

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою – Теорія напруженого стану в околі точки

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 № 8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 № 8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від
10.08.2022 № 1

Розробник: доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.т.н., доцент,
спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Долударєва Я.С.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.
2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

План лекції:

1. Загальні відомості про напружений стан у точці тіла.
2. Види напруженого стану.
3. Напруження у скісних перерізах при плоскому напруженому стані.
4. Визначення головних напружень і положення головних площин.
5. Узагальнений закон Гука.
6. Поняття про теорії міцності і їх використання.

Рекомендована література:

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишин та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

Текст лекції

1. Загальні відомості про напружений стан у точці тіла.

Нагадаємо, що напружений стан у даній точці тіла характеризується сукупністю нормальних і дотичних напружень, що виникають на безлічі порізногому орієнтованих у просторі площинок, які можна провести через цю точку.

Уявимо, що навколо досліджуваної точки виділений нескінченно малий елемент, який має форму прямокутного паралелепіпеда, і напруження, виникаючі на його гранях, відомі. Кожне з цих напружень може бути розкладене на три складові, паралельні координатним осям. Таким чином, у загальному випадку на трьох початкових площинках виникають дев'ять складових напружень, показаних на рис.3.1 (напруження на невидимих гранях елемента не показані). Нормальні напруження позначимо індексами осей, у напрямі яких вони діють: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Дотичні напруження позначимо двома індексами: перший з них вказує, якій осі паралельна нормаль до площинки дії розглядуваного напруження, другий індекс показує, якій осі паралельне дане напруження.

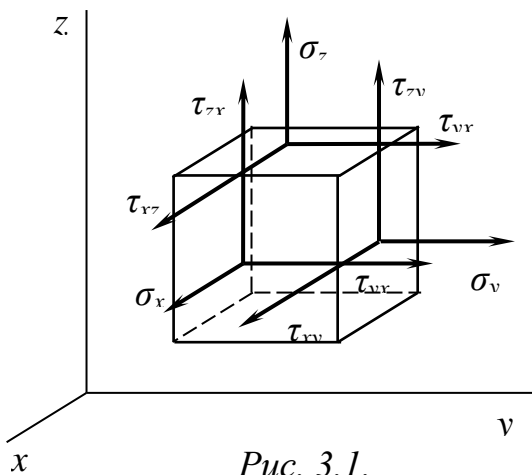


Рис. 3.1.

Таким чином, напружений стан у довільній точці тіла можна зобразити системою дев'яти векторів нормальних і дотичних напружень, які називаються компонентами напруженого стану у даній точці:

$$\begin{aligned} &\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \\ &\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz} \\ &\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

На основі закону парності дотичних напружень (див. 2.3) складові дотичних напружень, що виникають на двох взаємно перпендикулярних площинках,

рівні між собою: $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|, |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$.

Отже з дев'яти компонентів напружень (3.1) залишається шість різних: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Їх можна записати у таблицю (матрицю), на головній діагоналі якої розташовані нормальні напруження, а точки вказують на те, що дотичні напруження, замість яких вони поставлені, дорівнюють дотичним напруженням, розташованим симетрично відносно головної діагоналі:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Симетричну квадратну матрицю (3.2) називають тензором напружень. Напружений стан у точці, таким чином, повністю означений, якщо відомий тензор напружень для цієї точки тіла.

2. Види напруженого стану.

Вивчаючи напружений стан матеріалу при розтягу або стиску, ми відзначили, що навколо будь-якої точки стержня можна виділити площинки, на яких немає дотичних напружень. Такі площинки називають головними площинками, а нормальні напруження, які на них виникають, – головними напруженнями.

Головні напруження позначають індексами 1, 2 і 3, при чому завжди вважатимемо, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Доведено, що в будь-якій точці довільно навантаженого тіла можна завжди вказати три взаємно перпендикулярні головні площинки.

