини A та B у відповідні стовпчики електронної таблиці.

2. Знайдемо декартовий добуток множин A та B .

3.

	A	B	C	D	E	F	G
1	A	B		A×B			
2	-1	0	(-1,0)	(0,0)	(3,0)	(4,0)	
3	0	4	(-1,4)	(0,4)	(3,4)	(4,4)	
4	3	6	(-1,6)	(0,6)	(3,6)	(4,6)	
5	4						

4.

	C	D	E	F	G
		A×B			
0	(-1,0)	(0,0)	(3,0)	(4,0)	

5. Аналогічно заповнюємо стовпчики E та F , корегуючи формулу для кожного стовчика.

6. Самостійно знайти декартовий добуток множин B та A .

7. Отриманий результат має вигляд:

8.

Розв'язання.

- 3

$\text{=ЕСЛИ(ОСТАТ(Е\$2;\$D3)=0;1;0)}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	B		A\B	7	8	10	12	13
2	7		2	0	1	1	1	0
3	8		3	0	0	0	1	0
4	10		4	0	1	0	1	0
5	12		5	0	0	1	0	0
	13							

3. Побудуємо бінарне $R \subseteq A \times V$ відношення.

F11 : ✕ ✓ fx =ЕСЛИ(F3=0;;СЦЕПИТЬ("";F\$2;;";";\$D3;""))										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A	B								
2		2	7	A\B	7	8	10	12	13	
3		3	8	2	0	1	1	1	0	
4		4	10	3	0	0	0	1	0	
5		5	12	4	0	1	0	1	0	
6			13	5	0	0	1	0	0	
7										
8										
9										
10										
11		$P \subseteq A \times B$			0	(8,2)	(10,2)	(12,2)	0	
12					0	0	0	(12,3)	0	
13					0	(8,4)	0	(12,4)	0	
14					0	0	(10,5)	0	0	
15										

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Завдання 1. Нехай $A = \{2, 5, -7, 9, 12, -15\}$, $B = \{2, 0, -3, 11\}$. Для заданих множин A та B знайти $A \times B$ та $B \times A$. Виконати операції над множинами за допомогою пакету Excel.

Завдання 2. Для заданих множин (A, B) з завдання 1 побудувати відношення 1) A більше B , 2) різниця елементів більше нуля. Побудувати бінарне $P \subseteq A \times B$ відношення.

Завдання 3. Які властивості відношень, заданих: на множині людей:

$R = \{(a, b): a \text{ живе в одному горді з } b\}$?

Завдання 4. Нехай дано рівняння $y = x^2$. Які властивості відношення R - «Бути рішенням рівняння», тобто xRy .

III. Заключна частина заняття.

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема № 3. Алгебра логіки. Нормальні форми.

Лабораторне заняття №3.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з алгебри логіки.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – комп'ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Нормальні форми.
2. Спрощення булевих функцій, заданих аналітично, до ДНФ, ДКН
3. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми (ДДНФ і ДКНФ).

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

Основна

1. Конспект лекцій.
2. Яковлєв С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. "Дискретна математика", Харків: Изд. ХНУВС, 2008. – 88с.
3. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина Дискретна математика. Підручник. Видання третє, виправлене та доповнене – Львів. – 432 с.
4. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
5. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник — Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2013. — 487с.
6. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 160 с.
7. М. Ф. Бондаренко Комп'ютерна дискретна математика: підручник / Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. –Харків, «Компанія СМІТ», 2004- 485с.
8. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СНУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.

Допоміжна

1. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учебний посібник.– Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007.–29 с.
2. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.
3. З.П. Халецька, В.В. Наратовий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 128 с
4. Трохимчук, Р. М. Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. . [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
2. Р. М. Трохимчук М. С. Нікітченко ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf

3. Коноваленко О.Є. Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/38881/1/Book_2016_Konovalenko_Diskretna_matematika.pdf
4. Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 71 с.
5. Навчально-методичний посібник з курсу «Дискретна математика» для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп'ютерні системи та мережі» / Балога С.І. // Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2012. – 92 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1>

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типових прикладів. За аналогією розв'язати приклади самостійно зі свого варіанту (номер варіанту – номер здобувача у журналі групи, 1, 11, 21 – розв'язують варіант 1 і т.д.). Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу.

Приклад 1. Представити у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми і досконалої кон'юнктивної нормальної форми функцію

$$f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz.$$

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності даної функції.

x	y	z	$(x \oplus y)$	\overline{yz}	$yz \vee \overline{yz}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

ДДНФ ($f_{\text{СДНФ}}$) побудуємо на одиничних значеннях функції:

$$f_{\text{СДНФ}} = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}}.$$

ДКНФ ($f_{\text{СКНФ}}$) побудуємо на нульових значеннях функції:

$$f_{\text{СКНФ}} = (x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}})(x^{\overline{1}} \vee y^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}})(x^{\overline{1}} \vee y^{\overline{0}} \vee z^{\overline{1}}) = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}).$$

Приклад 2. Записати конституенти нуля та одиниці, що відповідають інтерпретаціям булевої функції трьох змінних.

Розв'язання.

Конституента нуля і конституента одиниці булевої функції однозначно визначаються номерами відповідних їм інтерпретацій. Конституента нуля функції $f(x, y, z)$ являє собою елементарну диз'юнкцію. Інтерпретація, що обертає в нуль дану елементарну диз'юнкцію, перетворює в нуль і функцію $f(x, y, z)$. Конституента одиниці функції $f(x, y, z)$ являє собою елементарну кон'юнкцію. Інтерпретація, що обертає в одиницю дану елементарну кон'юнкцію, перетворює в одиницю і функцію $f(x, y, z)$.

Конституенти нуля і конституенти одиниці для функцій трьох змінних наведені в табл..

Номер інтерпре- тації	Інтерпретація			Конституента одиниці	Конституента нуля
	x	y	z		
0	0	0	0	$\overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}}$	$x \vee y \vee z$
1	0	0	1	$\overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} z$	$x \vee y \vee \overline{z}$
2	0	1	0	$\overline{\overline{x}} y \overline{\overline{z}}$	$x \vee \overline{y} \vee z$
3	0	1	1	$\overline{\overline{x}} y z$	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
4	1	0	0	$\overline{\overline{x}} y \overline{\overline{z}}$	$\overline{x} \vee y \vee z$
5	1	0	1	$\overline{\overline{x}} y z$	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$
6	1	1	0	$\overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}}$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
7	1	1	1	$\overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} \overline{\overline{z}}$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$

Приклад 3. Побудувати ДДНФ функції $f(x, y, z) = xy \vee \overline{(x(y \vee z) \vee yz)}$, використовуючи правила перетворення довільної формули алгебри логіки до ДДНФ.

