

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 6: Криві та поверхні другого порядку

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 №8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:

Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 7

План лекції

1. Поверхні другого порядку: сфера, еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди, циліндричні поверхні, конічна поверхня.

Рекомендована література:

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с.- [\[https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html\]](https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html)

Текст лекції 7

1. Поверхні другого порядку: сфера, еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди, циліндричні поверхні, конічна поверхня

Поверхні другого порядку – це поверхні, що у ДПСК тривимірного простору задані алгебраїчними рівняннями другого степеня.

Сфера

Складемо рівняння сфери радіуса R з центром у точці $C(x_0, y_0, z_0)$.

Для довільної точки $M(x, y, z)$ даної поверхні маємо $|\overrightarrow{CM}| = R$, тобто:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R \text{ або}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

Це й є шукане рівняння сфери. Зокрема, якщо центр сфери лежить у початку координат, то її рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (2)$$

Еліпсоїд

Визначення. Еліпсоїдом називається поверхня, яка у ДПСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням еліпсоїда* (рис.1).

Для дослідження форми еліпсоїда застосуємо метод *перерізів*. Будемо перетинати еліпсоїд площинами $z = h$. При заданому h лінія, отримана в перерізі, визначається в просторі системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

У площині $z = h$ введемо ДПСК $O'x'y'$, початок якої знаходиться в точці $O'(0,0,h)$, а осі $O'x'$ і $O'y'$ мають напрямки осей відповідно Ox і Oy . В цій системі координат лінія, отримана в перерізі, має рівняння

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Якщо $|h| < c$ ($c > 0$), то маємо рівняння еліпса. При $h = 0$ півосі еліпса дорівнюють відповідно a і b ($a > 0$, $b > 0$). Зі зростанням $|h|$ від нуля до c півосі еліпса зменшуються. Якщо $|h| = c$, то рівняння визначає точку. При $|h| > c$ рівняння визначає порожню множину. Аналогічна картина має місце при перерізі еліпсоїда площинами $y = m$ і $x = n$.

Таким чином, еліпсоїд є замкнута овальна поверхня, що має три взаємно перпендикулярні площини симетрії. При даному виборі системи координат ці площини збігаються з координатними площинами.

Додатні числа a , b , c називаються *півосями еліпсоїда*. Якщо усі вони різні, то еліпсоїд називається *триосним*. Якщо дві з півосей рівні, то еліпсоїд називається *еліпсоїдом обертання*, тому що цей еліпсоїд може бути здобутий обертанням еліпса навколо однієї з його осей. У випадку $a = b = c$ еліпсоїд перетворюється у *сферу*.

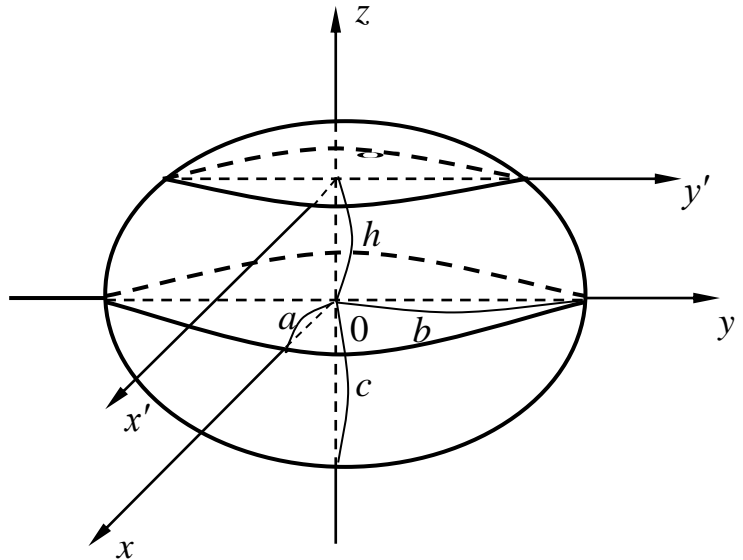


Рис. 1

Гіперболоїди.

Визначення. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка в деякій ДПСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда* (рис. 2).

