

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ  
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ**

навчальної дисципліни «Вища математика»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
**Аеронавігація**

**за темою № 3: Геометричні вектори**

**Харків 2022**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2022 №8

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 22.08.2022 №1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією Науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,  
протокол від 10.08.2021 № 1

**Розробник:**

Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

**Рецензенти:**

1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

## ЛЕКЦІЯ 3

### План лекції

1. Поняття вектору. Лінійні операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.
2. Основні теореми про проекції. Координати вектору. Дії над векторами, заданими своїми координатами.
3. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Розмірність та базис векторного простору. Розклад вектору за базисом.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

#### Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник( Казановський В.І. та інші) - К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

#### Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [\[https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html\]](https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html)

### Текст лекції 3

#### 1. Поняття вектору. Лінійні операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.

**Визначення.** *Вектором* називається направлений відрізок.

Вектор позначається  $\overrightarrow{AB}$  (де точка  $A$  називається *початком*, а  $B$  *кінцем* вектора  $\overrightarrow{AB}$ ) або  $\vec{a}$  (рис. 1).

Довжина вектора  $\vec{a}$  (або  $\overrightarrow{AB}$ ) називається його *модулем* і позначається  $|\vec{a}|$  (або  $|\overrightarrow{AB}|$ ). Вектор, початок і кінець якого

збігаються, називається *нульовим* і позначається через  $\vec{0}$ .

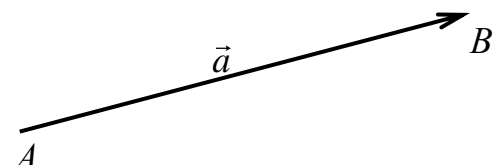


Рис. 1

**Визначення.** Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , які розташовані на одній або паралельних прямих, називаються *колінеарними* і позначаються  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

**Визначення.** Два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називаються *рівними*, якщо вони:

- 1) однакової довжини:  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ;
- 2) мають однакові напрямки (співнапрямлені), позначають:  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , тоді пишуть  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Визначення.** Три вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  називаються *компланарними*, якщо вони лежать у одній площині або на паралельних площинах.

*Лінійними операціями над векторами* є додавання векторів та множення вектора на число.

Нехай вектори  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ , тоді вектор  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  називається *сумою векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$*  (рис. 2), (рис. 3).

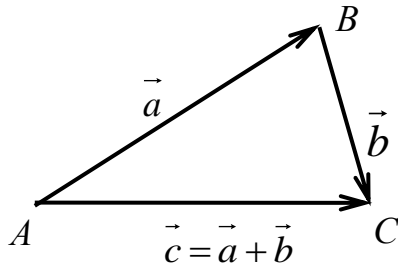


Рис. 2 Правило «трикутника»

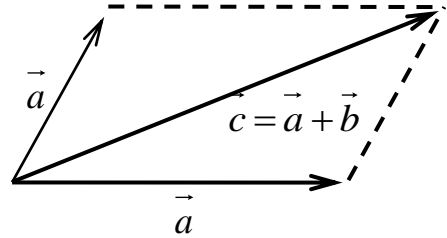


Рис. 3 Правило «паралелограма»

Властивості додавання:

1. Комутативність  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
2. Асоціативність  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

**Зауваження.** Правило «трикутника» очевидним чином узагальнюється на суму декількох векторів.

**Визначення.** Добутком  $\alpha \vec{a}$  вектора  $\vec{a} \neq 0$  на число  $\alpha \neq 0$  ( $\alpha \in R$ ) називається вектор  $\vec{b}$ , що задовольняє умовам:

- 1)  $\vec{b}$  колінеарний вектору  $\vec{a}$ ;
- 2)  $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$ ;
- 3) вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  однаково напрямлені, якщо  $\alpha > 0$ , і протилежно напрямлені, якщо  $\alpha < 0$ .

