МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кафедра інформаційних технологій та кібербезпеки
Факультет №4

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньої програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
125 «Кібербезпека»
(«Поліцейська діяльність у кіберсфері»)

Харків 2020

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 21.12.2020 № 12

СХВАЛЕНО
Вченою радою факультету № 4
Протокол від 16.12.2020 № 8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 16.12.2019 № 8

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій та кібербезпеки факультету № 4
(протокол від 01.12.2020р. № 23)

Розробники:
1. *Доктор технічних наук, професор, професор кафедри Можаєв О.О.*
2. *Старший викладач кафедри Мелащенко О.П.*
3. *Старший викладач кафедри Рог В.Є.*

Рецензенти:
1. *Професор кафедри обчислювальної техніки та програмування Національного технічного університету «Харківській політехнічний інститут», д.т.н., професор Кучук Г.А.*
2. *Провідний науковий співробітник науково-дослідної лабораторії з проблем розвитку інформаційних технологій ХНУВС, к.т.н., доцент Мордвинцев М. В.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Семестр №1

Номер та найменування теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Тема № 1: Матриці, визначники квадратних матриць та їх практичне застосування для аналізу систем лінійних алгебраїчних рівнянь	**40**	**8**		**2**	**6**	**24**	
Тема №2. Основні принципи векторної алгебри та аналітичної геометрії	**14**	**4**		**2**	**4**	**4**	
Тема №3. Функція однієї змінної. Границя функції однієї змінної	**16**	**4**		**2**	**2**	**8**	
Тема № 4 Похідна функції, її практичний зміст і правила диференціювання	**20**	**4**		**4**	**4**	**8**	
Всього за семестр №1	**90**	**20**		**10**	**16**	**44**	**залік**

Семестр №2

Номер та назва, номер та найменування теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
ТЕМА № 5. Основи аналізу функції кількох змінних	**34**	**6**		**4**	**4**	**20**	
ТЕМА № 6. Інтегральне числення функції однієї змінної	**56**	**14**		**6**	**12**	**24**	
Всього за семестр №2	**90**	**20**		**10**	**16**	**44**	**залік**

2. Методичні вказівки до практичних занять

Тема № 1: Матриці, визначники квадратних матриць та їх практичне застосування для аналізу систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Практичне заняття №1.

Навчальна мета заняття - навчитися додавати матриці, множити матриці на число, перемножувати матриці, опанувати методи знаходження визначика матриці. Навчитись обчислювати обернену матрицю.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Поняття матриці.
2. Освоєння дій з матрицями.
3. Види матриць.
4. Відшукання рангу матриці.
5. Поняття визначників 2-го та 3-го порядку та їх обчислення.
6. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення елементів квадратної матриці.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1 Обчислити C=A+B, К=A-B, I=3A

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 0\\ 5 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix},$$

Розв'язання.

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}7 & 3 & 0\\ 5 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+0 & 3+1 & 0+4\\ 5+(-2) & 5+5 & 6+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 3 & 10 & 7\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}7&3&0\\5&5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&4\\-2&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-0&3-1&0-4\\5-(-2)&5-5&6-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-4\\7&0&5\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}=3\begin{pmatrix}7&3&0\\5&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&12&0\\15&15&18\end{pmatrix}$$

Отже, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}7&4&4\\3&10&7\end{pmatrix}$ $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}7&2&-4\\7&0&5\end{pmatrix}$ $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}21&12&0\\15&15&18\end{pmatrix}$

Приклад 2 . Обчислити добуток матриць $A\cdot B$, де

$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&4\\-2&0&1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Знайдемо розмір матриці-добутку (якщо множення матриць можливо): $A_{2\times3}\cdot B_{3\times3}=C_{2\times3}$.
2. Обчислити елементи матриці-добутку C , для цього перемножимо елементи кожного рядка матриці A на відповідні елементи стовпців матриці B в такий спосіб:

$$C=\begin{pmatrix}1(-1)+0\cdot5+2(-2) & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3(-1)+1\cdot5+0(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}.$$

Одержуємо $C=\begin{pmatrix}-5&0&3\\2&1&7\end{pmatrix}$.

Приклад №3. Знайти АВ, якщо $A=\begin{pmatrix}5&0&3&-1\\-1&2&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&2&0\\0&3&1\\1&0&-2\\4&-1&-2\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Добуток АВ можна утворити, оскільки матриця А має розмір 2×4, а матриця В — розмір 4×3.
2. Матриця С=АВ матиме розмір 2×3. Щоб знайти C_{11}, утворимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B: $C_{11}=5\cdot(-2)+0\cdot0+3\cdot1+4\cdot(-1)=-11$.

Аналогічно:

$C_{12}=5\cdot2+0\cdot3+3\cdot0+(-1)(-1)=11$, $C_{13}=5\cdot0+0\cdot1+3(-2)+(-1)(-2)=-4$; $C_{21}=(-1)(-2)+2\cdot0+1\cdot1+4\cdot4=19$,

$C_{22}=(-1)2+2\cdot3+1\cdot0+4(-1)=0$, $C_{23}=(-1)0+2\cdot1+1(-2)+4(-2)=-8$.

Отже, $C=AB=\begin{pmatrix}-11&11&-4\\19&0&-8\end{pmatrix}$.

Утворити ВА — неможливо.

Приклад №4.Обчислити визначник $\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{vmatrix}=\mathbf{1\cdot4-3\cdot2=4-6=-2}$$

Приклад №5.Обчислити визначник за правилом трикутників $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot 1\cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Приклад №6. Обчислити визначник за правилом Саррюса $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Випишемо перші два стовпця за визначником:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\Bigg| = 1\cdot 2\cdot 0 + 0(-4)\cdot 1 + (-2)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

Приклад №7. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Обчислимо:

$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5$. $\Delta(A) \neq 0$ — обернена матриця існує.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$, $A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$,

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1},побудована нами, справді є оберненою до матриці A.

Знайдемо AA^{-1}:

$$\boldsymbol{AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Завдання для перевірки знань

1. Знайти матрицю $A=(2B-3C)D$, якщо

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -5 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 4 & 5\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення $f(A)=3A^2-2A+5$ і,якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначники:

$$\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix};\qquad \boldsymbol{\begin{vmatrix}-3 & 7 & 0\\ 3 & 1 & 5\\ -6 & 4 & 9\end{vmatrix}}.$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв’язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема 2:Основні принципи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Практичне заняття №2.