Для дослідження форми однопорожнинного гіперболоїда застосуємо метод перерізів. Перетнемо однопорожнинний гіперболоїд площиною $z = h$. Візьмемо в площині $z = h$ ДПСК $0'x'y'$, початок якої знаходиться в точці $0'(0, 0, h)$, а осі $0'x'$ і $0'y'$ мають напрямки осей відповідно $0x$ і $0y$. В цій системі координат лінія, яку дістаємо в перерізі, має рівняння

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Це рівняння при будь-якому h визначає еліпс. При $h = 0$ півосі еліпса рівні відповідно a і b . Зі зростанням $|h|$ півосі еліпса збільшуються.

Перетнемо однопорожнинний гіперболоїд площиною $y = m$. Візьмемо в цій площині ДПСК $0''x''z''$, початок якої знаходиться в точці $0''(0, m, 0)$, а осі $0''x''$ і $0''z''$ мають напрямки осей відповідно $0x$ і $0z$. В цій системі координат лінія, яку дістаємо в перерізі, має рівняння

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{b^2}.$$

Якщо $|m| < b$ ($b > 0$), то рівняння визначає гіперболу, вершини якої знаходяться на осі $0''x''$. Якщо $|m| = b$, то рівняння визначає пару прямих, що перетинаються. При $|m| > b$ рівняння визначає гіперболу, вершини якої знаходяться на осі $0''z''$.

Аналогічна картина має місце при перерізі однопорожнинного гіперболоїда площинами $x = h$.

Таким чином, однопорожнинний гіперболоїд має вигляд трубки, що нескінченно розширюється в обидві боки від горлового еліпса (*горловим еліпсом* називається еліпс, що утвориться в перерізі поверхні координатою площиною $z = 0$) (рис.2). Однопорожнинний гіперболоїд має три взаємно перпендикулярні площини симетрії; при даному виборі координатної системи ці площини збігаються з площинами координат.

Величини a, b, c називаються *півосями* однопорожнинного гіперболоїда. Якщо $a = b$, однопорожнинний гіперболоїд називається *однопорожнинним гіперболоїдом обертання*, тому що такий гіперболоїд можна дістати обертанням гіперболи навколо її уявної осі.

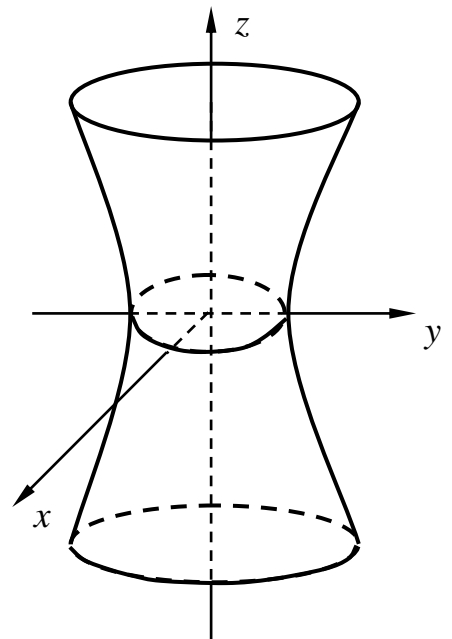


Рис. 2

Поверхні, які в деякій ДПСК $0xyz$ задано рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{і} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

також є однопорожнинними гіперболоїдами. Вони мають аналогічний вигляд, лише інакше розташовані щодо системи координат.

Визначення. Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій ДПСК визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (5)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда (рис.3).

Для дослідження форми двопорожнинного гіперболоїда застосуємо метод перерізів. Розглянемо переріз двопорожнинного гіперболоїда площинами $0xz$ і $0yz$. Переріз площиною $0xz$ визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Він являє собою гіперболу, розташовану симетрично щодо координатних осей $0x$, $0z$ і перетинає вісь $0z$ (в точках $(0, 0, c)$ і $(0, 0, -c)$). Переріз площиною $0yz$ визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Він являє собою гіперболу, розташовану симетрично щодо координатних осей $0y$, $0z$ і перетинає вісь $0z$ (в точках $(0, 0, c)$ і $(0, 0, -c)$).