Головні напруження можуть усі не дорівнювати нулеві, або деякі з них можуть йому дорівнювати. Залежно від того, скільки є нерівних нулеві головних напружень, розрізняють три види напруженого стану матеріалу: об'ємний (тривісний), плоский (двовісний) і лінійний (одновісний).

Об'ємним, або тривісним, напруженим станом називають такий напружений стан, при якому всі три головні напруження не дорівнюють нулеві, тобто коли $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ (рис. 3.2,а). При плоскому напруженому стані одне головне напруження дорівнює нулеві (рис. 3.2,б), а при лінійному – два головних напруження дорівнюють нулеві (рис. 3.2,в).

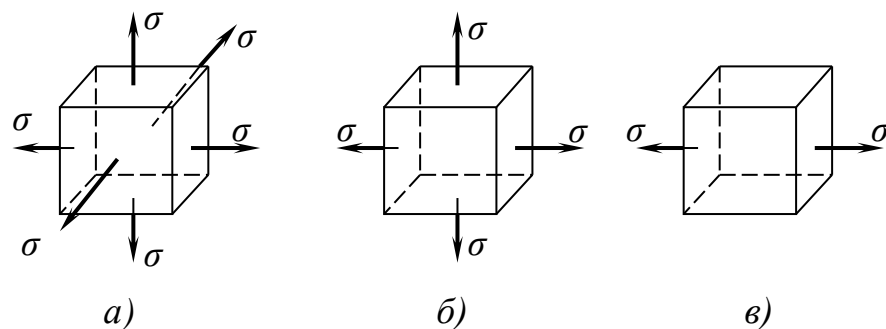


Рис. 3.2.

На рис. 3.2 показані лише розтягуючі головні напруження, однак вони можуть бути як розтягуючими, так і стискуючими і виступати в різних комбінаціях.

Лінійний напружений стан ми вивчили, розглядаючи розтяг або стиск прямого стержня. Зараз перейдемо до вивчення плоского напруженого стану. Слід зауважити, що основні задачі опору матеріалів зводяться до розгляду плоского напруженого стану. Об'ємний напружений стан вивчають у курсі теорії пружності.

3. Напруження у скісних перерізах при плоскому напруженому стані.

Розглянемо елементарний кубик, що знаходиться в плоскому напруженому стані під дією розтягуючих головних напружень σ_1 і σ_2 (рис. 3.3.а).

Визначимо напруження на площині, перпендикулярній до фасадної грані елемента і довільно нахиленої відносно його бокових граней (заштрихованій на рис. 3.3.а).

Нехай зовнішня нормаль n_α до нахиленої площинки утворює з напрямком напруження σ_1 кут α , що вважається додатним при відкладанні проти ходу стрілки годинника (рис. 3.3,б).

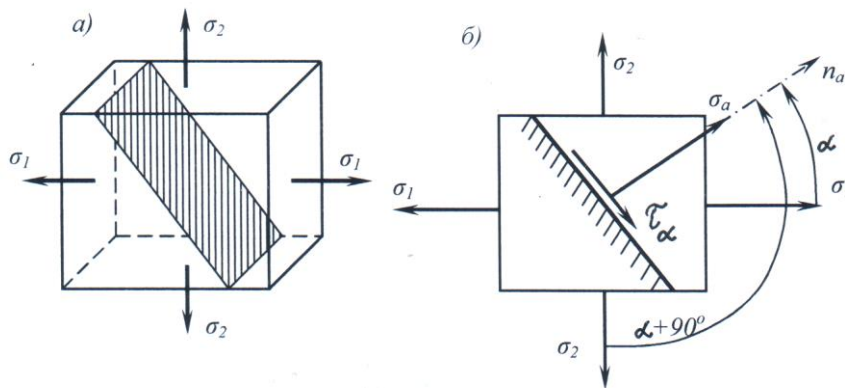


Рис.3.3

Нормальні і дотичні напруження на нахиленій площині визначимо, використовуючи одержані раніше формули для цих же напружень при лінійному напруженому стані (див. 2.3) і застосовуючи принцип незалежності дії сил.