**Наслідок.** Якщо вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні, то

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}, (\alpha \neq 0)$$

**Наслідок.** Якщо  $\vec{a}^0$  – одиничний вектор того самого напрямку, що і вектор

$\vec{a}$  ( $\vec{a}^0$  – орт вектора  $\vec{a}$ ), то  $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^0$ , звідси орт вектора  $\vec{a}$ :  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ .

Властивості добутку вектора на число ( $\alpha, \beta$  – деякі числа):

1. Дистрибутивність відносно додавання чисел  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ ;
2. Дистрибутивність відносно додавання векторів  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ ;
3. Асоціативність  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ .

**Визначення.** Вектор  $-\vec{a}$  називається протилежним вектору  $\vec{a}$ .

**Визначення.** Різницею  $\vec{a} - \vec{b}$  векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається вектор  $\vec{c}$ , що дорівнює сумі векторів  $\vec{a}$  і  $-\vec{b}$  (рис. 4).

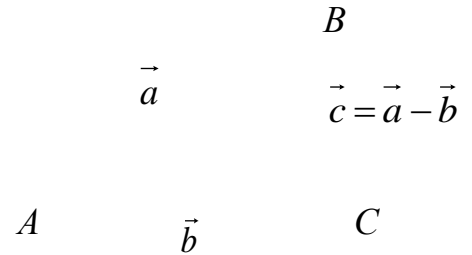


Рис. 4 Правило «трикутника»

## 2. Основні теореми про проекції.

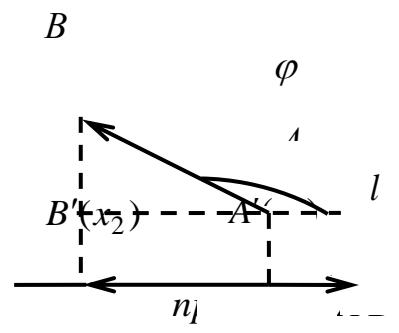
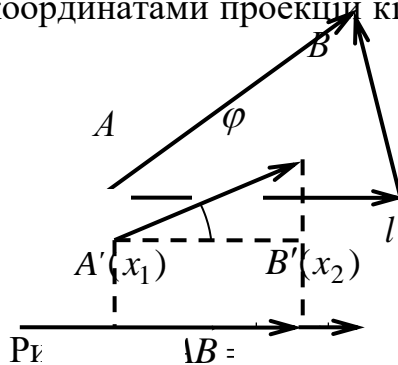
### Координати вектора.

Дії над векторами, заданими своїми координатами

**Визначення.** Проекцією  $pr_l \vec{AB}$  вектора  $\vec{AB}$  на вісь  $l$  називається довжина вектора  $\vec{A'B'}$  (де точка  $A'$  – проекція початкової, а  $B'$  – кінцевої точок вектора  $\vec{AB}$ ), взята зі знаком «+», якщо напрямки вектора  $\vec{A'B'}$  та осі  $l$  збігаються (рис. 5), і зі знаком «-», якщо ці напрямки протилежні (рис. 6).

Очевидно, що  $pr_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$ , де  $\varphi$  – кут між вектором  $\vec{AB}$  і віссю.

**Зауваження.** Проекція вектора  $\vec{AB}$  на вісь  $l$  дорівнює різниці  $x_2 - x_1$  між координатами проекцій кінця й початку вектора  $\vec{AB}$  на цю вісь (рис. 5), (рис.



тобто,  $pr_l \vec{AB} = x_2 - x_1$ .

## 3. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Розмірність та базис векторного простору. Розклад вектору за базисом.

**Визначення.** Вектор  $\vec{a}$  називається лінійною комбінацією векторів  $\vec{a}_i$  ( $i = 1, n$ ), якщо

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n,$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – деякі числа.

Цей вираз називають *розвиненням вектора  $\vec{a}$  за векторами  $\vec{a}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ )*.