Розв'язання.

Скористаємося правилами перетворення довільної формули алгебри логіки до ДДНФ.

Опускаємо заперечення на змінні, використовуючи закон де Моргана:

$$\begin{aligned} x y \vee (x (\overline{y \vee z}) \vee y z) &= x y \vee (x (\overline{y \vee z})) (\overline{y z}) = x y \vee (\overline{x \vee (\overline{y \vee z})}) (\overline{y \vee z}) = \\ &= x y \vee (\overline{x \vee (y z)}) (\overline{y \vee z}). \end{aligned}$$

Побудуємо диз'юнктивну нормальну форму, використовуючи дистрибутивний закон, закони ідемпотентності й протиріччя:

$$\begin{aligned} x y \vee (\overline{x \vee (y z)}) (\overline{y \vee z}) &= x y \vee (\overline{x y \vee y z y \vee x z \vee y z z}) = x y \vee \overline{x y} \vee 0 \vee \overline{x z} \vee y z = \\ &= x y \vee \overline{x y} \vee \overline{x z} \vee y z. \end{aligned}$$

Булева функція залежить від трьох змінних, тому в елементарні кон'юнкції необхідно ввести відсутні змінні, використовуючи закон виключеного третього:

$$x y \vee \overline{x y} \vee \overline{x z} \vee y z = x y (z \vee \overline{z}) \vee \overline{x y} (z \vee \overline{z}) \vee \overline{x} (y \vee \overline{y}) \overline{z} \vee (x \vee \overline{x}) y \overline{z}.$$

Використовуючи дистрибутивний закон, розкриємо дужки і зведемо подібні для одержання ДДНФ:

$$x y z \vee x y \overline{z} \vee \overline{x y z} \vee \overline{x y \overline{z}} \vee \overline{x y z} \vee \overline{x y \overline{z}} \vee x y \overline{z} \vee x y \overline{z} = x y z \vee x y \overline{z} \vee \overline{x y z} \vee \overline{x y \overline{z}} \vee x y \overline{z}.$$

Одержана досконала диз'юнктивна нормальна форма заданої булевої функції: $f(x, y, z) = x y z \vee x y \overline{z} \vee \overline{x y z} \vee \overline{x y \overline{z}} \vee x y \overline{z}$.

Приклад 4. Побудувати ДДНФ функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + (x_1 (\overline{x_2} + x_3) + x_2 x_3).$$

Розв'язання.

Використовуючи закони де Моргана, отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + (x_1 (\overline{x_2} + x_3) + x_2 x_3) &= x_1 x_2 + (\overline{x_1 (\overline{x_2} + x_3)}) (\overline{x_2 x_3}) = \\ &= x_1 x_2 + (\overline{x_1} + (\overline{\overline{x_2} + x_3})) (\overline{x_2} + \overline{x_3}) = x_1 x_2 + (\overline{x_1} + x_2 \overline{x_3}) (\overline{x_2} + \overline{x_3}). \end{aligned}$$

Застосувавши дистрибутивний закон, закони ідемпотентності та протиріччя отримаємо ДНФ:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + (\overline{x_1} + x_2 \overline{x_3}) (\overline{x_2} + \overline{x_3}) &= x_1 x_2 + (\overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 \overline{x_3} \overline{x_2} + \overline{x_1} \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} \overline{x_3}) = \\ &= x_1 x_2 + \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{x_1} \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3}. \end{aligned}$$

Дана функція залежить від трьох змінних, тому до елементарних кон'юнкцій необхідно ввести відсутні змінні, використовуючи закон виключення третього:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{x_1} \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} &= x_1 x_2 (x_3 + \overline{x_3}) + \overline{x_1} \overline{x_2} (x_3 + \overline{x_3}) + \\ &+ \overline{x_1} (x_2 + \overline{x_2}) \overline{x_3} + (x_1 + \overline{x_1}) x_2 \overline{x_3}. \end{aligned}$$

За допомогою дистрибутивного закону, розкриття дужок та зведення подібних отримаємо ДДНФ:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = \\ = x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3.$$

ДДНФ заданої функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3.$$

Приклад 5. Побудувати ДКНФ функції:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{(x_1(\bar{x}_2 + x_3) + x_2x_3)}.$$

Розв'язання.

Використовуючи закони де Моргана, отримаємо:
 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + (\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3).$

Побудуємо КНФ, використовуючи дистрибутивний закон, закони ідемпотентності та виключення третього:

$$x_1x_2 + (\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = x_1x_2 + (\bar{x}_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = \\ = (x_1 + (\bar{x}_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3))(x_2 + (\bar{x}_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)) = \\ = (x_1 + \bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1 + x_2)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = \\ = 1 \cdot 1 \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3) \cdot 1 = (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3).$$

Дана функція залежить від трьох змінних, отже до елементарної диз'юнкції $(x_2 + \bar{x}_1)$ необхідно ввести відсутню змінну x_3 , використовуючи закон протиріччя. Після чого, використовуючи дистрибутивний закон, слід звести функцію до виду кон'юнкції конститuent нуля:

$$(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3) = (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3x_3)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3) = \\ = (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1 + x_3)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_3).$$

Після зведення подібних за допомогою закону ідемпотентності отримаємо ДКНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3).$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Завдання 1. Побудувати таблиці істинності для функцій.

Варіанти завдань

$$1 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + \\ + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

$$2 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4$$

$$3 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \\ + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$$

$$4 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \\ + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4$$

$$5 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \\ + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$6 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \\ + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$7 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \\ + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$8 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \\ + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$9 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \\ + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$10 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \\ + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

Завдання 2. Побудувати ДДНФ та ДКНФ функції.

Варіанти завдань.