Навчальна мета заняття –вивчити векторні та скалярні величини. Ознайомитися зі скалярним, векторним та мішаним добутком.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Скалярний, векторний та змішаний добуток векторів.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
3. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
4. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.
5. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. -

100 с.
6. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад №1. Дано: $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\bar{\mathbf{a}} = 3$; $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\bar{\mathbf{b}} = -1$. Обчислити: 1) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(3\bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\mathbf{b}}\right)$; 2) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(\bar{\mathbf{a}} - 2\bar{\mathbf{b}}\right)$.

Розв'язання.

Використавши властивості проекцій, дістанемо:

1) $пр_{\bar{l}}\left(3\bar{a} + 2\bar{b}\right) = 3пр_{\bar{l}}\bar{a} + 2пр_{\bar{l}}\bar{b} = 3 \cdot 3 + 2(-1) = 7$.

2) $пр_{\bar{l}}\left(\bar{a} - 2\bar{b}\right) = пр_{\bar{l}}\bar{a} - 2пр_{\bar{l}}\bar{b} = 3 - 2(-1) = 5$.

Приклад №2. Знайти проекції вектора $\bar{a}$ на вісь l, яка утворює з вектором кут: 1) 45^0, 2) 120^0, 3) 150^0, якщо довжина вектора дорівнює 4.

Розв'язання.

1) $пр_{\bar{l}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 45^0 = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$;

2) $пр_{\bar{l}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 120^0 = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$;

3) $пр_{\bar{l}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 150^0 = 4 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$.

Приклад №3. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$\overline{AB} = (8-8;-4-0;6-6)$, $\overline{AB} = (0;-4;0)$;

$\overline{AC} = (6-8;-2-0;5-6)$, $\overline{AC} = (-2;-2;-1)$;

$\overline{BC} = (6-8;-2-(-4);5-6)$, $\overline{BC} = (-2;2;-1)$;

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$;

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$;

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$.

Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Приклад №4. Обчислити довжину вектора $3\bar{a}+2\bar{b}$, якщо $\bar{a}=2\bar{i}$, $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів:

$3\bar{a}=(3\cdot 2;3\cdot 0;3\cdot 0)$, $3\bar{a}=(6;0;0)$;

$2\bar{b}=(2\cdot 1;2\cdot 1;2\cdot(-1))$, $2\bar{b}=(2;2;-2)$;

$3\bar{a}+2\bar{b}=(6+2;0+2;0-2)$, $3\bar{a}+2\bar{b}=(8;2;-2)$.

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$\left|3\bar{a}+2\bar{b}\right|=\sqrt{(8)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}.$$

Приклад №5.. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}=4\bar{k}-\bar{i}$, $\bar{b}=3\bar{j}+\bar{i}-\bar{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів: $\bar{a}(-1;\ 0;\ 4)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{a}\cdot\bar{b}=(-1)\cdot 1+0\cdot 3+4\cdot(-1)=-1-4=-5$.

Приклад №6. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

Розв'язання.

Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(2-1)-j\cdot(2+2)+\bar{k}\cdot(-1-2)=\bar{i}-4\bar{j}-3\bar{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{26}(\textit{кв. од.}).$$

Приклад №7.. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(1;\ -2;\ 8)$, $B(0;\ 0;\ 4)$, $C(6;\ 2;\ 0)$.

Розв'язання.

Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\overline{AB}\perp\overline{AC}$.

$\overline{AB}=(-1;\ 2;\ -4)$, $\overline{AC}=(5;\ 4;\ -8)$.

Векторний добуток дорівнює:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 4 & -8\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 5 & -8\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(-16+16)-j\cdot(8+20)+\bar{k}\cdot(-4-10)=-28\bar{j}-14\bar{k}.$$

Тоді площа трикутника дорівнює:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-28)^2+(-14)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 14^2}=7\sqrt{5}(\textit{кв. од.}).$$

Приклад №8. Обчислити об'єм паралелепіпеду і піраміди, які побудовані на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Розв'язання.

Об'єм паралелепіпеду дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-15-2) = -51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеду і піраміди дорівнюють:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = |-51| = 51(куб.\ од.);$$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2} = 8{,}5(куб.\ од.).$$

Приклад №9. Довести, що точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$, $D(5;\ 0;\ -6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання.

Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині, доведемо, що в одній площині лежать вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = 0.$$

Знайдемо координати векторів:

$$\overline{AB} = (-1;\ 3;\ 3);\ \overline{AC} = (0;\ 4;\ 2);\ \overline{AD} = (3;\ 1;\ -4).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-16-2) + 3\cdot(6-12) = 18 - 18 = 0$$

.

Таким чином, точки ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** лежать в одній площині.

Завдання для перевірки знань.

1. Знайти кут між векторами $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ і $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$, а також площу паралелограма, побудованого на них.

2. Дано вектори: $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = 6\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}$.

Довести:

1) вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні;
2) вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ колінеарні;
3) вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні.

3. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\bar{a} = \bar{i} - \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$.

4. Дано координати вершин піраміди:: $\boldsymbol{O(0;\ 0;\ 0)}$, $\boldsymbol{A(1;\ 2;\ -1)}$, $\boldsymbol{B(-2;\ 3;\ 4)}$, $\boldsymbol{C(1;\ 0;\ -2)}$. Обчислити:кут $\boldsymbol{ABC}$;площу грані $\boldsymbol{ABC}$;об’єм піраміди $\boldsymbol{OABC}$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв’язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема №3: Функція однієї змінної. Границя функції однієї змінної

Практичне заняття №3

Навчальна мета заняття – опанувати методи знаходження границь функції, навчитися розкривати невизначеності, ознайомитись із застосуванням чудових границь.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Границя функції та її властивості.
2. Розкриття невизначеностей.
3. Дві особливі границі.
4. Застосування нескінченно малих величин при обчисленні границь.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
3. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
4. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.
5. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
6. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв’язування прикладів за темою заняття.

Перша чудова границя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Друга чудова границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}\left\{(1+x)^{1/x}\right\}=e$.

Наслідки:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$

Шкала еквівалентних нескінченно малих величин

1 $\sin x \sim x, \quad x\to 0.$

2. $\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ \ x\to 0.$

3. $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0.$

4. $(1+x)^\mu-1\sim\mu x,\ x\to 0.$

5. $\arcsin x\sim x,\ x\to 0.$

6. $\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0.$

7. $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0.$

Приклад.№1. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Розв'язання.

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}==\frac{x+3}{x}$ при $x\neq 3,$ то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2.$

Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$

Приклад. №2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Помножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад №3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Розв'язання.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад №4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=[\infty-\infty].$

Розв'язання.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3}++\sqrt{x^2+4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

Приклад №5. . Знайти $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}$.

Розв'язання.