**Визначення.** Вектори  $\vec{a}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі числа  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), серед яких не всі дорівнюють нулю, (тобто  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$ ), що справджується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0.$$

**Визначення.** Система векторів  $\vec{a}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) називається *лінійно-не залежною*, якщо остання рівність можлива лише за умови  $\alpha_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

**Зауваження.** Лінійна залежність системи векторів рівносильна твердженню, що принаймні один з її векторів є лінійною комбінацією інших.

**Визначення.** Два неколінеарні вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , які взято у визначеному порядку та які мають спільний початок, утворюють *базис на площині*.

**Теорема 6.1.** Кожен вектор  $\vec{a}$  площини єдиним чином можна розкласти за базисними векторами  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ :  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$ .

**Визначення.** Трійка некомпланарних векторів  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , які взято у визначеному порядку та які мають спільний початок, утворюють *базис у просторі*.

Якщо у просторі задано базис, то кожен вектор  $\vec{a}$  можна однозначно записати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3.$$

Останні дві рівності називаються *розкладами вектора  $\vec{a}$  за базисами відповідно  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  і  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$* . Числа  $\alpha_1, \alpha_2$  і  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  називаються координатами вектора  $\vec{a}$  у відповідному базисі і записують це так:  $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$  або  $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

**Зауваження.** При додаванні векторів, їх відповідні координати додають, а при множенні на число – координати множать на це число.

Нехай  $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  і  $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , тоді:

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3);$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3),$$

де число  $\lambda \neq 0$ .

Якщо вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні, то справджуються співвідношення:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3},$$

тобто координати колінеарних векторів пропорційні.

**Визначення.** Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні і кожен із них є ортом.

**Визначення.** Сукупність точки  $O$  і ортонормованого базису  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  називається *декартовою прямокутною системою координат (ДПСК)*. Вісь  $OX \uparrow \vec{i}$  називають *віссю абсцис*,  $OY \uparrow \vec{j}$  – *віссю ординат*,  $OZ \uparrow \vec{k}$  – *віссю аплікат*. Будь-який вектор  $\vec{a}$ , що виходить з початку координат можна подати так:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але  $\overrightarrow{OM_1} = pr_{OX} \vec{a} \cdot \vec{i}$ ,  $\overrightarrow{OM_2} = pr_{OY} \vec{a} \cdot \vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OM_3} = pr_{OZ} \vec{a} \cdot \vec{k}$ . Звідси:

$\vec{a} = pr_{OX} \vec{a} \cdot \vec{i} + pr_{OY} \vec{a} \cdot \vec{j} + pr_{OZ} \vec{a} \cdot \vec{k}$ , де  $\varphi$  – кут між вектором  $\vec{AB}$  і віссю.

Позначимо:  $pr_{OX} \vec{a} \cdot \vec{i} = a_x$ ,  $pr_{OY} \vec{a} \cdot \vec{j} = a_y$ ,  $pr_{OZ} \vec{a} \cdot \vec{k} = a_z$ . Тоді:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z).$$

Таким чином, у ДПСК координатами вектора є його проекції на координатні осі. Остання формула називається *розкладанням вектора  $\vec{a}$  за координатними осями*.

**Визначення.** Вектор, що сполучає початок координат з будь-якою точкою простору, називається *радіусом-вектором* цієї точки.

**Визначення.** Координатами довільної точки  $M$  простору в ДПСК називають координати її радіуса-вектора  $\overrightarrow{OM}$ .

Таким чином, встановлюється взаємно-однозначна відповідність між точками простору та їх радіусами-векторами. Модуль вектора  $\vec{a}$  дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Нехай маємо вектор  $\overrightarrow{AB}$ , де  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ , тоді, з урахуванням попередніх рівностей, координати вектора  $\overrightarrow{AB}$  знайдемо за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

яку можна записати так:  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

Модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$ :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Якщо відомі розкладання векторів за осями координат, то лінійні операції з векторами можна виконувати за формулами:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k};$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

Напрямок вектору  $\vec{a}$  у просторі визначається кутами  $\alpha, \beta, \gamma$ , які утворює вектор з осями