- 1 $f(x, y, z) = (yx \vee x\bar{z})(x \vee yz(z \vee \bar{x}y))$
- 2 $f(x, y, z) = ((x \vee (z \vee yz))) (z \vee \bar{x}\bar{z} \vee y)$
- 3 $f(x, y, z) = ((x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{z} \vee x)) \vee ((\bar{y} \vee z))$
- 4 $f(x, y, z, t) = (x \vee \bar{z})(\bar{x}t \vee yt \vee \bar{x}t \vee yt)(x \vee z)$
- 5 $f(x, y, z, t) = (xy \vee x\bar{y}) \vee ((\bar{x} \vee y)(z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee \bar{y})(t \vee z))$
- 6 $f(x, y, z) = (xz \vee y)(x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y})$
- 7 $f(x, y, z, t) = ((y \vee z)(t \vee y\bar{z})) \vee \bar{t}\bar{x} \vee ((z \vee y)(\bar{t} \vee \bar{z}))$
- 8 $f(x, y, z, t) = yt \vee ((z \vee \bar{t})(x \vee z)(\bar{t} \vee \bar{z})(x \vee \bar{z})) \vee \bar{y}t$
- 9 $f(x, z, t) = (\bar{z} \vee t)(t \vee x) \vee (\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee \bar{t})(\bar{t} \vee z)$
- 10 $f(x, y, z, t) = \bar{x}t \vee ((\bar{z}\bar{y} \vee t)(z \vee y)) \vee ((\bar{t} \vee \bar{z})(z \vee y))$

III. Заключна частина заняття.

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема № 4. «Мінімізація формул алгебри логіки.»

Лабораторне заняття №4.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з мінімізації формул алгебри логіки.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – комп'ютерний клас

Навчальні питання:

1. Основні методи мінімізації булевих функцій.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

Основна

1. Конспект лекцій.
2. Яковлев С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. "Дискретна математика", Харків: Изд. ХНУВС, 2008. – 88с.
3. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина Дискретна математика. Підручник. Видання третє, виправлене та доповнене – Львів. – 432 с.
4. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
5. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник — Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2013. — 487с.
6. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 160 с.
7. М. Ф. Бондаренко Комп'ютерна дискретна математика: підручник / Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. –Харків, «Компанія СМІТ», 2004- 485с.
8. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СХУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.

Допоміжна

1. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учбовий посібник.— Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007.—29 с.
2. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.

3. З.П. Халецька, В.В. Нарadowий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 128 с
4. Трохимчук, Р. М. Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. . [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
2. Р. М. Трохимчук М. С. Нікітченко ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf
3. Коноваленко О.Є. Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/38881/1/Book_2016_Konovalenko_Diskretna_matematika.pdf
4. Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 71 с.
5. Навчально-методичний посібник з курсу «Дискретна математика» для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп'ютерні системи та мережі» / Балого С.І. // Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2012. – 92 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://dSPACE.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1>

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типових прикладів. За аналогією розв'язати приклади самостійно. Оформити звіт, який повинен містити вихідні дані, розв'язання прикладу.

Приклад 1. Мінімізувати функцію методом Квайна-Мак-Класкі.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4$$

Розв'язання.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0000 + 0001 + 0010 + 0011 + 0100 + 0110 + 0111 + 1000 + 1001 + 1011 + 1111$$

$$\begin{array}{l} 0 \quad 0000 * \\ 1: \quad 0001 * \quad 0010 * \quad 0100 * \quad 1000 * \\ 2: \quad 0011 * \quad 0110 * \quad 1001 * \\ 3: \quad 0111 * \quad 1011 * \\ 4: \quad 1111 * \\ 0 \quad 000- * \quad 00-0 * \quad 0-00 * \quad -000 * \\ 1: \quad 00-1 * \quad 001- * \quad 0-10 * \quad 01-0 * \quad -001 * \quad 100- * \\ 2: \quad 0-11 * \quad 011- * \quad -011 * \quad 10-1 * \\ 3: \quad -111 * \quad 1-11 * \\ 0 \quad 00-- \quad 00-- \quad 0--0 \quad 0--0 \quad -00- \quad -00- \\ 1: \quad 0-1- \quad 0-1- \quad -0-1 \quad -0-1 \\ 2: \quad --11 \quad --11 \end{array}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 00-- + 0--0 + -00- + 0-1- + -0-1 + --11$$

Складемо імплікативну матрицю:

ДНФ	ДДНФ										
	0000	0001	0010	0011	0100	0110	0111	1000	1001	1011	1111
00--	√	√	√	√							
0--0	√		√		√	√					
-00-	√	√						√	√		
0-1-			√	√		√	√				
-0-1		√		√					√	√	
--11				√			√			√	√

$$\text{МДНФ } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0--0 + -00- + --11 = \overline{x_1} \overline{x_4} + \overline{x_2} \overline{x_3} + x_3 x_4$$

Приклад 2. Мінімізувати методом Квайна-Мак-Класкі логічну функцію, задану таблицею істинності

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	f
	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0
	0	0	1	0	0
	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0

	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	0
	1	0	1	1	1
	1	1	0	0	1
	1	1	0	1	1
	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	0

Розв’язання. Знайдемо прості імпліканти. На першому кроці цього етапу слід виписати з таблиці істинності константи одиниці, розміщуючи їх за групами.

1-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	0
2	*	0	0	1	1
	*	0	1	0	1
	*	1	0	0	1
	*	1	1	0	0
3	*	0	1	1	1
	*	1	0	1	1
	*	1	1	0	1

На другому кроці цього етапу виконаємо поелементне порівняння конститuent (початкових імплікант) сусідніх груп, тобто здійснимо склеювання.

2-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	—
	*	—	1	0	0
2		0	—	1	1
		—	0	1	1
		0	1	—	1
	*	—	1	0	1
		1	0	—	1
		1	—	0	1
	*	1	1	0	—

Імпліканти 2-го кроку знову піддаються операції склеювання. При цьому склеюванню підлягають імпліканти сусідніх груп, в яких в одній і тій самій позиції стоїть символ «—».

3-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1		–	1	0	–
Прості імпліканти					
– 1 0 –					
0 – 1 1					
– 0 1 1					
0 1 – 1					
1 0 – 1					
1 – 0 1					

Подальше склеювання стає неможливим, тому складемо імплікативну таблицю.

