

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

**з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»
обов'язкових компонент освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Облік і аудит**

за темою №1 – Означення ймовірності. Основні теореми теорії ймовірностей.

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 №8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол
від 10.08.2022 № 1

Розробник: доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф. –м.н.
Семенов В.О.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Ст.викладач циклової комісії економіки та управління Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат економічних наук Цимбалістова О.А.

План лекції

1. Класичне визначення ймовірності. Основні формули комбінаторики. Статистична ймовірність. Геометричні ймовірності.
2. Теореми додавання та множення ймовірностей. Умовна ймовірність.
3. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Формули Бейеса.

Рекомендована література:

Основна

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те видання : навчальний посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
2. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.
3. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
4. Конспект лекцій.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
<https://yandex.ua/search/?lr=143&oprnd=9346860898&text=жильцов%20теорія%20ймовірностей>

Текст лекції

1.1 Класичне визначення ймовірності.

Явища (події) , що спостерігаються нами, можна розділити на три види: достовірні, неможливі, випадкові. *Достовірною* називають подію, що обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов. *Неможливою* називають подію, що завідомо не відбудеться, якщо буде здійснена визначена сукупність умов. *Випадковою* називають подію, що при здійсненні визначеної сукупності умов може або відбутися, або не відбутися. Надалі, замість того щоб говорити «сукупність умов здійснена», будемо говорити коротко «проведено іспит». Таким чином, подія буде розглядатися як результат іспиту.

Приклади:

1) Іспит – підкидання монети. Подія – поява герба при падінні монети. 2) Іспит – постріл. Подія – влучення в мішень. 3) Іспит – проведення лекції. Подія – поява студента (той або інший студент частіше або рідше з'являється на лекції).

У теорії ймовірностей випадкові події прийнято позначати великими буквами латинського алфавіту. Кожна випадкова подія є наслідком дії багатьох

випадкових причин. Неможливо врахувати вплив на результат усіх цих причин, оскільки їх кількість дуже велика і закони їх дії невідомі. Тому теорія ймовірностей не ставить перед собою задачу передбачити, відбудеться одинична подія чи ні, – вона просто не в силах цього зробити. Інакше обстоїть справа, якщо розглядаються випадкові події, що можуть багаторазово спостерігатися при здійсненні тих самих умов, тобто якщо мова йде про масові однорідні випадкові події. Виявляється, що досить велике число однорідних випадкових подій незалежно від їхньої конкретної природи підкоряється визначеним закономірностям. Виявленням цих закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Предметом теорії ймовірностей є ймовірності закономірності, які властиві масовим однорідним випадковим подіям. Знання закономірностей, яким підкоряються масові випадкові події, дозволяє передбачати, як ці події будуть протікати. Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства й техніки: у теорії надійності, теорії масового обслуговування, теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії стрільниці, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного керування, загальної теорії зв'язку, і в багатьох інших теоретичних і прикладних науках. Теорія ймовірностей слугує також для обґрунтування математичної й прикладної статистики, що у свою чергу використовується при плануванні й організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, попередньому й приймальному контролю якості продукції і для багатьох інших цілей.

Види випадкових подій.

Події називають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших у тому самому випробуванні.

Приклади. 1) Поява герба й поява цифри при підкиданні однієї монети. 2) Поява 2-х гербів і 2-х цифр при киданні двох монет.

Кілька подій утворюють *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з них. Іншими словами, поява хоча б одної з подій повної групи є достовірною подією.

Приклади. 1) Поява герба й поява цифри при підкиданні однієї монети. 2) Поява чорної або червоної масті при витягуванні карти з колоди.

Якщо події, що утворюють повну групу, попарно несутимісні, то в результаті іспиту з'явиться одна і тільки одна з цих подій. Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інші.

Події A і \bar{A} називаються *протилежними*, якщо вони несутимісні й утворюють повну групу подій

Приклад. Іспит: підкидання монети. Події: поява герба й поява цифри.

Елементарними подіями називають такі події, що утворюють повну групу, є попарно несутимісними і рівноможливими. Ті елементарні події, в яких цікавляча нас подія настає, називаємо *сприятливими* цій події.

Класичне визначення ймовірності

Ймовірність є число, що характеризує ступінь можливості появи події.