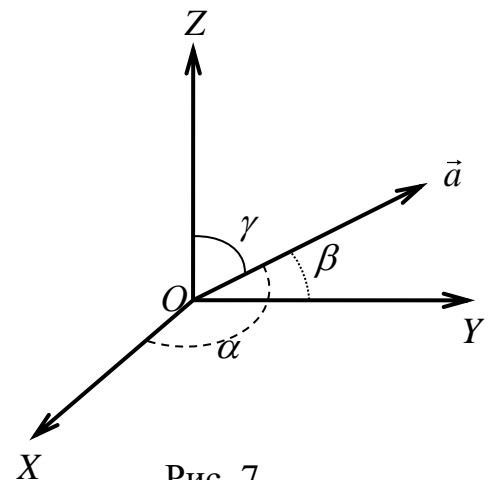


Рис. 7

координат (рис. 7).

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами вектора*  $\vec{a}$ .

Напрямні косинуси вектора  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  можна визначити за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad \text{Звідси дістаємо рівність:}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

### Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай маємо дві точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Поділити відрізок  $M_1M_2$  у відношенні  $\lambda$  означає знайти на даному відрізку таку точку  $M(x_m, y_m, z_m)$ , що має місце рівність  $M_1M = \lambda MM_2$ .

Координати точки  $M$  обчислюють за формулами:

$$x_m = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_m = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z_m = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Зокрема, координати середини відрізка дістанемо, покладаючи в останніх рівностях  $\lambda = 1$ .

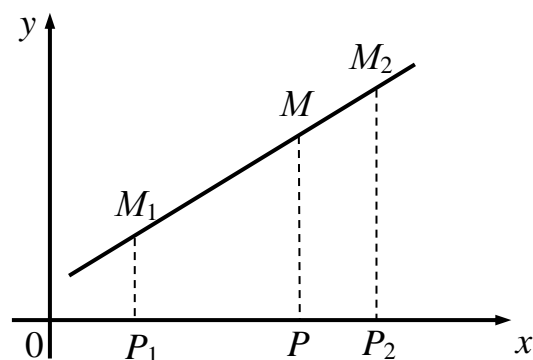


Рис. 8



## ЛЕКЦІЯ 4

### План лекції

1. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх властивості.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

#### Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник( Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

#### Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [<https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html>]

### Текст лекції 4

1. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх властивості.

#### Добутки двох векторів.

Операція множення двох векторів, з одного боку, повинна задовольняти в основному тим самим законам, що й операція множення чисел, а з іншого боку, вона повинна узагальнювати поширені у геометрії та фізиці конкретні процеси. З цих точок зору можливі дві операції множення двох векторів. Одна дає скаляр і тому називається *скалярним множенням*. Друга дає в результаті вектор і тому називається *векторним множенням*.

#### Скалярний добуток.

*Скалярним добутком* двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Позначається:  $\vec{a}\vec{b}$  або  $(\vec{a},\vec{b})$ . Отже,  $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ , (1)

де  $\varphi$  – кут між векторами.

З (1) дістаємо:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (2)$$

Оскільки  $np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ ,  $np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$ ,

$$(3)$$

то, з урахуванням (1), маємо:

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{b}, \quad \vec{a} \vec{b} = |\vec{b}| np_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (4)$$

**Зауваження.** Робота  $A$  сталої сили  $\vec{F}$ , точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора  $\vec{S}$ , дорівнює

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (5)$$

Скалярний добуток має такі властивості:

1. Комутативність  $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ ;
2. Дистрибутивність  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ ;
3.  $\lambda(\vec{a} \vec{b}) = \vec{a}(\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \vec{b}$ ;
4.  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ , звідки  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ ,

де  $\vec{a}^2$  – це скалярний добуток вектора самого на себе, який має назву *скалярного квадрату*.