У даному випадку використання цього принципу зведеться до того, що ми спочатку визначимо напруження, викликані дією головного напруження σ_1 , а потім дією головного напруження σ_2 і результати просумуємо:

Використовуючи формули (2.3) і (2.4), одержимо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (3.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_2 \sin 2(\alpha + 90^\circ) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

Із формули (3.4) видно, що максимальні дотичні напруження дорівнюють

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \quad (3.5)$$

і мають місце у перерізах, нахилених під одним і тим же кутом до напрямків σ_1 і σ_2 , тобто при $\alpha = 45^\circ$. Це витікає із умови, що τ_{\max} має місце при $\sin 2\alpha = 1$.

Перевіримо ще, на яких площинках виникають екстремальні нормальні напруження. З умови $d\sigma_\alpha / d\alpha = 0$ знайдемо

$$-(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0, \text{ або } \sin 2\alpha = 0.$$

Як впливає з формули (3.4), ця умова рівнозначна умові $\tau_\alpha = 0$. Отже, екстремальні нормальні напруження виникають на площинках, на яких немає

дотичних напружень, тобто на головних площинках. У даному випадку маємо: при $\alpha = 0^\circ$ $\sigma_\alpha = \sigma_1 = \sigma_{\max}$; при $\alpha = 90^\circ$ $\sigma_\alpha = \sigma_2 = \sigma_{\min}$.

4. Визначення головних напружень і положення головних площинок.

Розглянемо обернену задачу. Задані нормальні і дотичні напруження, які діють на гранях елемента (рис.3.4,а). Вимагається визначити положення головних площинок і значення головних напружень. Розглянемо рівновагу виділеної трьохгранної призми DBC (рис. 3.4,б). Прийmemo, що $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$. Кут φ будемо відраховувати від напрямку більшого напруження до нормалі площинки. За додатній напрямок відрахунків кута φ прийmemo напрямок проти годинникової стрілки. Площу нахиленої грані позначимо dA . Тоді площа вертикальної грані буде $dA \sin \varphi$, а горизонтальної - $dA \cos \varphi$.

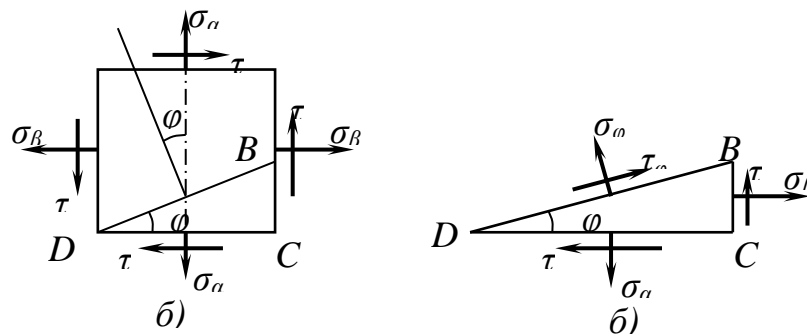


Рис. 3.4.

Проектуючи усі сили на напрямок σ_φ , одержимо:

$$\sigma_\varphi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \varphi) \cos \varphi + (\tau dA \cos \varphi) \sin \varphi + (\tau dA \sin \varphi) \cos \varphi - (\sigma_\beta dA \sin \varphi) \sin \varphi = 0.$$

Проектуємо тепер усі сили на напрямок τ_φ :

$$\tau_\varphi dA - (\sigma_\alpha dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\tau dA \cos \varphi) \cos \varphi + (\tau dA \sin \varphi) \sin \varphi + (\sigma_\beta dA \sin \varphi) \cos \varphi = 0.$$

Скоротивши на dA , введемо функції подвійних кутів. Одержуємо:

$$\sigma_\varphi = \sigma_\alpha \cos^2 \varphi + \sigma_\beta \sin^2 \varphi - \tau \sin 2\varphi \quad (3.6)$$

$$\tau_\varphi = 0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \quad (3.7)$$

При зміні кута нахилу площинки φ величина σ_φ буде неперервно змінюватися.

