

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

за темою № 16: Випадкові величини

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 №8

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 №8

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:

Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

ЛЕКЦІЯ 28

План лекції

1. Види випадкових величин.
2. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
3. Числові характеристики дискретних випадкових величин.
4. Приклади дискретних розподілів.

Рекомендована література:

Основна

1. Астахов В. М. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчальний посібник / В. М. Астахов, Г. С. Буланов, В. О. Паламарчук. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – 64 с.
2. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те вид. : навчальний посібник . – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с

Додаткова

3. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

4. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб.— К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. - 336 с.
http://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/13578/1/O_Zhylytsov_KUBG_TY_UN.pdf
5. Федоров М.В., Хренов О.М. Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 68 с.
https://docviewer.yandex.ua/view/14307034/?page=3&*=OMbtom834MHYY%2B0pcflKdrchzlx7 }}]

Текст лекції 28

1. Види випадкових величин.

Випадковою величиною X називається величина, яка в результаті випробування приймає тільки одне можливе значення, наперед не відоме й залежне від випадкових причин, які не можуть бути враховані.

Приклад. Всі економічні показники є випадковими величинами. Це й заробітна плата працівників, і обсяг випуску продукції, і рентабельність, і продуктивність праці й ін.

Приклад. Дальність польоту снаряда; маса осколку.

Будемо далі позначати випадкові величини великими латинськими літерами X , Y , Z . Можливі значення випадкової величини будемо позначати малими буквами латинського алфавіту. Множина наслідків експерименту може бути скінченною або нескінченною. Будемо розглядати випадкові величини

двох типів. Випадкова величина X називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень скінченна або зліченна. Випадкова величина називається *неперервною*, якщо її значення заповнюють суцільно деякий інтервал.

2. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Рядом розподілу або *законом розподілу* дискретної випадкової величини називається перелік значень випадкової величини x_k й відповідних їм значень ймовірностей $P(\xi=x_k) = p_k > 0$, $\sum_k p_k = 1$, де підсумовування поширюється на всі можливі значення k .

Приклад 1. Монету кидають двічі. Знайти ряд розподілу числа появ герба. Тут X - число появи герба, ряд розподілу наведений у Таблиці 1.

Таблиця 1. Ряд розподілу

Події	РР	ГР + РГ	ГГ
x_k	0	1	2
p_k	1/4	1/2	1/4

$$P_1(\xi = 0) = p(\text{РР}) = 1/2 * 1/2 = 1/4,$$

$$P_2(\xi = 1) = p(\text{ГР} + \text{РГ}) = P(\text{ГР}) + P(\text{РГ}) = 1/2 * 1/2 + 1/2 * 1/2 = 1/2,$$

$$P_3(\xi = 2) = p(\text{ГГ}) = 1/2 * 1/2 = 1/4,$$

$$\sum_{k=1}^3 p_k = 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1.$$

Графічне зображення ряду розподілу називається багатокутником розподілу. Будується він так: можливі значення випадкових величин відкладаються на осі OX , на осі OY – відповідні ймовірності. Отримані точки площини з'єднуються відрізками прямих (рис.1).

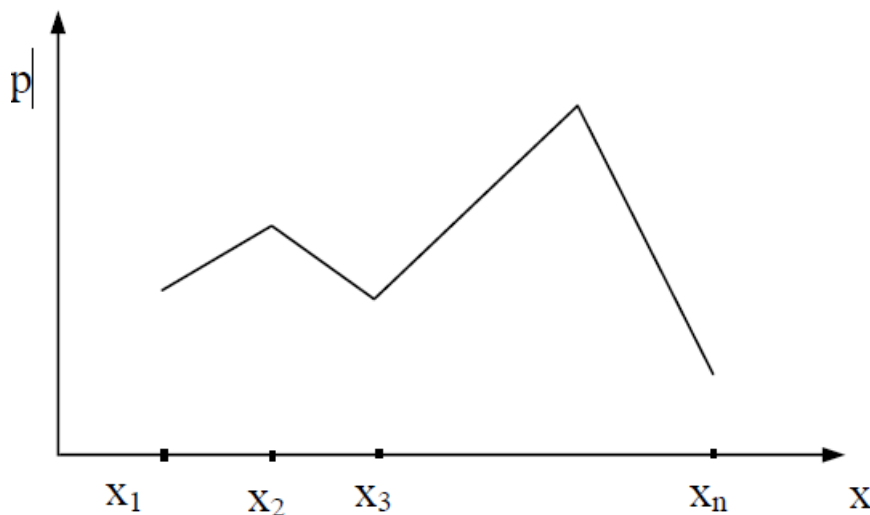


Рис.1

3. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Випадкові величини крім законів розподілу можуть описуватися також *числовими характеристиками*.