Конституенти Прості імпліканти	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$g_1 = x_2 \bar{x}_3$	⊗		*		⊗			*
$g_2 = \bar{x}_1 x_3 x_4$		*				*		
$g_3 = \bar{x}_2 x_3 x_4$		*					*	
$g_4 = \bar{x}_1 x_2 x_4$			*			*		
$g_5 = x_1 \bar{x}_2 x_4$				*			*	
$g_6 = x_1 \bar{x}_3 x_4$				*				*

Відшукаємо стовпці імплікантної таблиці, які мають лише по одній позначці. Відповідні цим позначкам прості імпліканти називаються базисними і становлять так зване ядро бульової функції, яке неодмінно входить до скороченої д. н. ф. Розглянемо різні варіанти вибору сукупності простих імплікант, які спільно накривють позначками інші клітини рядка імплікантної таблиці. Ці імпліканти разом з ядром утворять скорочену д. н. ф.

З таблиці видно, що скороченими д. н. ф. для заданої функції f будуть:

$$1) f = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6;$$

$$2) f = g_1 + g_2 + g_3 + g_6;$$

$$3) f = g_1 + g_2 + g_5;$$

$$4) f = g_1 + g_3 + g_4 + g_5;$$

$$5) f = g_1 + g_3 + g_4 + g_6.$$

Серед цих скорочених д. н. ф. обирається та, яка задовольняє критерію мінімальності. Мінімальна д. н. ф. має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4.$$

Приклад 3. Мінімізувати функцію, задану у вигляді ДДНФ, методом Квайна - Мак-Класкі $f(a, b, c, d)_{\text{ДНФ}} = \sum(3, 7, 8, 10, 11, 12, 15)$.

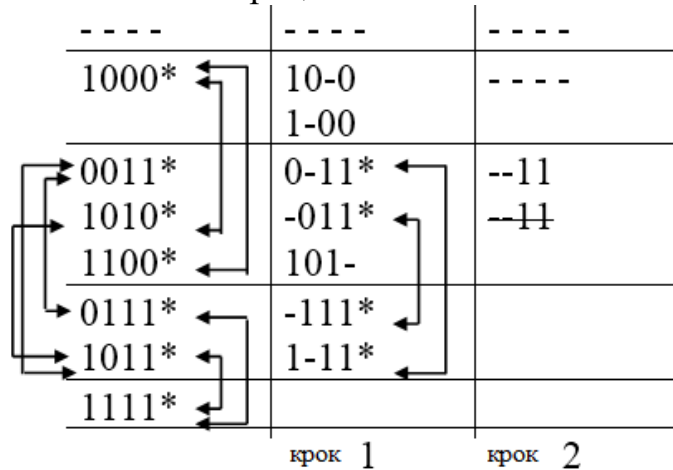
Розв'язання.

Випишемо двійкове представлення наборів, які утворюють ДДНФ: 0011, 0111, 1000, 1010, 1011, 1100, 1111. Розіб'ємо отримані коди на групи, які містять однакову кількість одиниць у коді:

```

  - - - -
  1000
  0011
  1010
  1100
  0111
  1011
  1111
  
```

Виконаємо операцію склеювання:



Складемо імплікативну матрицю:

первинні імпліканти	конституенти одиниці						
	0011	0111	1000	1010	1011	1100	1111
--11	+	+			+		+
10-0			+	+			
1-00			+			+	
101-				+	+		
-111		+					+

Знайти істотні імпліканти функції. Для цього в таблиці відшукуються стовпці, що містять рівно одну позначену клітинку. Імпліканти, що знаходяться в заголовку рядків таких клітинок, є суттєвими і підлягають обов'язковому включенню до складу мінімальної форми. З подальшого розгляду виключаються стовпці, які мають позначки в рядках, відповідних істотним імплікантам.

У результаті отримаємо таблицю

первинні імпліканти	конституенти одиниці						
	0011	0111	1000	1010	1011	1100	1111
~ 11	+	+			+		+
10-0			+	+			
1-00			+			+	
101-				+	+		
-111		+					+

Знайти тупикові диз'юнктивні нормальні форми і вибрати з них мінімальні ДНФ. Для отримання тупикових ДНФ необхідно відшукати мінімальну кількість первинних імплікант, які забезпечують покриття всіх стовпців таблиці, що залишилися.

Для аналізу залишився тільки один стовпець. Його покриття може бути забезпечене включенням в тупикову форму або імпліканти 10-0, або 101-, що призводить до двох тупикових ДНФ. При наявності вибору в мінімальну форму включається імпліканта, що залежить від меншого числа змінних. Обидві отримані імпліканти залежать від трьох змінних, тому кожна з них може бути включена в мінімальну форму. Розглянута функція має дві відмінності-ні мінімальні диз'юнктивні форми:

$$f_{1\text{ДНФ}} = \sim 11 \quad 10-0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$f_{2\text{ДНФ}} = \sim 11 \quad 10-0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Завдання 1. Знайти МДНФ методом Квайна-Мак-Класкі:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

Завдання 2. . Мінімізувати функцію, задану у вигляді ДДНФ, методом Квайна - Мак-Класкі $f(a, b, c, d)_{\text{ДНФ}} = \Pi(0, 7, 10, 11, 13, 14, 15)$

III. Заключна частина заняття.

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

Тема № 5: Елементи комбінаторного аналізу.

Лабораторне заняття №5.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з теорії комбінаторного аналізу; вироблення навичок розв'язання задач теорії комбінаторного аналізу.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Комбінаторика розбиття.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

Основна

1. Конспект лекцій.
2. Яковлєв С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. "Дискретна математика", Харків: Изд. ХНУВС, 2008. – 88с.
3. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина Дискретна математика. Підручник. Видання третє, виправлене та доповнене – Львів. – 432 с.
4. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
5. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник — Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2013. — 487с.
6. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 160 с.
7. М. Ф. Бондаренко Комп'ютерна дискретна математика: підручник / Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. —Харків, «Компанія СМІТ», 2004- 485с.
8. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СХУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.

Допоміжна

1. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учебний посібник.— Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007.—29 с.
2. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.
3. З.П. Халецька, В.В. Наратовий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2017. – 128 с
4. Трохимчук, Р. М. Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104

- с. . [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
2. Р. М. Трохимчук М. С. Нікітченко ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf
3. Коноваленко О.Є. Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/38881/1/Book_2016_Konovalenko_Diskretna_matematika.pdf
4. Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп’ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп’ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 71 с.
5. Навчально-методичний посібник з курсу «Дискретна математика» для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп’ютерні системи та мережі» / Балога С.І. // Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2012. – 92 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://dSPACE.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1>

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв’язання типових прикладів. За аналогією розв’язати приклади самостійно. Оформити звіт, який повинен містити вихідні дані, розв’язання прикладу.