Тепер розглянемо перерізи даного гіперболоїда площинами, паралельними координатній площини $0xy$. Вони визначаються в просторі системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $|h| > c$ площина $z = h$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд по еліпсу. При зростанні $|h|$ довжини півосей цього еліпса зростають. Якщо $|h|$ зростає нескінченно, то і півосі зростають також нескінченно. Якщо $|h|$, спадаючи, наближається до c , то й півосі також спадають і наближаються до

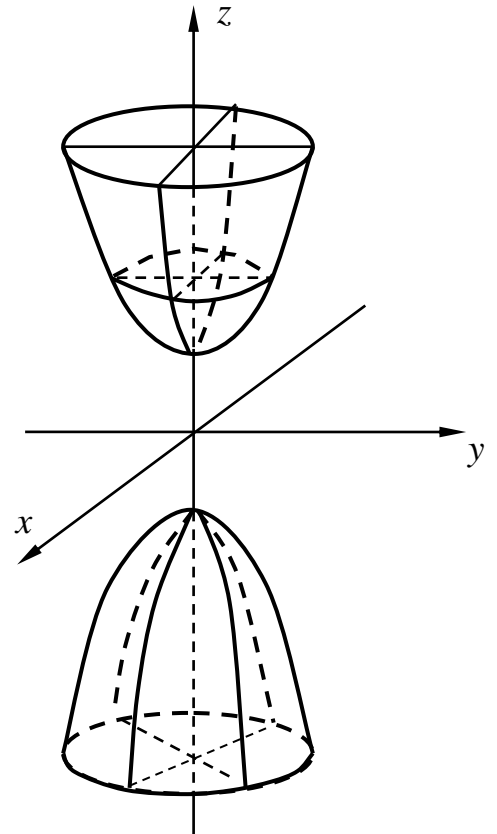


Рис. 3

нуля. При $h = \pm c$ еліпс вироджується в точку. При $|h| < c$ дістаємо уявний еліпс.

Таким чином, двопорожнинний гіперболоїд є поверхня, що складається з двох окремих “порожнин”; кожна з них має вигляд нескінченної опуклої чаші (рис. 3). Двопорожнинний гіперболоїд має три взаємно перпендикулярні площини симетрії; при даному виборі координатної системи ці площини збігаються з координатними площинами.

Величини a, b, c називаються *півосями* двопорожнинного гіперболоїда. Якщо $a = b$, двопорожнинний гіперболоїд називається *двопорожнинним гіперболоїдом обертання*, тому що такий гіперболоїд можна дістати обертанням гіперболи навколо її дійсної осі.

Параболоїди

Визначення. *Еліптичним параболоїдом* називається поверхня, що в деякій ДПСК визначається рівнянням

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \quad (p > 0, q > 0). \quad (6)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням еліптичного параболоїда* (рис. 4).

Для дослідження форми еліптичного параболоїда застосуємо метод перерізів. Розглянемо переріз еліптичного параболоїда площинами $0xz$ і $0yz$. При $y = 0$ маємо: $x^2 = 2pz$. Це парабола, симетрична щодо осі $0z$ із вершиною у початку координат; параметр цієї параболи дорівнює p . Переріз площиною $0yz$ визначається рівнянням $y^2 = 2qz$ і являє собою аналогічно розташовану параболу з параметром q .

Тепер розглянемо перерізи даного параболоїда площинами, паралельними координатній площині $0xy$. Вони визначаються в просторі системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $|h| > 0$ площина $z = h$ перетинає еліптичний параболоїд по еліпсу. При зростанні $|h|$ довжини півосей цього еліпса зростають. Якщо $|h|$ зростає нескінченно, то і півосі зростають також нескінченно. Якщо $|h|$ спадає та наближається до нуля, то і півосі також спадають і наближаються до нуля. При $h = 0$ еліпс вироджується в точку. При $|h| < 0$ дістаємо уявний еліпс.