Математичним сподіванням $M(X)$ випадкової величини називається її середнє значення, яке обчислюється за формулою

$$M(X) = \sum_k x_k p_k, \quad (1)$$

де x_k - значення випадкових величин, p_k - їх ймовірності.

Розглянемо властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання константи дорівнює самій константі

$$M(C) = C$$

2. Якщо випадкову величину помножити на деяке число k , то й математичне сподівання помножиться на це ж число

$$M(kX) = kM(X)$$

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$$

4. Для незалежних випадкових величин X_1, X_2 математичне сподівання добутку дорівнює добутку їхніх математичних сподівань

$$M(X_1 X_2) = M(X_1) M(X_2)$$

Обчислимо математичне сподівання для випадкової величини із приклада 1.

$$M(X) = \sum_k x_k p_k = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Приклад 2. Нехай випадкові величини X, Y задані відповідно законами розподілу:

Таблиця 2. Закон розподілу X

x_k	- 0,1	- 0,01	0	0,01	0,1
p_k	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Таблиця 3. Закон розподілу Y

y_k	- 10	- 5	0	5	10
p_k	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

Обчислимо $M(X)$ і $M(Y)$

$$M(X) = (- 0,1) 0,1 + (- 0,01) 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 = 0$$

$$M(Y) = (- 10) 0,3 + (- 5) 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,3 = 0$$

Математичні сподівання обох випадкових величин однакові - вони дорівнюють нулю. Однак характер їхнього розподілу різний. Якщо значення x_k мало відрізняються від свого математичного сподівання, то значення y_k у великому степені відрізняються від свого математичного сподівання, і ймовірності таких відхилень не малі. Ці приклади показують, що за середнім значенням не можна визначити, які відхилення від нього мають місце як у меншу, так і в більшу сторону. Так при однаковій середній величині опадів, що випадають у двох місцевостях, за рік не можна сказати, що ці місцевості однаково сприятливі для сільськогосподарських робіт. Аналогічно за показ-

ником середньої заробітної плати не можливо судити про питому вагу високо- і низькооплачуваних працівників. Тому, запроваджується числова характеристика – *дисперсія* $D(X)$, що характеризує міру відхилення випадкової величини від свого середнього значення:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad (2)$$

Дисперсія - це математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від математичного сподівання. Для дискретної випадкової величини дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \sum_k (x_k - M(X))^2 p_k \quad (3)$$

Перетворивши цю формулу, дістанемо більш простішу розрахункову формулу

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \quad (4)$$

Із означення дисперсії випливає, що $D(X) \geq 0$.

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія константи дорівнює нулю

$$D(C) = 0$$

2. Якщо випадкову величину помножити на деяке число k , то дисперсія помножиться на квадрат цього числа

$$D(kX) = k^2 D(X)$$

3. Для незалежних випадкових величин X_1, X_2 дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій:

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$$

Обчислимо дисперсію для випадкової величини із приклада 1.

Математичне сподівання $M(X) = 1$. Тому за формулою (3) маємо:

$$D(X) = (0 - 1)^2 \cdot 1/4 + (1 - 1)^2 \cdot 1/2 + (2 - 1)^2 \cdot 1/4 = 1/2$$

Обчислимо дисперсії для випадкових величин X, Y із приклада 2 за цією формулою. Математичні сподівання обох випадкових величин дорівнюють нулю.

$$D(X) = (0,1)^2 \cdot 0,1 + (0,01)^2 \cdot 0,2 + (0,01)^2 \cdot 0,2 + (0,1)^2 \cdot 0,1 = 0,001 + 0,00002 + 0,00002 + 0,001 = 0,00204;$$

$$D(Y) = (-10)^2 \cdot 0,3 + (-5)^2 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,1 + 10^2 \cdot 0,3 = 30 + 2,5 + 2,5 + 30 = 65.$$

Чим ближче значення дисперсії до нуля, тим менше розкид випадкової величини навколо середнього значення.