Приклад 1. Скільки екзаменаційних комісій, які складаються з 7 членів, можна створити з 14 викладачів?

Розв’язання.

При розв’язанні скористаємося формулою $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Отримаємо результат за допомогою Excel

B3					
=ФАКТР(B1)					
	A	B	C	D	E
1	m=	7	n!=	87178291200	
2	n=	14			
3	m!=	5040			
4	(n-m)!=	5040			
5	C=	3432			
6					

Приклад 2. Записати усі композиції числа 3.

Розв'язання.

Композиції мають вигляд $3=3$, $3=2+1$, $3=1+2$, $3=1+1+1$.

Завдання 3. Обчислити за допомогою бінома Ньютона вираз $(10+2)^3$.

Розв'язання.

Використаємо загальну формулу бінома Ньютона

$P = (x+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k}$. Нехай $x=10$, $a=2$, $n=3$. Тоді

$$P = (x+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k} = C_3^0 a^0 x^{3-0} + C_3^1 a^1 x^{3-1} + C_3^2 a^2 x^{3-2} + C_3^3 a^3 x^{3-3} =$$

$$= C_3^0 a^0 x^{3-0} + C_3^1 a^1 x^{3-1} + C_3^2 a^2 x^{3-2} + C_3^3 a^3 x^{3-3}.$$

$$(10+2)^3 = \frac{3!}{(3-0)!0!} \cdot 2^0 \cdot 10^3 + \frac{3!}{(3-1)!1!} \cdot 2^1 \cdot 10^2 + \frac{3!}{(3-2)!2!} \cdot 2^2 \cdot 10^1 +$$

$$+ \frac{3!}{(3-3)!3!} \cdot 2^3 \cdot 10^0 = 10^3 + 3 \cdot 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 10^1 + 2^3 = 1728.$$

Приклад 4. Маємо деяку кількість куль, кожна з яких пофарбована одним, двома чи трьома кольорами: червоним, синім і жовтим. При цьому червоним пофарбовано 28 куль, синім – 23, жовтим – 23, червоним і синім – 12, синім і жовтим – 8, червоним і жовтим – 11, а всіма трьома – 5 куль. Скільки разом було пофарбовано куль?

Розв'язання.

Нехай α_1 – властивість кулі: у розфарбуванні кулі бере участь червоний колір, α_2 – властивість кулі: у розфарбуванні кулі бере участь синій колір, α_3 – властивість кулі: у розфарбуванні кулі бере участь жовтий колір. Тоді умови задачі можна записати так: $N(\alpha_1)=28$; $N(\alpha_2)=23$; $N(\alpha_3)=23$; $N(\alpha_1, \alpha_2)=12$; $N(\alpha_1, \alpha_3)=11$; $N(\alpha_2, \alpha_3)=8$; $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=5$. $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3})=0$ тому, що всі кулі пофарбовані.

Формула включення і виключення дає

$$0 = N - (28 + 23 + 23) + (12 + 8 + 11) - 5.$$

$$\text{Тоді } N = (28 + 23 + 23) - (12 + 8 + 11) + 5 = 48.$$

Приклад 5. Скільки цілих додатних чисел у першій сотні не ділиться ні на одне із чисел 2, 3, 5?

Розв'язання. Введемо наступні позначення для властивостей: α_1 – число ділиться на 2; α_2 – число ділиться на 3; α_3 – число ділиться на 5.

$$\text{За умови задачі: } N = 100, \quad N(\alpha_1) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50, \quad N(\alpha_2) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33, \\ N(\alpha_3) = \left[\frac{100}{5} \right] = 20,$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{100}{2 \cdot 3} \right] = \left[\frac{100}{6} \right] = 16, \quad N(\alpha_1, \alpha_3) = \left[\frac{100}{2 \cdot 5} \right] = \left[\frac{100}{10} \right] = 10,$$

$$N(\alpha_2, \alpha_3) = \left[\frac{100}{3 \cdot 5} \right] = \left[\frac{100}{15} \right] = 6, \quad N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] = \left[\frac{100}{30} \right] = 3.$$

Тоді число цілих чисел, які не ділиться ні на одне із чисел 2, 3, 5, можна знайти, використовуючи формулу включень і виключень

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) -$$

$$- N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 100 - 50 - 33 - 20 + 10 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

Приклад 6. Скількома способами можна розділити 8 різних зошитів між 5 студентами?

Розв'язання. Задача відноситься до задач розподілу різних предметів без урахування порядку предметів в урнах. У випадку, коли n ($n=8$) різних предметів розподіляються між k ($k=5$) особами без обмежень (кожний студент, який бере участь у розподілі, може забрати собі усі зошити), кожний предмет можна вручити k способами (кожний предмет вручається одному з учасників розподілу). Тому в задачі число роз'язків дорівнює $k^n = 5^8 = 390625$.

Приклад 7. Я хочу послати своєму другу 8 різних фотографій. Скількома способами я можу це зробити, використовуючи 5 різних конвертів?

Розв'язання. Задача відноситься до задач розподілу предметів (фотографій) між однаковими урнами (конвертами) за умови, що урни не порожні.

Кількість $M(n, k)$ (число Моргана) розподілів n різних предметів між k різними урнами з використанням кожної урни у кожному розподілі («не порожні урни») дорівнює $M(n, k) = k! S_n^k$, де S_n^k – число Стирлінга другого роду.

$$S_n^k = \frac{1}{k!} [k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n] \quad \text{впливає} \quad 3$$

формули включень і виключень.

Число розподілів різних фотографій ($n=8$), при якому ні один з п'яти конвертів ($k=5$) не порожній, дорівнює

$$M(8, 5) = \frac{5!}{5!} [5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8] = 126020.$$

Приклад 8. Нехай є 8 різних сигнальних прапорів і 5 щогл, на які вони вивішуються. Скільки існує способів розвішування усіх прапорів на щоглах, причому щогли можуть бути порожніми?

Розв'язання. Задача відноситься до задач розподілу різних предметів з урахуванням їх порядку в урнах

$$A_{n+k-1}^n = n! C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(8+5-1)!}{(5-1)!} = \frac{12!}{4!}.$$

Приклад 9. Нехай у магазині є 8 однакових комп'ютерів і 15 комплектів різних прикладних програм. Скільки існує способів у п'яти покупців купити товар, якщо кожний покупець купує не менш ніж один комп'ютер і не менш ніж один комплект програм?