Якщо $x\to 3-0,$ то $\frac{1}{x-3}\to-\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to 0; \lim\limits_{x\to 3-0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=\frac{1}{3}.$

Якщо $x\to 3+0,$ то $\frac{1}{x-3}\to+\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty; \lim\limits_{x\to 3+0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=0.$

Приклад №6. . Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Приклад №7. . Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\left[1^\infty\right]$.

Розв'язання.

Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину $\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}$.

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}};$$

оскільки $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ при $x\to\infty,$ то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e.$

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}=8.$ Дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=e^8.$$

Завдання для перевірки знань

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

2 Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

4. . Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^2}\right)$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

6. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

7. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

8. . Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

9. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

11. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$.

12. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}x}$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв’язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема №4 Похідна функції однієї змінної, її практичний зміст і правила диференціювання

Практичне заняття №4.

Навчальна мета заняття – засвоїти поняття похідної функції, правил диференціювання, навчитись диференціювати алгебраїчні, тригонометричні, обернені тригонометричні, показникові та логарифмічні функції.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Знаходження похідних функцій.
2. Похідна складної функції.
3. Похідна неявної функції.
4. Правило Лопіталя.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
5. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
6. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра,

аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.

7. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.

8. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Основні правила диференціювання

$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

$(uv)' = u'v + uv'$.

$(cu)' = cu'$, де $c = \text{const}$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Похідні від основних елементарних функцій

1. $(x)' = 1$;
2. $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3. $(e^x)' = e^x$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$;
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Приклад № 1. Знайти похідні функцій:

Розв'язання.

1) $y = 5x^4$, 2) $y = \dfrac{7}{x}$, 3) $y = 10\sqrt[3]{x}$,

4) $y = \dfrac{8}{x^4}$, 5) $y = \dfrac{9}{\sqrt{x^7}}$.

1) Винесемо сталий множник за знак похідної, а потім застосуємо формулу 2 таблиці похідних

$y' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^{4-1} = 20 \cdot x^3$.

Аналогічно дістанемо:

2) $y' = 7\left(\frac{1}{x}\right)' = 7\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2}$.

3) $y' = 10\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{10}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$.

4) $y' = 8\left(\frac{1}{x^4}\right)' = 8\,(x^{-4})' = 8 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -\frac{32}{x^5}$.

5) $y' = 9\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)' = 9\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} = -\frac{63}{2\sqrt{x^9}}$.

Приклад № 2. Знайти похідні функції:

1) $y = 4 + 5x^2 + \frac{8}{x^2} - \frac{4\sqrt{x}}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}}$;

2) $y = 2x\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[5]{x}} - 5$;

3) $y = x^4 \sin x$;

4) $y = \frac{8x - 7}{2x^3 + x^2}$;

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суми похідних доданків:

$$y' = (4)' + (5x^2)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)' - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 5 \cdot 2x + 8 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} -$$

$$- \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 2\sqrt{x}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 10x - \frac{16}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

2) $y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right) + \left(x^{1-\frac{1}{5}}\right)' - (5)' = 2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} = 3\sqrt{x} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$.

3) $y' = \left(x^4\right)' \sin x + x^4 \cdot (\sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$.

4) $y' = \frac{(8x-7)' \cdot \left(2x^3 + x^2\right) - (8x-7) \cdot \left(2x^3 + x^2\right)'}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} = \frac{8 \cdot \left(2x^3 + x^2\right) - (8x-7) \cdot \left(6x^2 + 2x\right)}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} =$

$= \frac{16x^3 + 8x^2 - 48x^3 + 42x^2 - 16x^2 + 14x}{\left(2x^3 + x^2\right)^2} = \frac{-32x^3 + 34x^2 + 14x}{(2x^3 + x^2)^2}$.

Приклад № 3. Знайти похідні складених функцій:

1) $y = \ln\sin x + \sqrt{arctgx}$;

2) $y = e^{3tg\frac{1}{x}} + \cos^3 x$;

3) $y=\left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}$;

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну від першого доданку за формулою:

$y_x{}'=y_u{}'\cdot u_x{}'$, де $y=\ln u, u=\sin x$.

Тоді

$$y_x{}'=\ln u\cdot u_x{}'=\frac{1}{u}\cdot(\sin x)_x{}'=\frac{1}{\sin x}\cos x=ctgx.$$

Похідну від другого доданку знайдемо аналогічно:

$y=\sqrt{u},\quad u=arctgx$

$$y_u{}'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u_x'=\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)'_x=\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Загалом

$$y_x{}'=ctgx+\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

2) $$y'=\left(e^{3tg\frac{1}{x}}\right)+\left(\cos^3 x\right)'=e^{3tg\frac{1}{x}}\left(3tg\frac{1}{x}\right)'+3\cos^2 x(\cos x)'=e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+$$

$$=3\cos^2 x(-\sin x)=e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{3}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-3\cos^2 x\sin x.$$

3) $$y'=\left(\left(4x^2+1\right)^2\right)'\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}-\left(4x^2+1\right)^2\cdot\left(5^{\sqrt{x^3-1}}\right)'=$$

$$=2\cdot\left(4x^2+1\right)\left(4x^2+1\right)'\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}+\left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}\cdot\ln 5\cdot\left(\sqrt{x^3-1}\right)'=$$

$$=2\cdot\left(4x^2+1\right)^2\cdot 8x\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}+\left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3-1}}\cdot 3x^2.$$

Приклад № 4. Знайти похідну параметрично заданої функції:

$x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$.

Розв'язання.

$y_t{}'=e^t\cdot\cos t+e^t\cdot(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t)$;

$x_t{}'=e^t\cdot\sin t+e^t\cdot\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$;

$$y_x{}'=\frac{y_t{}'}{x_t{}'}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}.$$

Приклад № 5. Знайти похідну неявно заданої функції: $x^2+4y^3+2xy=0$;

Розв'язання.

Диференціюємо по x ліву і праву частину рівняння, враховуючи, що y – це функція від x: $2x+12y^2\cdot y_x{}'+2y+2x\cdot y_x{}'=0$.

Розв'язуємо рівняння відносно $y_x{}'$. $y_x{}'\left(12y^2+2x\right)=-2x-2y$;

$$y_x{}'=\frac{-2x-2y}{12y^2+2x}=-\frac{x+y}{6y^2+x}.$$

Завдання для перевірки знань

Знайти похідну y':

$$1)\ y = \frac{2(3x^2 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}; \quad 2)\ y = \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1});$$

$$3)\ y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+7}); \quad 4)\ y = \operatorname{arctg} \frac{tgx - ctgx}{\sqrt{2}};$$

$$5)\ y = (x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^4}{16}\arcsin\frac{2}{x}.$$

$$6)\ y = e^{\arccos\frac{1}{x}}; \quad 7)\ y \cdot \ln y = x^3.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Практичне заняття №5.