Імовірністю події A називають відношення числа сприятливих цій події елементарних подій до загального числа всіх можливих елементарних подій випробування.

$$\text{Імовірність події } A \text{ позначають } P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – число сприятливих події A елементарних подій;
 n – загальне число всіх можливих елементарних подій іспиту.

Властивості ймовірності:

- 1) Імовірність набуває значення від 0 до 1.
- 2) Імовірність неможливої події дорівнює 0.
- 3) Імовірність достовірної події дорівнює 1.

Приклад 1. Визначити імовірність появи герба при одному киданні монети.

Роз'язання. Подія A – поява герба при одному киданні. $P(A)$ – імовірність події A . Можливі елементарні події іспиту: герб, цифра. Вони – несумісні, рівноможливі й утворюють повну групу: $n=2$. Число сприятливих елементарних подій дорівнює 1 (герб), тому $m=1$. Отже, $P(A) = 1/2$.

Приклад 2. Визначити імовірність того, що при киданні грального кубика випаде не менше 5 очків.

Роз'язання. Нехай подія A – поява кількості очків ≥ 5 . Елементарні події: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – несумісні, рівноможливі, утворюють повну групу. Сприятливі елементарні події: 5, 6, тому $n=6$, $m=2$, отже, $P(A) = 2/6=1/3$.

Приклад 3. В урні є a білих і b чорних куль. З урни навмання витягли кулю. Знайти імовірність виймання білої (подія A) і чорної (подія B) куль.

Роз'язання. Число елементарних подій випробування дорівнює $(a + b)$, тоді

$$P(A) = \frac{a}{a+b}; \quad P(B) = \frac{b}{a+b}.$$

1.2 Основні формули комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають кількісні характеристики різних видів комбінацій елементів, незалежно від природи самих елементів.

Перестановками з m елементів називаються такі їх комбінації, що відрізняються порядком елементів, які входять у цю комбінацію.

Формула числа перестановок з n елементів:

$$P_n = n!$$

Приклад 4. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів (a, b, c) .

Роз'язання. $abc \ bac \ cab \ acb \ bca \ cba$

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Розміщеннями з n елементів по m називаються такі комбінації m елементів, вибраних із заданих n елементів, що відрізняються одна від другої або самими елементами, що входять у групу, або їх порядком.

Формула визначення числа розміщень із n елементів по m :

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклад 5. Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів (a, b, c) .

Роз'язання. $ab\ ba\ ca\ ac\ bc\ cb.$ $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$

Сполученнями з n елементів по m називаються такі комбінації m елементів, вибраних із заданих n елементів, що відрізняються одна від другої тільки самими елементами, які входять у групу.

Формула визначення числа сполучень із n елементів по m :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Приклад 6. Скласти всі можливі сполучення з трьох елементів (a, b, c) по 2 елементи:.

Роз'язання. $ab\ ba\ ac.$ $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3.$

1.3 Статистична ймовірність. Геометричні ймовірності

Нехай проведено n випробувань, пов'язаних з даним експериментом, в результаті яких подія A відбулася m разів. Тоді *відносною частотою* події A називають число

$$P_n^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Відносна частота — це *середня можливість появи події A* у кожному з n проведених ви-пробувань. Якщо виявляється, що для події A відносна частота досить добре характеризує середню можливість появи події A у більшості інших серій випробувань, то тоді $P_n^*(A)$ називають *статистичними ймовірностями* подій A .

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа та об'єм відповідної геометричної фігури. Нехай множина всіх наслідків даного експерименту утворює деяку множину Ω , що має додатну скінченну міру $m(\Omega) > 0$ (довжину, площу, об'єм тощо). При цьому подіями вважають ті частини $A \subset \Omega$, що також мають міру. Тоді ймовірність $P(A)$ кожної такої події $A \subset \Omega$ можна визначати відношенням міри множини A до міри множини Ω , тобто

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ця ймовірність називається геометричною. При цьому вважається, що ймовірність попа-дання в деяку частину геометричного образу пропорційна до міри цієї його частини.

Приклад 7. З проміжку $[0; 5]$ випадковим чином вибирають два дійсних числа. Яка ймовірність того, що сума чисел менша за 4.

Розв'язання. Позначимо через x перше число, а через y - друге число, які вибрані випадковим чином з проміжку $[0; 5]$. Тоді $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$. Результатом кожного випробування є пара чисел (x, y) . Отже, геометричним представленням множини Ω всіх можливих наслідків експерименту є квадрат (рис. 1) зі стороною 5, площа якого дорівнює 25, тобто $m(\Omega) = 25$.