Щоб знайти положення головних площинок, тобто площинок, на яких діють екстремальні напруження, слід або прирівняти нулеві похідну $d\sigma_\varphi / d\varphi$, або прирівняти нулеві дотичні напруження τ_φ , тому що на головних площинках дотичних напружень немає.

У обох випадках одержуємо: $0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\varphi_0 + \tau \cos 2\varphi_0 = 0$, або

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2\tau / (\sigma_\beta - \sigma_\alpha). \quad (3.8)$$

Щоб одержати значення екстремальних нормальних напружень, тобто головних напружень, значення кута із формули (3.8) підставимо у формулу

(3.6). Попередньо тригонометричні функції у формулі (3.6) слід виразити через тангенс подвійного кута. Для цього використовуємо відомі формули тригонометрії:

$$\sin 2\varphi_0 = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}; \cos 2\varphi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}};$$

$$\cos^2 \varphi_0 = 0,5(1 + \cos 2\varphi_0); \sin^2 \varphi_0 = 0,5(1 - \cos 2\varphi_0).$$

Після нескладних перетворень одержуємо формулу для визначення головних напружень:

$$\sigma_{\max, \min} = 0,5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm 0,5\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2}. \quad (3.9)$$

Досліджуючи другу похідну $d^2\sigma_\varphi/d\varphi^2$, можна переконатися, що на головній площинці під кутом φ_0 при прийнятій умові ($\sigma_\alpha > \sigma_\beta$) діє максимальне головне напруження, а на площинці під кутом $\varphi_0 + 90^\circ$ діє мінімальне головне напруження. Аналогічно можна знайти екстремальні значення дотичних напружень, прирівнявши нулевій похідну $d\tau_\varphi/d\varphi = 0$. Одержимо:

$$\tau_{\max, \min} = \pm 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (3.10)$$

5. Узагальнений закон Гука.

Визначимо відносні лінійні деформації ε_1 , ε_2 і ε_3 ребер елементарного кубика, що знаходиться у стані всебічного розтягу, у напрямку кожного з головних напружень (рис. 3.5).

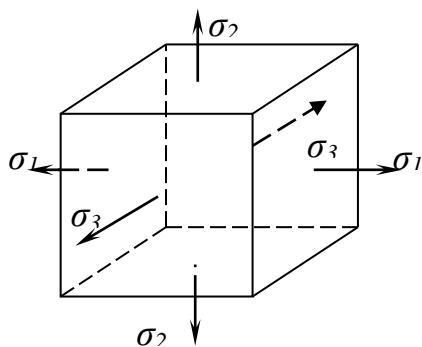


Рис. 3.5.

Використовуючи принцип суперпозиції, зобразимо відносну лінійну деформацію ε_1 у напрямку головного напруження σ_1 як суму деформацій, викликаних дією напружень σ_1 , σ_2 і σ_3 , взятих окремо, тобто як суму деформацій при трьох незалежних від себе лінійних напружених станах. Користуючись формулами $\sigma = E\varepsilon$ (закон Гука при розтягу і стиску) та $\nu = |\varepsilon'/\varepsilon|$ (коефіцієнт Пуассона), знайдемо:

відносна поздовжня деформація в напрямку напруження σ_1 від самого напруження σ_1 : $\varepsilon_{11} = \sigma_1/E$. Дія напруження σ_2 визиває зменшення елемента в напрямку напруження σ_1 , яке знаходиться за допомогою коефіцієнта Пуассона: $\varepsilon_{12} = -\nu\sigma_2/E$, де $\sigma_2/E = \varepsilon_{22}$ - поздовжня деформація елемента у напрямку σ_2 від самого напруження σ_2 . Така ж дія буде і напруження σ_3 відносно зміни розміру кубика у напрямі напруження σ_3 : $\varepsilon_{13} = -\nu\sigma_3/E$.