Розв'язання. Комп'ютери і програми купуються незалежно. Задачу про купівлю комп'ютерів можна вважати задачею про розподілення $n=8$ об'єктів (комп'ютерів) за $k=5$ урнами (покупцями) за умови, що немає порожніх урн. Число таких варіантів $C_{n-1}^{k-1} = C_{8-1}^{5-1} = C_7^4 = 35$.

Задачу про купівлю комп'ютерних програм можна вважати задачею про розподілення $n=15$ об'єктів (комп'ютерних програм) за $k=5$ різними урнами (покупцями) за умови, що немає порожніх урн.

Кількість таких розподілень дорівнює

$$N = k^n - C_k^1(k-1)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot 1^n = 5^{15} - C_5^1(5-1)^{15} + \dots + (-1)^{5-1} C_5^4 \cdot 1^{15} = 5^{15} - C_5^1 \cdot 4^{15} + C_5^2 \cdot 3^{15} - C_5^3 \cdot 2^{15} + C_5^4.$$

Таким чином, число способів купити товар за правилом добутку дорівнює

$$N = C_7^4(5^{15} - C_5^1 \cdot 4^{15} + C_5^2 \cdot 3^{15} - C_5^3 \cdot 2^{15} + C_5^4).$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Завдання 1. Скількома способами можна розкласти 12 п'ятаків у 5 пакетів?

Завдання 2. Скількома способами можна розмістити 20 однакових куль у чотирьох різних урнах?

Завдання 3. Скількома способами групу з 25 осіб можна поділити на сім коаліцій: дві – по 5 осіб, одна – 7 осіб, чотири – по 2 особи?

Завдання 4. Треба відправити 6 листів. Скількома способами це можна зробити, якщо відправлення листів можна доручити трьом кур'єрам, і кожний лист можна дати будь-якому з кур'єрів.

Завдання 5. Потягу, в якому знаходяться n пасажирів, потрібно зробити m зупинок. Скількома способами можуть розподілитися пасажирі між зупинками?

Завдання 6. Скількома способами можна розмістити 20 різних куль у трьох різних урнах так, щоб у першій, другій і третій урнах знаходилося відповідно 5, 3 та 12 куль?

Завдання 7. Скільки існує способів розподілити (за чергою) 15 пацієнтів до трьох лікарів однієї спеціальності, якщо лікар повинен прийняти не менш ніж 3 пацієнта?

Завдання 8. На складі є 40 однакових комп'ютерів і 10 однакових принтерів. Скільки існує способів розподілення їх за 7 відділами, якщо в кожний відділ необхідно передати не менш ніж 2 комп'ютера і не менш ніж один принтер?

Завдання 9. Скільки існує способів закупити 1000 однакових пар взуття у чотирьох різних постачальників, якщо мінімальна партія постачання 100 штук?

III. Заключна частина заняття.

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи. Оголошення теми наступного заняття.

ТЕМА № 6. Основні поняття теорії графів.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з теорії графів; вироблення навичок розв'язання задач з теорії графів.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – комп'ютерний клас.

Навчальні питання:

1. Транспортні мережі та потоки. Їх властивості.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

Основна

1. Конспект лекцій.
2. Яковлев С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. "Дискретна математика", Харків: Изд. ХНУВС, 2008. – 88с.
3. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина Дискретна математика. Підручник. Видання третє, виправлене та доповнене – Львів. – 432 с.
4. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
5. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник — Львів, Видавець І. Є. Чижигов, 2013. — 487с.
6. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. — Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 160 с.
7. М. Ф. Бондаренко Комп'ютерна дискретна математика: підручник / Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. –Харків, «Компанія СМІТ», 2004- 485с.
8. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СЛУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.

Допоміжна

1. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учбовий посібник.— Дніпропетровськ: НМетАУ, 2007.—29 с.
2. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.
3. З.П. Халецька, В.В. Наратовий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2017. – 128 с
4. Трохимчук, Р. М. Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. . [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
2. Р. М. Трохимчук М. С. Нікітченко ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf
3. Коноваленко О.Є. Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко, М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/38881/1/Book_2016_Konovalenko_Diskretna_matematika.pdf
4. Теорія графів. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерний моніторинг та геометричне моделювання процесів і систем» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»/ І.М. Кузьменко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 1,7 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 71 с.
5. Навчально-методичний посібник з курсу «Дискретна математика» для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп'ютерні системи та мережі» / Балога С.І. // Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2012. – 92 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3415/1>

План проведення заняття:

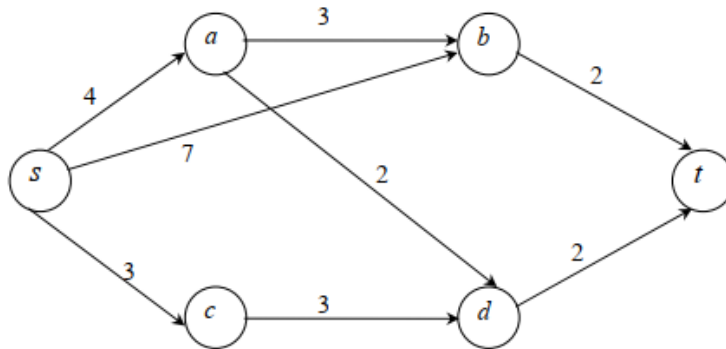
І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

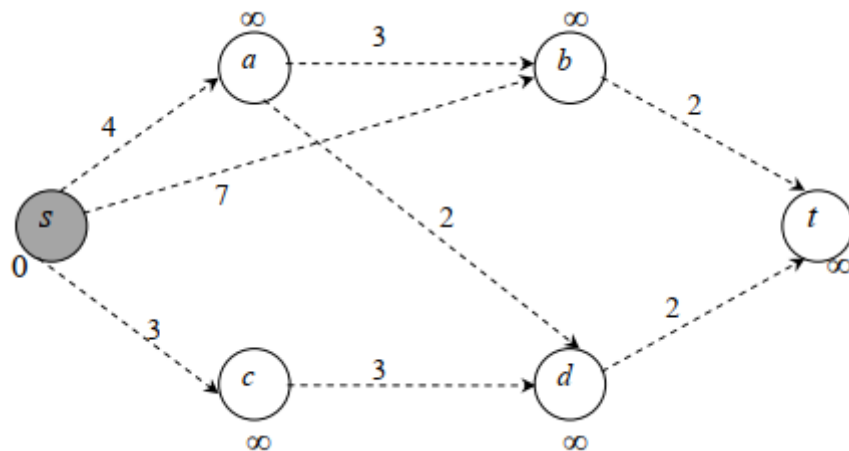
Здобувачі вищої освіти виконують завдання згідно методичних вказівок до теми заняття. Розібрати розв'язання типових прикладів. За аналогією розв'язати приклади самостійно. Оформити звіт, який повинен містити вихідні данні, розв'язання прикладу.