Таким чином, еліптичний параболоїд має вигляд нескінченної опуклої чаші (рис. 4). Він має дві взаємно перпен-

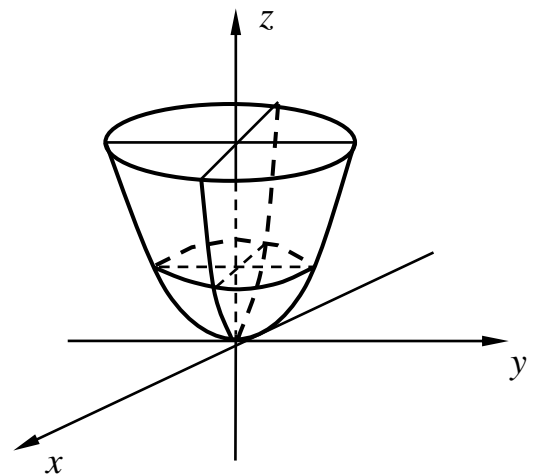


Рис. 4

дикулярні площини симетрії; при даному виборі координатної системи ці площини збігаються з координатними площинами Oxz і Oyz . Точка, що збігається з початком координат, називається *вершиною* еліптичного параболоїда; числа p і q називаються його *параметрами*.

Якщо $p = q$, еліптичний параболоїд називається *еліптичним параболоїдом обертання*, тому що такий параболоїд можна дістати обертанням параболі навколо її осі симетрії.

Поверхні, що в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано рівняннями

$$y = \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad (pq > 0) \quad \text{і} \quad x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad (pq > 0)$$

також є еліптичними параболоїдами.

Визначення. *Гіперболічним параболоїдом* називається поверхня, яка в деякій ДПСК визначається рівнянням

$$z = -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \quad (p > 0, \quad q > 0) \quad (7)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда* (рис. 5).

Для дослідження форми гіперболічного параболоїда застосуємо метод перерізів. Перетнемо гіперболічний параболоїд площиною $x = h$. Візьмемо в цій площині ДПСК $O'y'z'$, початок якої знаходиться в точці $O'(h, 0, 0)$, а осі $O'y'$ і $O'z'$ мають напрямки осей відповідно Oy і Oz . В цій системі координат лінія, здобута в перерізі, має рівняння

$$z' = \frac{y'^2}{q} - \frac{h^2}{p}.$$

Це рівняння при будь-якому h визначає параболу. Якщо $h = 0$, то в перерізі маємо параболу з вершиною в початку координат, симетричну щодо осі $O'z'$. Гілки цієї параболі направлені вгору.

Перетнемо гіперболічний параболоїд площиною $y = m$. Візьмемо в цій площині ДПСК $O''x''z''$, початок якої знаходиться в точці $O''(0, m, 0)$, а осі $O''x''$ і $O''z''$ мають напрямки осей відповідно Ox і Oz . В цій системі координат лінія, яку дістаємо в перерізі, має рівняння

$$z'' = \frac{m^2}{q} - \frac{x''^2}{p}.$$

Це рівняння при будь-якому m визначає параболу, симетричну щодо осі $O''z''$. Гілки цієї параболі направлені вниз.

Міркуючи аналогічно, легко переконатися в тому, що при перерізі гіперболічного параболоїда площинами $z = h$ ($h \neq 0$) одержимо гіперболи, а в перерізі площиною $z = 0$ — пару прямих, що перетинаються.

Таким чином, гіперболічний параболоїд має форму сідла (рис. 5). Він має дві взаємно перпендикулярні площини симетрії; при даному виборі координатної системи ці площини збігаються з координатними площинами Oxz і Oyz . Точка, в якій знаходиться початок координат, називається *вершиною* гіперболічного параболоїда; числа p і q називаються його *параметрами*.