**Теорема 7.1** Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є рівність нулю їх скалярного добутку:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} = 0. \quad (6)$$

**Теорема 7.2** Скалярний добуток векторів  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  і  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  дорівнює сумі добутків відповідних координат:

$$\vec{a} \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (7)$$

**Визначення.** Взаємно-перпендикулярні вектори називаються *ортogonalними*.

**Векторний добуток.** Векторним добутком векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається третій вектор  $\vec{c}$  (рис. 3.10), що задовольняє умовам:

1. Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярний до векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$
  2. Модуль вектора  $\vec{c}$  визначається за формулою
- $$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi, \quad (8)$$

де  $\varphi$  – кут між векторами.

3. Напрямок вектора  $\vec{c}$  вибираємо так, щоб найкоротший поворот вектора  $\vec{a}$  до  $\vec{b}$  було видно з кінця вектора  $\vec{c}$  проти годинникової стрілки.

Векторний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  позначається

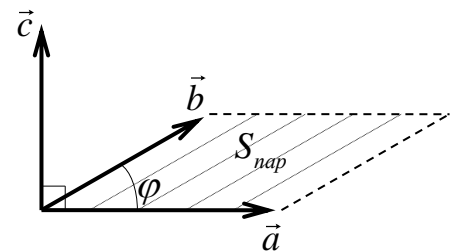


Рис. 1

:  $\vec{a} \times \vec{b}$ , або  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

**Зауваження 1.** З означення векторного добутку та рис.1 випливає, що  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  чисельно дорівнює площі паралелограма, сторони якого – вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (9)$$

**Зауваження 2.** Нехай тверде тіло має одну нерухому точку  $O$  (рис.2). Нехай до точки  $M$  цього тіла прикладено силу  $\vec{F}$ . З фізики відомо, що дія цієї сили  $\vec{F}$  на тіло з нерухомою точкою  $O$  характеризується особливою векторною величиною  $\vec{L}_0$ , яка називається моментом сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$ . Момент сили  $\vec{F}$  визначає вісь, що проходить через нерухому точку  $O$ , навколо якої ця сила намагається обертати тіло. Момент сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  й називається векторним добутком вектора  $\vec{OM}$  (плеча сили) і вектора  $\vec{F}$  (вектора сили).

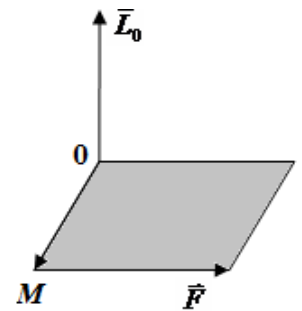


Рис.2

Властивості векторного добутку.

1. Антикомутативність  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ;
2.  $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ ;
3. Дистрибутивність  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ .

**Теорема 7.3** Векторний добуток двох ненульових векторів є нульовим вектором тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні, тобто:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0. \quad (10)$$

**Теорема 7.4** Координати векторного добутку векторів  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  і  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  дорівнюють алгебраїчним доповненням першого рядка визначника:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

**Добутки трьох векторів.** Із трьох векторів можна скласти лише три різних типи добутків.

По-перше, можна перемножити два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  скалярно й одержаний скаляр помножити на третій вектор  $\vec{c}$ . У результаті дістанемо вектор  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , що називається *найпростішим добутком* трьох векторів. Очевидно, що цей вектор є колінеарним вектору  $\vec{c}$ .

По-друге, можна перемножити два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  векторно й одержаний вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  помножити також векторно на третій вектор  $\vec{c}$ . У результаті дістанемо вектор  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ , що називається *подвійним векторним добутком*. Подвійний векторний добуток може бути виражений через найпростіші добутки за формулою  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ .

По-третє, можна перемножити два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  векторно й одержаний вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  помножити скалярно на третій вектор  $\vec{c}$ . В результаті дістанемо скаляр  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ , що називається *векторно-скалярним* або *мішаним добутком* трьох векторів. Розглянемо мішаний добуток векторів докладніше.