Приклад 1. За допомогою алгоритму Дейкстри визначити найкоротший шлях між вершинами s і t у графі



Розв'язання.

Крок 1. Зафарбуємо вершину s . Приймемо, що $d(s) = 0$ і $d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(t) = \infty$; ($y = s$). На графі запишемо значення величин $d(x)$ поряд із вершиною. Тоді він набуває наступного вигляду.



Крок 2. Для незабарвлених вершин зробимо перерахування відстаней $d(x)$, а саме:

$$d(a) = \min\{d(a), d(s) + a(s, a)\} = \min\{\infty, 0 + 4\} = 4;$$

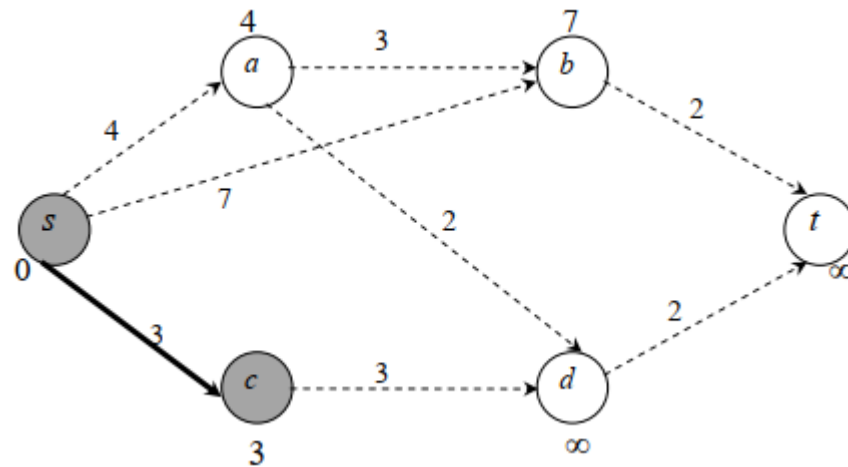
$$d(b) = \min\{d(b), d(s) + a(s, b)\} = \min\{\infty, 0 + 7\} = 7;$$

$$d(c) = \min\{d(c), d(s) + a(s, c)\} = \min\{\infty, 0 + 3\} = 3;$$

$$d(d) = \min\{d(d), d(s) + a(s, d)\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty;$$

$$d(t) = \min\{d(t), d(s) + a(s, t)\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty.$$

Оскільки мінімальне отримане значення $3=d(c)$, то зафарбуємо вершину c і дугу (s,c) . Поточне дерево найкоротших шляхів виділено товстою лінією.
Крок 3. Через те, що вершина t залишилася незабарвленою, повертаємося до крока 2, прийнявши $y=c$.



Крок 2. ($y=c$). перерахуємо величини $d(x)$ для незабарвлених вершин. Отримали наступні результати:

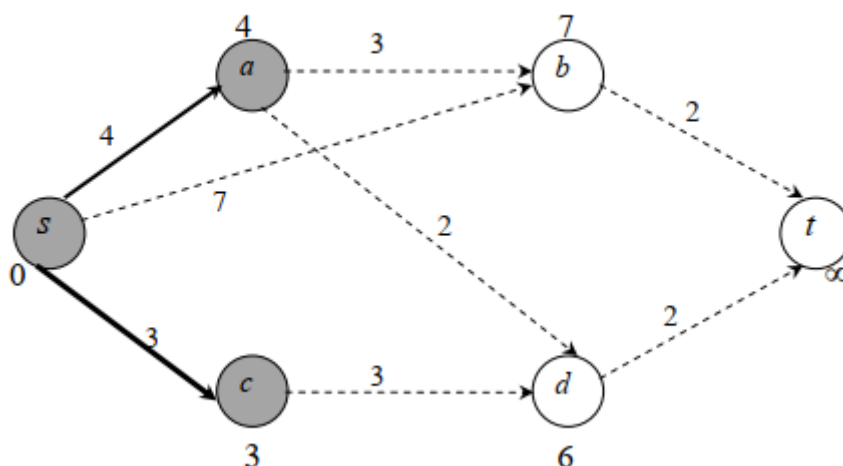
$$d(a) = \min\{d(a), d(c) + a(c,a)\} = \min\{4, 3 + \infty\} = 4;$$

$$d(b) = \min\{d(b), d(c) + a(c,b)\} = \min\{7, 3 + \infty\} = 7;$$

$$d(d) = \min\{d(d), d(c) + a(c,d)\} = \min\{\infty, 3 + 3\} = 6;$$

$$d(t) = \min\{d(t), d(c) + a(c,t)\} = \min\{\infty, 3 + \infty\} = \infty.$$

Оскільки мінімальне отримане значення $4=d(a)$, то зафарбуємо вершину a і дугу (s,a) . Поточне дерево найкоротших шляхів має вигляд:



Крок 3. Через те, що вершина t залишилася незабарвленою, повертаємося до крока 2, прийнявши $y=a$.