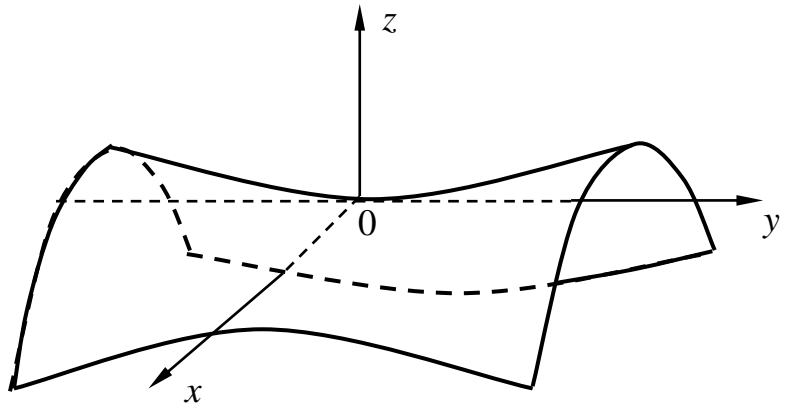


Рис. 5

Циліндричні поверхні

Визначення. *Циліндричною поверхнею* називається поверхня, утворена прямою, що переміщується паралельно собі вздовж деякої просторової кривої. При цьому пряма, що переміщується, називається *твірною*, а крива – *напрямною*. Для того щоб задати циліндричну поверхню, достатньо задати твірну і напрямну цієї поверхні. Циліндричні поверхні задають рівняннями вигляду:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

На площині такі рівняння визначають лінії другого порядку. В залежності від виду цієї лінії ми маємо циліндри наступних типів:

1) *Еліптичний циліндр* (рис.6). За допомогою належного вибору координатної системи його рівняння може бути приведене до вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

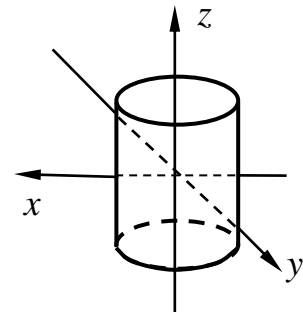


Рис. 6

2) *Гіперболічний циліндр* (рис.7). Його рівняння може бути приведене до вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

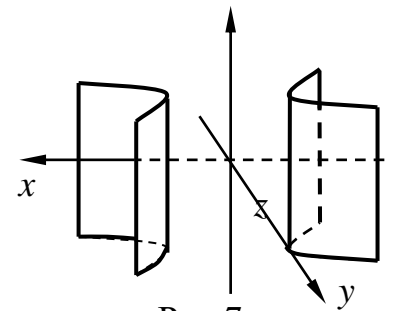


Рис.7

z

3) *Параболічний циліндр* (рис. 8). Його рівняння може бути приведене до вигляду:

$$y^2 = 2px.$$

Всі ці циліндричні поверхні мають твірну, паралельну осі Oz .

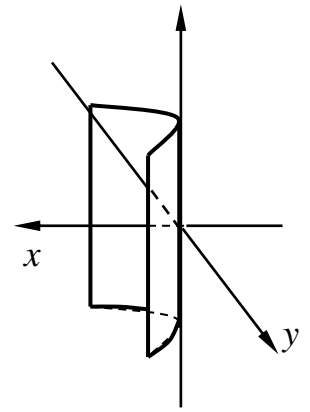


Рис. 8

Конічна поверхня

Визначення. *Конічною поверхнею або конусом*

називається поверхня, утворена прямою лінією, яка має одну нерухому точку і переміщується уздовж деякої кривої. При цьому пряма, що переміщується, називається *твірною*, крива – *напрямною*, а нерухома точка – *вершиною* конуса.

Канонічне рівняння конуса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (8)$$

Якщо напрямними лініями є коло, еліпс, гіпербола та парабола, то дістаємо відповідно круговий конус, еліптичний, гіперболічний та параболічний конуси.

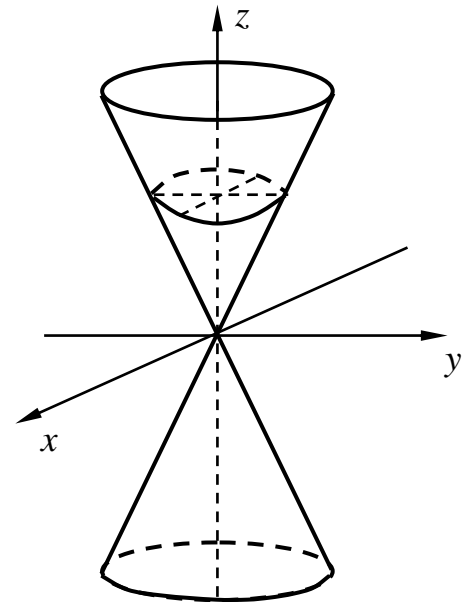


Рис.9