Сумарна відносна деформація елемента у напрямку головного напруження σ_1 буде $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$, тобто

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно можна знайти відносні лінійні деформації ε_2 і ε_3 у напрямках головних напружень σ_2 і σ_3 . У результаті будемо мати:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\tag{3.11}$$

Формулами (3.11) виражається узагальнений закон Гука.

В окремому випадку, коли одне з головних напружень дорівнює нулеві, одержимо закон Гука при плоскому напруженому стані. Якщо, наприклад, $\sigma_3 = 0$, то матимемо

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu\sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu\sigma_1); \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}\tag{3.12}$$

6. Поняття про теорії міцності і їх використання.

У випадку лінійного (одновісного) напруженого стану оцінка міцності у даній точці конструкції виконується шляхом безпосереднього порівнювання виникаючого в ній робочого напруження або з граничним, або з допустимим напруженням. Коефіцієнт запасу міцності дорівнює відношенню граничного напруження до робочого (розрахункового): $n = \sigma_{cp} / \sigma$.

Підкреслимо ще раз, що виникнення текучості або властивостей крихкого руйнування хоча б в одній точці конструкції розглядається як порушення міцності конструкції в цілому. Розрахунок на міцність, заснований на такому уявленні про небезпечний стан конструкції, називають розрахунком по небезпечній точці або розрахунком за допустимим напруженням. В сучасній розрахунковій практиці використовують також і інші методи розрахунків (по граничним навантаженням або несучій здібності, по розрахунковим граничним станам), засновані на інших уявленнях про небезпечні (граничні) стани конструкції; тут ці методи не розглядаються.

Граничне напруження визначають при механічних випробуваннях даного матеріалу на одновісний розтяг і стиск. Для пластичних матеріалів за граничне напруження приймають границю текучості σ_y (або $\sigma_{0.2}$ для матеріалів, діаграма розтягу яких не має чітко вираженої площинки текучості); для малопластичних матеріалів $\sigma_{0.2t}$ або $\sigma_{0.2c}$ - умовну границю текучості при розтягу або стиску; для крихких матеріалів σ_u - границя міцності відповідно при розтягу або стиску.

Виникає питання, як підійти до оцінки міцності у загальному випадку складного (об'ємного або плоского) напруженого стану.

Нехай у досліджуваній точці виникає напружений стан, що характеризується визначеними з розрахунку головними напруженнями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Як нам уже відомо, три головних напруження повністю визначають напружений стан у точці тіла. Припустимо далі, що в лабораторних умовах для даного матеріалу здійснений напружений стан, подібний заданому у небезпечній точці деталі. Подібними називають напружені стани, для яких відношення головних напружень однакові, тобто

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sigma'_1 : \sigma'_2 : \sigma'_3.$$

При певному значенні головних напружень $(\sigma_{1zp}, \sigma_{2zp}, \sigma_{3zp})$ напружений стан у деякій точці (точках) зразка стає граничним, тобто або настає текучість, або з'являються ознаки крихкого руйнування. Величина, яка показує, у скільки разів необхідно збільшити виникаючі у досліджуваній точці головні напруження, для того щоб напружений стан став граничним, являє собою коефіцієнт запасу міцності

$$n = \sigma_{1zp} / \sigma_1 = \sigma_{2zp} / \sigma_2 = \sigma_{3zp} / \sigma_3.$$

Підкреслимо, що написаний вираз має сенс лише у випадку, коли граничний напружений стан подібний заданому.

Практично викладений підхід до розрахунку на міцність при складному напруженому стані можливий лише у рідких випадках. Дійсно, різноманітність напружених станів безмежна, дуже велика також номенклатура матеріалів, що використовуються на практиці, і створити кожний з можливих напружених станів, та до того ж для всіх матеріалів у лабораторних умовах неможливо як з технічних, так і економічних причин.

Отже, маючи обмежені експериментальні дані про властивості означеного матеріалу- значеннями граничних напружень при одновісному розтягу і стиску, необхідно мати можливість оцінити його міцність в умовах будь-якого складного напруженого стану. Це стає можливим при застосуванні так званих гіпотез міцності (теорій граничних напружених станів).