Навчальна мета заняття –опанувати техніку дослідження функції однієї змінної.
Кількість годин - 2.
Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Дослідження функції та побудова її графіка

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
5. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
6. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.
7. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
8. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

При дослідженні функції та побудові її графіка скористатися наступною схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
5. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
6. Знайти асимптоти.

Приклад №1.Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 41$ та побудувати її графік.

1) Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$, тобто функція існує при всіх значеннях.

2) Парність, періодичність:

$y(-x) = -x^3 - 6x^2 + 36x + 41$, $\quad y(-x) \neq \pm y(x)$.

Функція загального виду, ні парна, ні непарна, неперіодична.

3) Точки перетину з осями координат:

– з віссю OX.: $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = 0$.

Легко перевірити, що x_1=1 є корінь рівняння, тому

$x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = (x-1)(x^2 - 5x - 41)$.

Знайдемо дві інші точки перетину графіка з віссю OX:

$x^2 - 5x - 41 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{189}}{2} \approx 9{,}37$;

$x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{189}}{2} \approx -4{,}37$.

Точки перетину графіка з віссю OX — A(1; 0), B(-4,37; 0), C(9,37; 0);

– точка перетину графіка з віссю OY (x=0) — D(0; 41).

4) Інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму:

$y' = 3x^2 - 12x - 36$; $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$.

Тоді x_1=6, x_2=–2 — критичні точки.

Здобуті дані заносимо до таблиці.

x	(-∞; -2)	-2	(-2; 6)	6	(6; +∞)
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f'(x)$	↗ (зростає)	81	↘ (спадає)	-175	↗ (зростає)

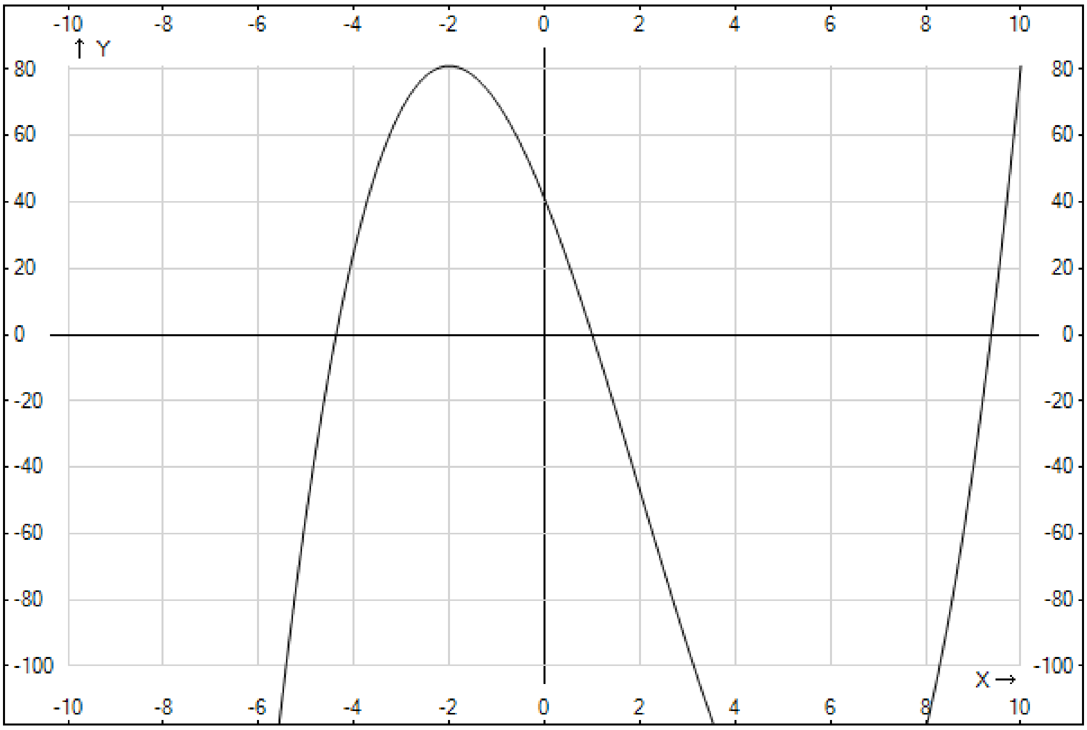
Точка максимуму функції M(-2; 81), точка мінімуму N(6; -175).

5) Точка перегину, інтервали опуклості та вгнутості:

$y'' = 6x - 12$, $y'' = 0$, $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ — критична точка другого роду.
Дані заносимо до таблиці

x	(-∞; 2)	2	(2; +∞)
$f'(x)$	–	0	+
$f'(x)$	∩ (опукла)	-47	∪ (вгнута)

Точка перегину *E*(2; -47).
6) Функція не має асимптот. Використовуючи здобуті дані, будуємо графік функції.



Приклад 2. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях *x* за винятком значення *x* = 1. Звідси її область визначення $\{-\infty < x < 1;\ 1 < x < +\infty\}$.
 Точка *x* = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0} (x-1)^2} = +\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки *x* = 1 маємо нескінченний розрив.
Точка *x* = 1 — точка розриву другого роду.
Вертикальні асимптоти. Пряма *x* = 1 є вертикальною асимптотою.
2. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю *Ox*: *y* = 0, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0,\ 2x-1=0,\ x = \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю *Oy*: *x* = 0, $y = \frac{-1}{1} = -1,\ (0;\ -1)$.
3. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 4.3:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x=0 \Rightarrow x=0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	$y_{\min}$ (–1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці x = 0 функція має мінімум:

$$y_{\min}=\frac{-1}{1}=-1.$$

У точці x = 1 функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y'(x)<0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

4. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y''=\frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\; y''=0 \Rightarrow$$

$2(2x+1)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$; при x = 1 y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\frac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y''=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0(-)$;при $x=0$ $y''=\frac{2}{1}=2>0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx-0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці x = 1 функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y''>0$, значить, графік функції вгнутий.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не	+

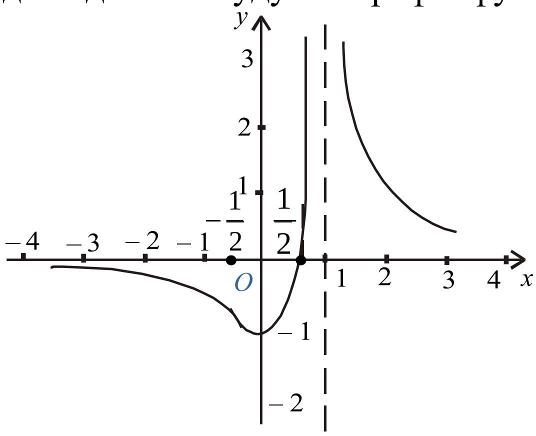
				існує	
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

5. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).
На підставі результатів дослідження будуємо графік функції.