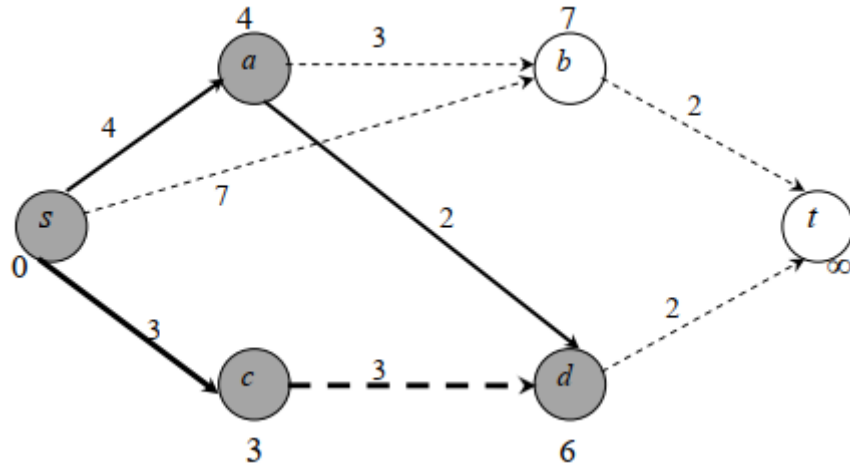
Крок 2. ($y=a$). перерахуємо величини $d(x)$ для незабарвлених вершин. Отримали наступні результати:

$$d(b) = \min\{d(b), d(a) + a(a, b)\} = \min\{7, 4 + 3\} = 7;$$

$$d(d) = \min\{d(d), d(a) + a(a, d)\} = \min\{6, 4 + 2\} = 6;$$

$$d(t) = \min\{d(t), d(a) + a(a, t)\} = \min\{\infty, 4 + \infty\} = \infty.$$

Оскільки мінімальне отримане значення $6 = d(d)$, то зафарбуємо вершину d і дугу (a, d) (можна було зафарбувати і дугу (c, d)). Поточне дерево найкоротших шляхів має вигляд:



Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

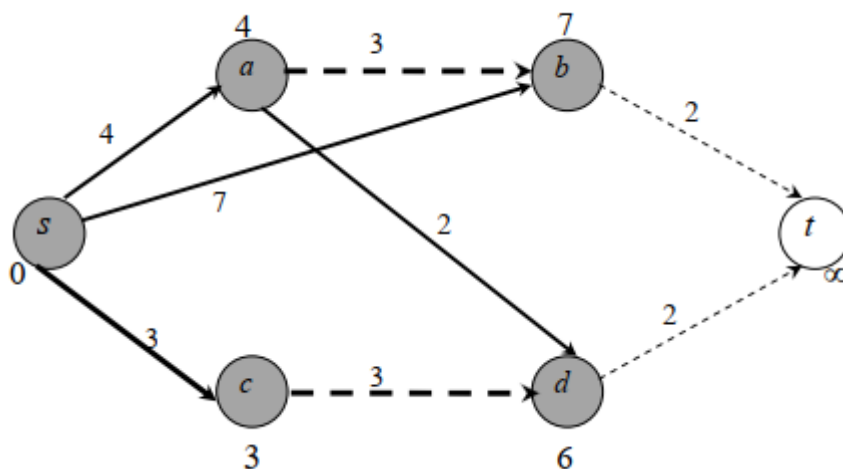
Крок 3. Через те, що вершина t залишилася незабарвленою, повертаємося до крока 2, прийнявши $u = d$.

Крок 2. ($u = d$). перерахуємо величини $d(x)$ для незабарвлених вершин. Отримали наступні результати:

$$d(b) = \min\{d(b), d(d) + a(d, b)\} = \min\{7, 6 + \infty\} = 7;$$

$$d(t) = \min\{d(t), d(d) + a(d, t)\} = \min\{\infty, 6 + 2\} = 8.$$

Оскільки мінімальне отримане значення $7 = d(b)$, то зафарбуємо вершину b і дугу (s, b) (можна було зафарбувати і дугу (a, b)). Поточне дерево найкоротших шляхів має вигляд:



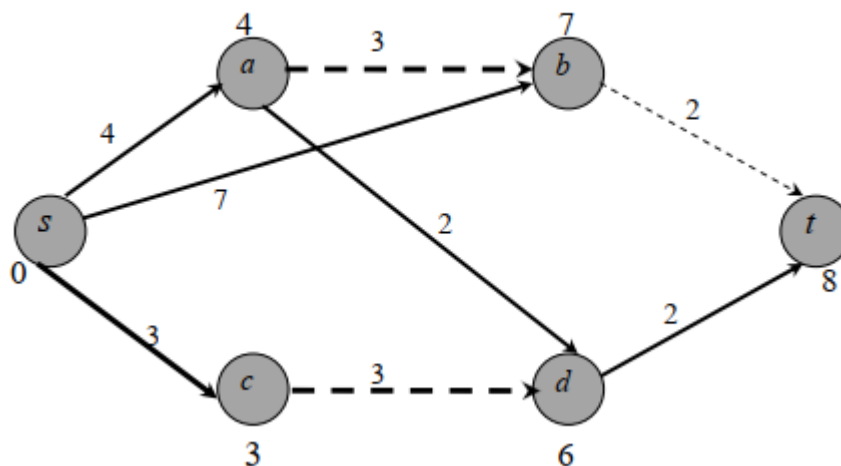
Крок 3. Через те, що вершина t залишилася незабарвленою, повертаємося до крока 2, прийнявши $u = b$.

Крок 2. ($y=b$). перерахуємо величини $d(x)$ для незабарвлених вершин. Отримали наступні результати:

$$d(t) = \min\{d(t), d(b) + a(b, t)\} = \min\{8, 7 + 2\} = 8.$$

Нарешті вершину t можна пофарбувати. Також фарбуємо дугу (d, t) , яка визначає величину $d(t)$

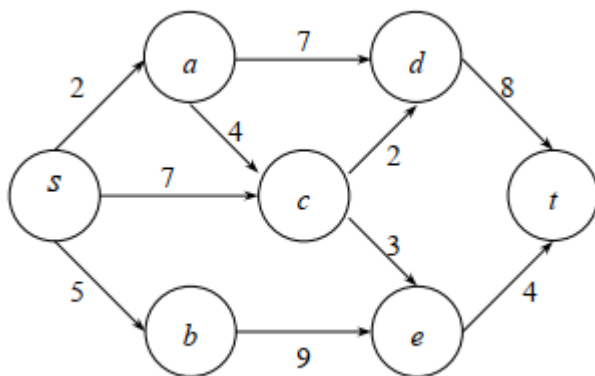
Побудоване дерево найкоротших шляхів має вигляд:



У графі є два найкоротші шляхи однакової довжини. Перший $(s, a), (a, d), (d, t)$, другий $-(s, c), (c, d), (d, t)$

Варіанти завдань для самостійного розв'язання.

Приклад 1. Знайти найкоротший шлях від вершини s до вершини t за допомогою алгоритму Дейкстри для заданого нижче графа.



III. Заключна частина заняття.

Для перевірки результатів роботи здобувачі вищої освіти надають звіт з результатами роботи.