**Мішаний добуток.** Число, яке дістають як векторно-скалярний добуток векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  називається *мішаним добутком трьох векторів*.

Мішаний добуток позначають  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ , тобто:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}. \quad (12)$$

Властивості мішаного добутку:

1. Мішаний добуток не зміниться, якщо в ньому поміняти місцями знаки векторного ( $\times$ ) і скалярного добутку, тобто  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ .
2. Мішаний добуток не зміниться при круговій перестановці множників:  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$ .
3. При перестановці будь-яких двох векторів мішаний добуток змінює лише знак:  $\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ,  $\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ,  $\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .

**Теорема 7.5** Модуль мішаного добутку трьох неколінеарних векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, ребрами якого є вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , отже,

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (13)$$

**Теорема 7.6** Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарні.} \quad (14)$$

**Теорема 7.7** Мішаний добуток векторів, заданих координатами, визначається за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (15)$$

**Приклад 1.** Дано точки  $A(-3, 1, 4)$ ,  $B(-5, -1, 2)$ ,  $C(0, 4, 1)$ ,  $D(3, 3, -1)$ ,  $E(9, -5, 4)$ ,  $F(10, -5, 1)$ . Потрібно: а) обчислити скалярний добуток векторів  $2\vec{CD}$ ,  $3\vec{EF}$ ; б) знайти модуль векторного добутку векторів  $2\vec{AB}$ ,  $\vec{EF}$ ; в) обчислити мішаний добуток трьох векторів; г) перевірити, чи будуть

колінеарними або ортогональними вектори  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ; д) перевірити, чи будуть компланарними вектори  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}, -\overrightarrow{EF}$ ; е) знайти кут  $\varphi$  між векторами  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}$ ; ж) знайти проекцію вектора  $\overrightarrow{CD}$  на вектор  $\overrightarrow{EF}$ .

*Розв'язання.* Обчислимо координати векторів  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ . Дістаємо:  $\overrightarrow{AB}(-2, -2, -2), \overrightarrow{CD}(3, -1, -2), \overrightarrow{EF}(1, 0, -3)$ .

а) Скористаємось властивістю 3 скалярного добутку та формулою (7):

$$(2\overrightarrow{CD}) \cdot (3\overrightarrow{EF}) = 6(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}) = 6(3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-3)) = 54.$$

б) Використаємо властивість 2 векторного добутку:

$$(2\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{EF} = 2(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{EF}) = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Модуль цього вектора знайдемо за формулою:

$$|(2\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{EF}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}.$$

в) Оскільки мішаний добуток це векторно-скалярний добуток, то скористаємось властивістю 3 скалярного добутку, властивістю 2 векторного добутку та формулою (15):

$$(9\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}, -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}) = -6(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) = -6 \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 132.$$

г) Знаходимо  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(-1, -1, -1)$ . Для того, щоб вектори були колінеарними, необхідно, щоб їхні координати були пропорційними. Оскільки  $\frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{-2}$ , то вектори  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{CD}$  не колінеарні.

Ортогональність векторів перевіримо за теоремою 7.1.

$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = (-1)3 + (-1)(-1) + (-1)(-2) = 0$ . Отже, вектори  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{CD}$  ортогональні.

д) За теоремою 7.6 перевіримо, чи компланарні вектори  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}, -\overrightarrow{EF}$ .

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}, -\overrightarrow{EF}\right) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}) = - \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0.$$

Отже, вектори  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CD}, -\overrightarrow{EF}$  некомпланарні.

е) За формулою (2) знайдемо косинус кута  $\varphi$ .

$$\cos \varphi = \frac{(-2, -2, -2)(1, 0, -3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{(-2)1 + (-2)0 + (-2)(-3)}{2\sqrt{30}} = -\frac{2}{\sqrt{30}},$$

тоді  $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \approx 111^\circ 30'.$

ж) За формулою (3) дістанемо:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{EF}} \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|} = \frac{(3, -1, -2)(1, 0, -3)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}.$$

**Приклад 2.** Перевірити, чи утворюють вектори  $a_1(1, 0, 0)$ ,  $a_2(1, 1, 0)$ ,  $a_3(1, 1, 1)$  базис у просторі. Якщо так, то знайти координати вектора  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$   $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$  у цьому базисі.