Завдання для перевірки знань.

Дослідити функцію та побудувати її графік**:**

1. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$; **2.** $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 5: Основи аналізу функції кількох змінних.

Практичне заняття №6.

Навчальна мета заняття –засвоїти поняття функції багатьох змінних, опанувати техніку знаходження частинних похідних. Навчитись застосовувати повний диференціал до наближених обчислень.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Частинні похідні і їх властивості.
2. Похідні й диференціали старших порядків.

Література:

1. Конспект лекцій.

2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад №1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад №2. Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

Розв'язання. $dz = z'_x dx + z'_y dy$, де

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y},$$ отже,

$$dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y} dy\right).$$

Приклад №3. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y,$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y \, dx dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Приклад №4. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$

Приклад №5. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xy\sin\left(x^2 + y^2\right)$.

Приклад №5. Знайти $du,$ якщо $u = x^{y^2 z}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x 2yz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x y^2$.

Отже, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2yzx^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$.

Приклад №6. Знайти dz, якщо $z = \ln\left(x + \ln y\right)$.

$dz = z'_x dx + z'_y dy$, де $z'_x = \frac{1}{x + \ln y}$; $z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}$, отже, $dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y} dy\right)$.

Приклад №7. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y,$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$

$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y \, dx dy - \sin x \sin y dy^2.$

Приклад №8. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3.$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$

Завдання для перевірки знань.

Знайти частинні похідні першого порядку.

1) $u = xy + yz + zx$; 2) $u = z/x + x/z$;

3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 4) $u = y/z + \mathrm{arctg}\, z/x + \mathrm{arctg}\, x/z$;

Знайти повний диференціал функції $f(x;\, y)$ у заданій точці, якщо:

1) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а задана точка (1; 1); (0; 1);

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Практичне заняття №7.

Навчальна мета заняття –опанувати технологію дослідження функцій двох змінних на екстремум.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Локальний екстремум функції двох змінних та його дослідження.
2. Умовний екстремум функції двох змінних і метод Лагранжа його дослідження.
3. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції на замкненій обмеженій множині.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $f(x;y)=2x+8y-x^2-2y^2$.

Розв'язання

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x}=2-2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=8-4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $\begin{cases}2-2x=0\\8-4y=0\end{cases}$. Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=1$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, звідки дістаємо, що $\Delta=8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $A<0$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}\ (a>0,\ b>0).$$

Розв'язання.

Знайдемо z'_x і z'_y: $z'_x=\frac{x}{a}$, $z'_y=\frac{y}{b}$.

2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases} \frac{x}{a} = 0 \\ \frac{x}{b} = 0 \end{cases}$.

Отже, (0; 0) — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}:

$$z''_{xx} = \frac{1}{a},\ z''_{xy} = 0,\ z''_{yy} = \frac{1}{b}.$$

4. У точці (0; 0)

$$a_{11} = \frac{1}{a},\ a_{12} = 0,\ a_{22} = \frac{1}{b}.$$

$$\Delta = \frac{1}{ab} > 0.$$

Точка (0;0) — мінімум, хоча це ясно і безпосередньо

Приклад 3. Знайти умовний екстремум функції $u = f(x; y) = \ = 6 - 5x - 4y$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x; y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Розв'язання Функції f і φ подвійно неперервно диференційовні. Матриця Якобі в даному випадку має вигляд $(2x - 2y)$, і її ранг дорівнює 1 в усіх точках, що задовольняють рівняння зв'язку. Отже, можна скористатися методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x; y) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9).$$

Згідно з необхідними умовами дістанемо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = -5$, $y = 4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$; $x = 5$, $y = -4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким чином, функція f може мати умовний екстремум тільки в двох точках (–5; 4) і (5; – 4).

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, тоді $d^2L = 2\lambda(dx^2 - 2y^2)$.

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x;\ y)$.

У точках (–5; 4) і (5; – 4) диференціали dx і dy пов'язані рівністю: $5dx + 4dy = 0$, $dy = -\frac{5}{4}dx$. При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці (–5; 4) є додатно визначеною квадратичною формою $d^2L = \frac{9}{16}dx^2$, а в точці (5; –4) — від'ємно визначеною формою $d^2L = -\frac{9}{16}dx^2$.

Отже, функція f у точці (–5; 4) має умовний мінімум $u(-5;\ 4) = 15$, а в точці (5; –4) — умовний максимум $u(5;\ -4) = -3$.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$ (рис. 1).

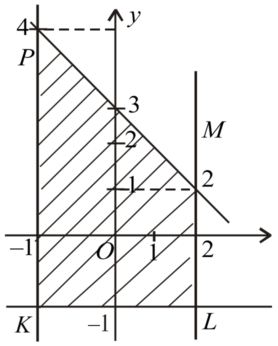


Рис. 1

1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: : $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0;\ 0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *y*: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *x*: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;-1)$, $M(2;1)$, $P(-1;4)$, $T\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$
.

Знаходимо $f(0;0) = 0$, $f(1;1) = -1$, $f(-1;-1) = -5$, $f(2;-1) = 13$, $f(2;1) = 3$, $f(-1;4) = 75$, $f\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) = 0$.

Отже, $z_{\min} = -5$, і це значення досягається в точці $(-1;-1)$, $z_{\max} = 75$, і це значення досягається в точці $(-1;4)$.

Завдання для перевірки знань

1.Знайти екстремум функції .

2. Знайти точки умовного екстремуму функції $z = xy$, якщо $x + y = 1$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - xy + \quad + y^2 - 4x$ у замкненій області, що обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 6: Інтегральне численні функції однієї змінної

Практичне заняття №8-9.

Навчальна мета заняття –засвоїти поняття первісної та невизначеного інтеграла. Опанувати техніку обчислення інтегралів за допомогою таблиці та методом заміни змінної. Набути навиків підбору підстановок, засвоїти формулу інтегрування частинами.

Кількість годин - 4.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Методи інтегрування невизначеного інтеграла.
2. Інтегрування раціональних функцій.
3. Інтегрування тригонометричних функцій.
4. Інтегрування ірраціональних функцій.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$; 2. $\int dx = x + C$; 3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 5. $\int e^x dx = e^x + C$; 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$; 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$;

11. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C$; 12. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; 14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$;

17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C = -\mathrm{arcctg}x + C$;

18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C$;

19. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C$;

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

Приклад №1. $\int\left(6x^2 - 3x + 5\right)dx$.