а) Нехай подія A = «сума вибраних чисел менша за 4». Тоді $A = \{(x, y) \in \Omega: x + y < 4\}$

або $A = \{(x, y) \in \Omega: y < 4 - x\}$. Отже, елементарні наслідки експерименту, що сприяють події A , утворюють заштриховану фігуру (рис. 1), площа якої

$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Застосовуючи формулу геометричної ймовірності, маємо

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{8}{25}.$$

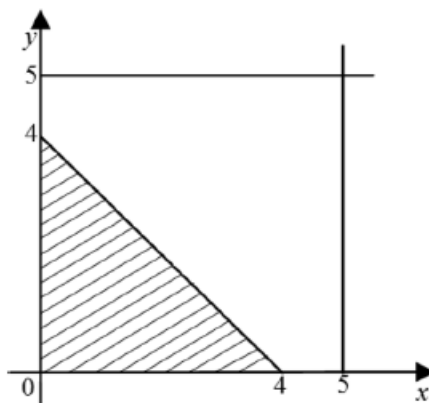


Рис. 1

2. Теорема додавання й множення ймовірностей. Умовна ймовірність.

Сумою двох подій A і B називається подія C , що полягає у появі події A або події B , або обох цих подій разом.

Нехай подія A є сумою двох подій B і C . Тоді:

- а) якщо події B і C несумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$;
- б) якщо події B і C сумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$;
- в) сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, дійсно, події A і \bar{A} несумісні й утворюють повну групу, тому $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Події B і C називаються **залежними**, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У супротивному разі події називаються **незалежними**. Ймовірність події C , визначена за умови, що подія B відбулась, називається **умовною** і позначається $P(C/B)$. Добутком двох подій A і B називається подія C , що полягає в одночасній появі подій A та B .

Нехай подія A є добутком двох подій B і C . Тоді:

- а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B)P(C)$;
- б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B)P(C/B)$.

Ці теореми справджуються й для добутку n ($n > 2$) подій.

Приклад 8. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга — із 15 стандартних і 4 нестандартних,

третя — із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

- 1) тільки одна стандартна;
- 2) тільки дві стандартні.

Розв'язання. Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3 , які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії виявилась стандартною.

1) Подія A — «тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною». Цю подію можна подати так: $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. Групи подій, сумою яких є подія A , несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події A обчислимо так:

$$P(A) = \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{13}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} \approx 0,108.$$

2) Подія B — «тільки дві деталі із трьох виявились стандартними». Подамо цю подію через події A_1, A_2, A_3 та протилежні до них: $A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3$. Подію B подано як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події B :

$$P(B) = \frac{10}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{5} + \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} \approx 0,397.$$

3. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Формули Бейеса.

Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A / B_i),$$

де $P(B_i)$ — ймовірність події B_i ; $P(A/B_i)$ — умовні ймовірності настання події A .

Наведена залежність називається **формулою повної ймовірності**.

Знову розглянемо події B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), i — які утворюють повну групу подій і попарно несумісні. Ці події називатимемо **гіпотезами**. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій B_i . Відомі ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія A відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i . Для цього застосовують формули Бейеса:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A / B_i)} \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

Приклад 9. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з ймовірністю 0,15, а другий — з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь виготовлено на першому верстаті»; B_2 — «деталь виготовлено на другому верстаті»; A — «вибрана деталь стандартна». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події A , то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події A відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо $P(B_1) = 0,75$;

$P(B_2) = 0,25$. За формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = 0,75 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,8375$.

Приклад 10. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевіряв 45 %, а другий — 55 % деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого — 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь перевіряв перший контролер»; B_2 — «деталь перевіряв другий контролер»; A — «виявлено браковану деталь». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу. Подія A відбулась одночасно з однією із цих подій, імовірності яких потрібно переоцінити. Застосуємо формулу Бейеса:

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A / B_1)}{\sum_{i=1}^2 P(B_i) \cdot P(A / B_i)} = \frac{0,45 \cdot 0,15}{0,45 \cdot 0,15 + 0,55 \cdot 0,1} \approx 0,551;$$

$$P(B_2 / A) = 1 - P(B_1 / A) = 1 - 0,551 = 0,449.$$

Отже, більш імовірно, що помилки припустився перший контролер.