*Розв'язання.* Якщо вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  утворюють базис в просторі, то вони некопланарні. Перевіримо їх компланарність за теоремою 7.6:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Таким чином, вектори } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ утворюють}$$

базис.

Тоді  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$ , тобто  $(2, 0, -1) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(1, 1, 0) + \alpha_3(1, 1, 1)$  або  $(2, 0, -1) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3)$ .

Прирівнюючи відповідні координати рівних векторів, дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2; \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ \alpha_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язком системи є  $\alpha_1 = 2$ ;  $\alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_3 = -1$ . Отже, вектор  $\vec{a}$  у базисі  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  має координати  $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 - 1\vec{a}_3$ .

**Приклад 3.** Знайти кут, який утворюють орти  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$ , якщо вектори  $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  та  $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$  взаємно перпендикулярні.

*Розв'язання.* Нехай  $\varphi$  – кут між векторами  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$ . Обчислимо скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)(5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2) = 5\vec{e}_1^2 - 4\vec{e}_1\vec{e}_2 + 10\vec{e}_2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2^2 = 5|\vec{e}_1|^2 + 6\vec{e}_2\vec{e}_1 - 8|\vec{e}_2|^2.$$

Оскільки  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 + 6\cos \varphi - 8 = 6\cos \varphi - 3$ . Вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$

перпендикулярні, тоді  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Дістаємо:  $6\cos \varphi - 3 = 0$ , звідки  $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ .

Отже,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

**Приклад 4.** Знайти проекцію вектора  $\vec{a} = (\sqrt{2}, -3, -5)$  на вісь  $l$ , яка утворює з осями  $OX$  і  $OY$  кути  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , а з віссю  $OZ$  – тупий кут.

*Розв'язання.* Згідно з властивістю напрямляючих косинусів маємо:

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1, \quad \cos^2 \gamma = \frac{1}{4}.$$

Оскільки  $\gamma$  – тупий кут, то  $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$ . Позначимо через  $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$  орт, співнаправлений з віссю  $l$  (орт осі  $l$ ). З урахуванням того, що  $|\vec{e}| = 1$ ,

дістаємо:  $\cos \alpha = \frac{e_x}{|\vec{e}|} = e_x$ ,  $\cos \alpha = \frac{e_y}{|\vec{e}|} = e_y$ ,  $\cos \beta = \frac{e_z}{|\vec{e}|} = e_z$ . Таким чином,

$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ . З урахуванням формули (3) проекція

вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{e}$ :  $pr_{\vec{e}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-3) \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot (-\frac{1}{2})}{1} = 2$ .

**Приклад 5.** Обчислити об'єм тетраедра (чотиригранника) з вершинами в точках  $A(2,2,2)$ ,  $B(4,3,3)$ ,  $C(4,5,4)$ ,  $D(5,5,6)$  та площу грані  $ABC$ .

*Розв'язання.* Грань  $ABC$  є трикутником. Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ . З урахуванням (12):  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ . Знаходимо вектори  $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$  і  $\overrightarrow{AC} = (2, 3, 2)$  та їх

векторний добуток:  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ .

Отже,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+16} = \frac{1}{2} \sqrt{21}$  (кв. од.)

Об'єм трикутної піраміди (тетраедра) дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ , що утворюють ребра піраміди та виходять з вершини  $A$ . Знайдемо мішаний добуток цих векторів.

Вектор  $\overrightarrow{AD}$  має координати  $(3, 3, 4)$ , тоді  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$ . Об'єм

паралелепіпеда знаходять як модуль цього мішаного добутку. Отже, об'єм піраміди, з урахуванням формули (16), дорівнює:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{7}{6} \text{ (куб. од.)}$$