Розв'язання.

$$\int\left(6x^2 - 3x + 5\right)dx = \int 6x^2dx + \int(-3x)dx + \int 5dx = 6\int x^2dx - 3\int xdx + 5\int dx =$$

$$\overset{I}{=} 6\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + c = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c.$$

Приклад №2. $\int \sqrt[7]{x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int \sqrt[7]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{7}}dx = \frac{x^{1+\frac{2}{7}}}{1+\frac{2}{7}} + c = \frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}} + c.$$

Приклад №3. $\int \frac{2}{3x^5}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{2}{3x^5}dx = \int \frac{2}{3}x^{-5}dx \overset{\text{правило 1}}{=} \frac{2}{3}\int x^{-5}dx \overset{\text{формула 3 ТОНІ}}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{1}{6}x^{-4} + c = -\frac{1}{6x^4} + c.$$

Приклад №4. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання.

$$\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}.$$

$$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$\int\left(\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}\right)dx\overset{\textit{правила}\,1,2}{=}\frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{6}}dx-\frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\int x^{\frac{5}{12}}dx=$$

$$\overset{\textit{формула}\,3\,\textit{ТОНІ}}{=}\frac{1}{6}\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1}+c=\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{8\sqrt[4]{5}}{17}\cdot x^{\frac{17}{12}}+c=$$

$$=\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{8}{17}\sqrt[12]{125x^{17}}+c.$$

Приклад №5. $\int\left(2x^2+1\right)^3dx$.

Розв'язання.

Скористуємося для підінтегральної функції формулою скороченого множення: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Отримаємо:

$\left(2x^2+1\right)^3=8x^6+12x^4+6x^2+1$.

$$\int\left(2x^2+1\right)^3dx=\int\left(8x^6+12x^4+6x^2+1\right)dx=8\int x^6dx+12\int x^4dx+6\int x^2dx+\int dx=$$

$$=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+c.$$

Приклад №6. $\int\frac{dx}{2x-7}$.

Розв'язання.

Введемо заміну $t=2x-7$, $\frac{1}{2}\mathrm{dx}=\mathrm{dt}$:

$$\int\frac{\mathrm{dx}}{2\mathrm{x}-7}=\int\frac{\mathrm{dt}}{2\mathrm{t}}=\frac{1}{2}\mathrm{t}+\mathrm{c}=\frac{1}{2}\ln|2\mathrm{x}-7|+\mathrm{c}.$$

Приклад №7. $\int\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^x}dx$.

Розв'язання.

Розкриємо дужки в чисельнику підінтегральної функції і поділимо чисельник на знаменник:

$$\int\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^x}dx=\int\frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x-1}{e^x}dx=\int\left(e^{2x}-e^x+1-e^{-x}\right)dx\overset{\textit{правило}\,2}{=}$$

$$=\int e^{2x}dx-\int e^xdx+\int dx-\int e^{-x}dx\overset{\textit{правило}\,3,\ \textit{формули}\,5,2\ \textit{ТОНІ}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+e^{-x}+c.$$

Приклад №8. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

Розв'язання.

Оскільки коефіцієнт при x^2 в знаменнику підінтегральної функції дорівнює 1, для рішення рівняння $x^2-5x+6=0$ скористуємося теоремою Вієта: сумма коренів дорівнює 5, а добуток 6. Корені — 2,3.Скористаємось формулою $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + c.$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} \overset{\text{формула (3.2)}}{=} \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c\,.$$

Приклад №9. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Розв'язання.

Підінтегральний вираз поряд з $\sin x$ містить у якості множника $\cos x = (\sin x)'$. Це говорить на користь заміни: $t = \sin x$.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \begin{bmatrix} \textit{повернення до} \\ \textit{старої змінної } x \end{bmatrix} = \frac{\sin^4 x}{4} + c\,.$$

Приклад №10. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

Розв'язання.

Робимо заміну змінної: $t = \cos x$.

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{1+t^2} \overset{\text{правило 1}}{=} -\int \frac{dt}{1+t^2} \overset{\text{формула 11 ТОНІ}}{=} -arctgt + c =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{повернення до} \\ \textit{старої змінної } x \end{bmatrix} = -arctg(\cos x) + c.$$

Приклад №11. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$.

Розв'язання.

Чисельник у шуканому інтегралі з точністю до постійного множника представляє похідну знаменника:

$(e^{2x}+1)' = 2e^{2x}$,

тому $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} \overset{\text{формула (3.4)}}{=} \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + c$.

Приклад №12 $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt \overset{\text{формула 3 ТОНІ}}{=} -t^{-1} + c = \begin{bmatrix} \textit{повернення до} \\ \textit{старої змінної } x \end{bmatrix} = -\frac{1}{\ln x} + c\,.$$

Приклад № 13. $\int (1+3x^2)^{11} x dx$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{6}\int\left(1+3x^2\right)^{11}6xdx=\begin{bmatrix}t=1+3x^2\\ dt=6xdx\end{bmatrix}=\int t^{11}dt\overset{\text{формула 3 ТОНІ}}{=}\frac{t^{12}}{12}+c=\begin{bmatrix}\text{повернення до}\\ \text{старої змінної } x\end{bmatrix}=\frac{\left(1+3x^2\right)^{12}}{12}+c.$$

Приклад №14. $\int\frac{xdx}{1+x^4}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+\left(x^2\right)^2}=\begin{bmatrix}t=x^2\\ dt=2xdx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}\overset{\text{формула 11ТОНІ}}{=}\frac{1}{2}arctgt+c=\frac{1}{2}arctg\left(x^2\right)+c.$$

Приклад №15. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання.

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{bmatrix}=2\int e^t dt=2e^t+c=2e^{\sqrt{x}}+c.$$

Приклад №16. $\int x\cos xdx$.

Розв'язання.

$$\int x\cos xdx=\begin{bmatrix}u(x)=\cos x & dv(x)=xdx\\ du(x)=-\sin dx & v(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{bmatrix}\overset{\text{формула (3.10)}}{=}-\frac{x^2}{2}\sin x+\int\frac{x^2}{2}\sin xdx$$

Приклад №17. $\int x^2\sin 3xdx$.