Будемо називати два напружених стани рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо вони переходять у граничні при збільшенні відповідних їм головних напружень в одне й теж число (n) разів. Це означає, що коефіцієнт запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Залишається вирішити питання, що є критерієм (ознакою) рівнонебезпечності різних за характером (неподібних) напружених станів. Припустимо, що рішення цього питання існує (його дають гіпотези міцності). Тоді для розрахунку на міцність у випадку складного напруженого стану слід замінити його рівнонебезпечним (еквівалентним) йому одновісним розтягом і порівняти відповідне напруження з граничним (або з допустимим) для даного матеріалу. Цей підхід до оцінки міцності при об'ємному або плоскому напруженому стані можна зобразити умовною схемою (рис. 3.6).

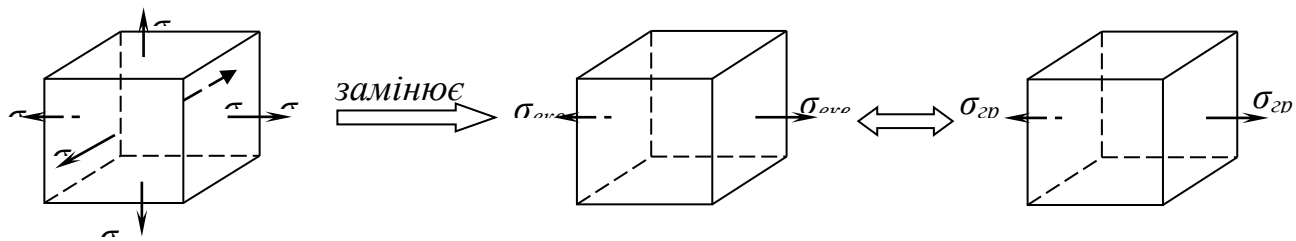


Рис. 3.6

Напруження при одновісному розтязі, рівнонебезпечне заданому складному напруженому стану, називають еквівалентним напруженням $\sigma_{екв}$. З наведених міркувань витікає, що еквівалентне напруження - це лише якась умовна розрахункова величина, а не деяке реально виникаюче напруження. Значення еквівалентного напруження залежить не тільки від заданого напруженого стану (тобто відповідних йому головних напружень), але і від прийнятої для розрахунку ознаки рівнонебезпечності напружених станів.

Гіпотези, що вказують на ознаки рівнонебезпечності (критерії еквівалентності) різних напружених станів, називають гіпотезами міцності. Інші найменування: теорія граничних напружених станів (гіпотези виникнення текучості і гіпотези міцності); гіпотези пластичності і крихкого руйнування; теорії міцності.

Із сказаного виходить, що застосування гіпотез міцності звільняє від необхідності проведення величезної кількості експериментів. Разом з тим самі гіпотези міцності потребують експериментальної перевірки. Той чи інший критерій еквівалентності може бути основою для практичних розрахунків лише за умови, що для ряду окремих випадків він перевірений дослідним шляхом і результати експерименту виявились достатньо близькі до результатів теоретичного розрахунку.

Незалежно від прийнятої гіпотези міцності після визначення еквівалентного напруження умову міцності можна представити у вигляді одної із наступних нерівностей:

$$n = \sigma_{сп} / \sigma_{екв} \geq [n], \quad (3.13)$$

або

$$\sigma_{екв} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.14)$$

Розглянемо критерії еквівалентності за чотирма теоремами міцності, які найбільш широко застосовуються в сучасній розрахунковій практиці, і наведемо залежності для обчислення еквівалентних напружень.

1. Теорія найбільших нормальних напружень. В основі цієї теорії міцності лежить гіпотеза про те, що матеріал руйнується від найбільших нормальних напружень. Іншими словами, незалежно від складності напруженого стану, руйнування матеріалу відбувається тоді, коли нормальне напруження в якому-небудь напрямку досягне величини напруження, при якому відбувається руйнування у випадку простого розтягу чи стиску, тобто

$$\sigma_{el} = \sigma_{max},$$

де σ_{el} - еквівалентне напруження за першою теорією міцності.