Розв'язання.

$$\int x^2\sin 3xdx=\begin{bmatrix}u(x)=x^2 & dv(x)=\sin 3xdx\\ du(x)=2xdx & v(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx.$$

Інтеграл в правій частині не є табличним, але він простіший за поданий інтеграл: показник степеня при x в підінтегральному виразі зменшився на 1. Для отриманого інтеграла ще раз скористуємося формулою інтегрування за частинами:

$$\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx=\begin{bmatrix}u(x)=x & dv(x)=\cos 3xdx\\ du(x)=dx & v(x)=\frac{1}{3}\sin 3x\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx\right)=\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+c$$

Нарешті,

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+c.$$

Приклад №18 $\int\ln xdx$.

Розв'язання.

$$\int\ln xdx=\begin{bmatrix}u(x)=\ln x & dv(x)=dx\\ du(x)=\frac{dx}{x} & v(x)=x\end{bmatrix}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+c.$$

Приклад №19. $\int arctgxdx$.

Розв'язання.

$$\int arctgx dx = \begin{bmatrix} u(x) = arctgx & dv(x) = dx \\ du(x) = \dfrac{dx}{1+x^2} & v(x) = x \end{bmatrix} = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx .$$

Для обчислення інтегралу в правій частині останньої рівності скористуємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c .$$

Остаточно отримуємо:

$$\int arctgx dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c .$$

Завдання для перевірки знань

1. $\int\left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx$

2. $\int \cos 7x\, dx$

3. $\int \frac{dx}{x+3}$

4. $\int \sqrt{\sin x} \cos x\, dx$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

6. $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}.$

7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

8. $\int \arcsin x dx.$

9. $\int (2x+5)e^{-3x} dx.$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв’язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Практичне заняття №10.

Навчальна мета заняття –навчитися обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбница. Ознайомитися із практичним застосуванням визначеного інтеграла.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Обчислення визначених інтегралів.
2. Застосування визначеного інтеграла.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, переробл. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.

3. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв’язування прикладів за темою заняття.

Приклад№1. Обчислити визначені інтеграли:

Розв’язання.

а) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \left| \begin{matrix} x=\sin t & x=0 & t=0 \\ dx=\cos t dt & x=1 & t=\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

б) $$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} \left| \begin{matrix} \sqrt{x+1}=t & x=3 & t=2 \\ x=t^2-1 & x=8 & t=3 \\ dx=2tdt & & \end{matrix} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = \frac{32}{3}.$$

Приклад№2. Обчислити визначені інтеграли:

Розв’язання.

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx \left| \begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{matrix} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx = cosx\Big|_0^{\pi} = -2.$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = ln|1+x|\,\Big|_0^1 = ln|1+1| - ln|1+0| = ln2 - ln1 = ln2 - 0 = ln2}$$

$$\boldsymbol{\int_2^3 \left(1+2x+3x^2\right)dx = \left(x+2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \left(x+x^2+x^3\right)\Big|_2^3 = \left(3+3^2+3^3\right)-}$$

$$\boldsymbol{-\left(2+2^2+2^3\right) = (3+9+27)-(2+4+8) = 39-14 = 25.}$$

$$\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx=\int_1^8 \frac{2+5x^{\frac{1}{3}}}{x^3}dx=\int_1^8\left(2x^{-3}+5x^{-8/3}\right)dx=\left(2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+5\cdot\frac{x^{-5/3}}{-5/3}\right)\Bigg|_1^8$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\Bigg|_1^8=\left(-\frac{1}{64}-\frac{3}{\sqrt[8]{8^5}}\right)-(-1-3)=-\frac{1}{64}-\frac{3}{32}+4=-\frac{7}{64}+4=3\frac{57}{64}.$$

$$\int_0^{\pi/2} cos^2\, xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+cos\,2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sin\,2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}sin\,2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}sin\,2\cdot 0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_2^5\frac{dx}{x^2+2x+10}=\int_2^5\frac{dx}{x^2+2x+1+9}=\int_2^5\frac{dx}{(x+1)^2+9}=\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Bigg|_2^5=$$

$$=\frac{1}{3}\left[arctg\frac{5+1}{3}-arctg\frac{2+1}{3}\right]=\frac{1}{3}(arctg2-arctg1)=\frac{1}{3}\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}arctg2-\frac{\pi}{12}.$$

$$\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}=\int_0^1\frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2}.$$

Зробимо заміну $x^2=t$. Тоді $2xdx=dt$, $xdx=\frac{1}{2}dt$.

Визначимо нові межі інтегрування. Якщо $x=0$, то $t=0^2=0$, при $x=1$ $t=1^2=1$.

Отримаємо:

$$\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{8}.$$

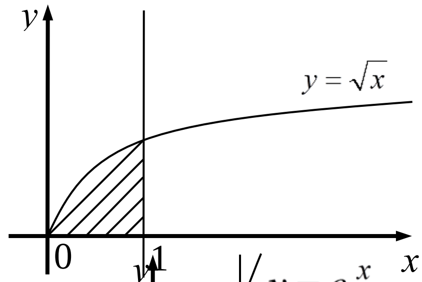
$$\int_0^3 xarctgxdx=\begin{vmatrix} u=arctgx, & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx, & v=x^2/2\end{vmatrix}=\left(arctgx\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\left(arctg3\cdot\frac{9}{2}-arctg0\cdot 0\right)-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}(x-arctgx)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}[(3-arctg3)-0]=\frac{9}{2}arctg3-\frac{3}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}arctg3=5arctg3-\frac{3}{2}.$$

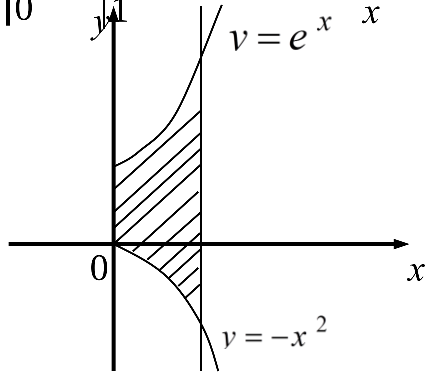
Приклад№3. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$.



Розв'язання.

$$S=\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\text{(кв. од.)}$$

Приклад№4. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=-x^2$, $y=e^x$, віссю ординат і прямою $x=1$.



Розв'язання.

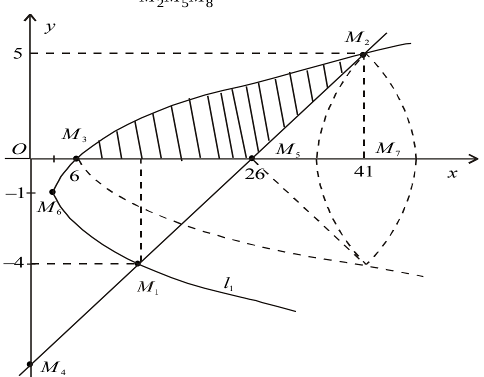
$$S=\int_0^1 \left[e^x-(-x^2)\right]dx=\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3}\quad\text{(кв.од.)}$$

Приклад №5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $x=y^2+2y+6$, $x-3y-26=0$, $y=0$, при $y>0$.