Перша теорія міцності найбільш стара (запропонована ще Галілеєм); у період її створення будівельними матеріалами були головним чином крихкі матеріали (чугун, камінь і т.п.). Спостереження за руйнуванням крихких матеріалів навело на думку, що причиною всіх матеріалів є найбільші нормальні напруження. Ця теорія дає достатньо задовільні результати тільки при розрахунках деталей з крихких матеріалів.

2. Теорія найбільших лінійних деформацій. В основі цієї теорії міцності лежить гіпотеза, що матеріал незалежно від складності напруженого стану руйнуються тоді, коли відносне подовження або скорочення у будь-якому напрямку сягає такої величини, при якій відбувається руйнування при простому розтязі чи стискові.

Якщо тіло знаходиться в складному напруженому стані і відомі головні напруження σ_1 , σ_2 і σ_3 , то найбільша лінійна деформація виникає в напрямку одного з головних напружень. Лінійні деформації при складному напруженому стані у напрямку головних напружень визначаються за формулами (3.11). Користуючись цими формулами можна завжди знайти найбільш небезпечну деформацію для даного матеріалу, тобто ε_{\max} .

Таким чином, спираючись на узагальнений закон Гука (3.11), за другою теорією міцності еквівалентне напруження визначається так:

$$\begin{aligned}\sigma_{eII} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3); \\ \sigma_{eII} &= \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3); \\ \sigma_{eII} &= \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Отже, при розрахунках за другою теорією міцності визначається найбільше еквівалентне напруження за формулою (3.15), яке не повинно перевищувати допустиме напруження (див. (3.14)).

Друга теорія міцності хоча і враховує усі три головні напруження, але випробуваннями вона недостатньо добре підтверджується, а іноді призводить до протилежних результатів. Так, наприклад, за цією теорією брус, який розтягується у двох взаємно перпендикулярних напрямках, повинен витримувати більше навантаження, ніж при розтяганні в одному напрямку. Експеримент цього не підтверджує.

3. Теорія найбільших дотичних напружень. Згідно з цією теорією, два напружених стани рівнонебезпечні, якщо максимальні дотичні напруження для них однакові. Іншими словами, руйнування матеріалу незалежно від складності напруженого стану настає тоді, коли найбільші дотичні напруження сягають величини, при якій відбувається руйнування у випадку простого розтягу, тобто

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{екв}}.$$

Для плоского напруженого стану (3.5)

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2.$$

Для об'ємного напруженого стану, використовуючи формулу (3.5), одержимо

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2.\tag{3.16}$$

Для еквівалентного лінійного напруженого стану за формулою (2.5) одержуємо:

$$\tau_{\max} = \sigma_{eIII}/2,$$

тобто, за третьою теорією міцності еквівалентне напруження σ_{ell} визначається за формулою

$$\sigma_{ell} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3.17)$$

Таким чином, згідно з цією теорією міцності небезпечний стан у матеріалі наступить тоді, коли різниця між найбільшим і найменшим нормальним напруженням сягне граничної величини для даного матеріалу.

Очевидним недоліком третьої теорії міцності є те, що не враховується вплив проміжного напруження σ_2 .

Ретельно поставлені досліді показали, що для пластичних матеріалів ця теорія дає задовільні результати. Помилка від нехтування впливом σ_2 не перевищує 10-15%.

4. У сучасній розрахунковій практиці широке розповсюдження набула четверта теорія міцності для пластичних матеріалів. В основі цієї теорії лежить гіпотеза, що два напружених стани рівнонебезпечні, якщо питома потенціальна енергія зміни форми для них однакова.

Формулу для визначення еквівалентного напруження по цій теорії міцності, подаємо без виведення:

$$\sigma_{elV} = \sqrt{0.5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (3.18)$$

Ця теорія міцності добре узгоджується з експериментальними даними для пластичних матеріалів. Для них вона точніша, ніж теорія найбільших дотичних напружень.