Розв'язання.

Будуємо задані лінії на координатній площині аналогічно попередній задачі і штрихуванням визначаємо ту фігуру, яка за умовою задачі обертається навколо осі *Ox*. Це буде фігура $M_2M_3M_5$ Об'єм тіла обертання $V_{M_2M_3M_5}=V_{M_3M_2M_7}$ (об'єм конуса $V_{M_2M_5M_8}$).



У даному прикладі для знаходження функції $y=f(x)$ виконаємо такі перетворення:

$$\begin{cases} x=y^2+2y+6 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=(y+1)^2 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{x-5}-1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-5}-1.$$

Знаходимо об'єми тіла обертання та конуса:

$$V_{M_3M_2M_7}=\pi\int_6^{41}\left(\sqrt{x-5}-1\right)^2dx=\pi\int_6^{41}\left(x-2\sqrt{x-5}-4\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4\left(\sqrt{x-5}\right)^3}{3}-4x\right)\Bigg|_6^{41}=395{,}8\pi;$$

$$V_{M_2M_5M_8} = \frac{1}{3}\pi(M_2M_7)^2 \cdot M_5M_7 = \frac{\pi}{3}25\cdot 15 = 125\pi .$$

Отже, об’єм тіла обертання $V_{M_2M_3M_5}$ буде такий: $V_{M_2M_3M_5} = (395{,}8 - 125)\pi = 270{,}8\pi$.

Приклад №6.

Знайти довжину дуги кривої $x = e^t\, cost$, $y = e^t\, sint$ від $t = 0$ до $t = ln\pi$.

Розв’язання.

Знайдемо dL: $x'(t) = e^t cost + e^t \cdot (-sint) = e^t(cost - sint)$,

$y'(t) = e^t sint + e^t cost = e^t(sint + cost)$.

Тоді $dL = \sqrt{\left[e^t(cos\,t - sin\,t)\right]^2 + \left[e^t(sin\,t + cos\,t)\right]^2}\; dt =$

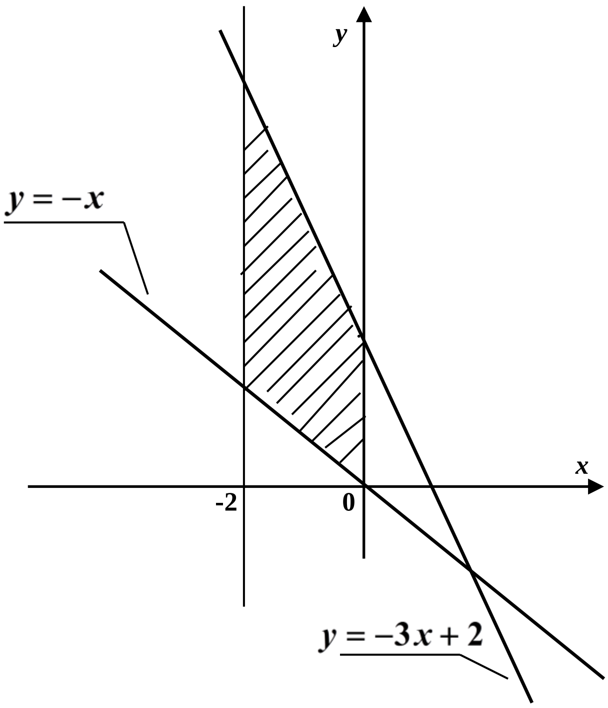
$= \sqrt{e^{2t}\left(cos^2 t - 2\,cos\,t\,sin\,t + sin^2 t + sin^2 t + 2\,sin\,t\,cos\,t + cos^2 t\right)}\,dt =$

$= e^t\sqrt{1+1}\,dt = \sqrt{2}e^t dt.$

Тоді $L = \int_0^{ln\pi} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_0^{ln\pi} = \sqrt{2}\left(e^{ln\pi} - e^0\right) = \sqrt{2}(\pi - 1)$.

Приклад №7. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = -3x + 2$, $y = -x$, $x = -2$, $x = 0$.

Розв’язання.



$V_{ox} = \pi \int_{-2}^{0} \left[(-3x+2)^2 - (-x)^2\right] dx =$

$= \pi \int_{-2}^{0} \left(9x^2 - 12x + 4 - x^2\right) dx =$

$= \pi \int_{-2}^{0} \left(8x^2 - 12x + 4\right) dx = 4\pi \int_{-2}^{0} \left(2x^2 - 3x + \right.$

$\left. + 1\right) dx = 4\pi\left(2\cdot\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$

$4\pi\left[0 - \left(-2\cdot\frac{8}{3} - 3\cdot\frac{4}{2} - 2\right)\right] = 4\pi\cdot\frac{40}{3} =$

$= \frac{160}{3}\pi$ куб. од.

Завдання для перевірки знань

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

1. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

2. $y = -x^2 + 9$, $y = 2x + 1$.

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями:

1. $y^2 = 1 - x, \ \ x = 0$ навколо осі *Oy*.

2. $x^2 - y^2 = 4, \ \ y = \pm 2$ навколо осі *Oy*.

3. $y = xe^x, \ \ y = 0, \ \ x = 1$ навколо осі *Ox*.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв’язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна література.

1. Дубовик В.П. ,Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
2. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Укрвїна», 2004. – 444 с.
3. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
1. Конспект лекцій з курсу "Вища математика", частина 1 "Лінійна алгебра і аналітична геометрія" / Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. - Харків: ХНУВС, 2007. - 62 с.
2. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелащенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Алгебра та геометрія для економістів. –К.:УФІМБ “Пошук”, 1998.
5. Навчально-методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» : [галузь знань: Інформаційні технології; спец.: Кібербезпека; спец.: протидія кіберзлочинності; ступінь вищ. освіти: бакалавр; форма навчання: денна] / розроб. Ю.В. Гнусов. - Харків : ХНУВС. - 2016. - 14 с.

Допоміжна література.

1. Вища математика: Навч. – метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – Вид. 2- ге, перероб. і доп. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
2. Чубатюк В. М. Вища математика. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. – К.: ВД «Професіонал», 2006. – 432 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://library.tneu.edu.ua/files/EVD/matematica/VM_pidr.pdf. - Назва з екрану.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.
3. Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу "Вища математика": Частина I. – Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2015. – 96 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3472/1/Methodychka_VM_Phys.pdf