Величина $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ називається *середньоквадратичним відхиленням*.

Модулю дискретної випадкової величини X Md називається таке значення випадкової величини, якому відповідає найбільша ймовірність.

4. Приклади дискретних розподілів

Біноміальний розподіл.

Нехай зроблено n незалежних випробувань. У кожному випробуванні настає або подія A , або \bar{A} відповідно з ймовірностями $p, 1 - p$. Розглянемо випадкову величину ξ - число появ події A в послідовності випробувань. Закон розподілу цієї випадкової величини можна записати таким чином

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,2,\dots,n...$$

(5)

Дійсно, розглянемо вираз $(p + q)^n = 1$, розкладемо двочлен $(p + q)^n$ за формулою бінома Ньютона. Одержимо

$$C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p (1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} + \dots + C_n^n p^n (1-p)^0 = 1.$$

тобто сума ймовірностей значень випадкової величини дорівнює одиниці, отже (5) є законом розподілу.

Знайти математичне сподівання ξ за означенням, тобто за формулою

$$M(\xi) = \sum_{m=0}^n m \cdot p(\xi = m),$$

дуже складно.

Тому розглянемо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, з однаковим законом розподілу :

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо в } k\text{-ому випробуванні настала подія } A \\ 0, & \text{якщо в } k\text{-ому випробуванні настала подія } \overline{A}, \end{cases}$$

де $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

Використовуючи властивості математичного сподівання, одержимо:

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n).$$

Знайдемо математичне сподівання ξ_k ,

$$M(\xi_k) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{тоді}$$

$$M(\xi) = np.$$

Аналогічно знайдемо дисперсію:

$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n)$$

$$D(\xi_k) = (0-p)^2 (1-p) + (1-p)^2 p = p^2 (1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p + 1-p) = p(1-p) = pq. \quad \text{Отже,}$$

$$D(\xi) = npq,$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Розподіл Пуассона.

Нехай проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p . Розглянемо випадкову величину ξ - число появ події A . Взагалі для визначення ймовірностей цих подій використовують формулу Бернуллі, але у випадку, якщо число n велике, а ймовірність подій мала, застосовують формулу Пуассона:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (6)$$

де $\lambda = np > 0$ - параметр розподілу, $m = 0, 1, 2, \dots$

Можна показати, що математичне сподівання й дисперсія відповідно рівні λ :

$$M(\xi) = \lambda, \quad D(\xi) = \lambda.$$

Закон Пуассона називають законом масових і рідких подій.

Приклад 3. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені на протязі 1 хв. дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що на протязі 5 хв. обрив відбудеться на 5 веретенах.

Розв'язок. За умовою $n=1000$, $\kappa=5$, $p=0,004$. Знаходимо
 $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$.

За формулою (6) маємо: $P(\xi = 5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = 0,1562$.

ЛЕКЦІЯ 29

План лекції

1. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини і числові характеристики неперервних випадкових величин.
2. Приклади розподілів неперервних випадкових величин: рівномірний, нормальний, показниковий.

Рекомендована література:

Основна

1. Астахов В. М. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчальний посібник / В. М. Астахов, Г. С. Буланов, В. О. Паламарчук. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – 64 с.
2. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те вид. : навчальний посібник . – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с

Додаткова

3. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

4. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб.— К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. - 336 с.
http://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/13578/1/O_Zhylytsov_KUBG_TY_UN.pdf
5. Федоров М.В., Хренов О.М. Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 68 с.
https://docviewer.yandex.ua/view/14307034/?page=3&*=OMbtom834MHYY%2B0pcfIKdrchzlx7 }]

Текст лекції 29

1. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини

Функцією розподілу $F(x)$, яка визначена для будь-якого дійсного x , називається ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення менше x . тобто

$$F(x) = P(x < \xi), \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. Ймовірність попадання випадкової величини в довільний напівінтервал дійсної осі $[x_1, x_2)$ визначається формулою

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) .$$

3. Функція розподілу $F(x)$ - неспадна функція на всій осі Ox , тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Приклад 1. Побудувати функцію розподілу для дискретної випадкової величини, заданої законом розподілу:

x_k	0	1	2
p_k	1/4	1/2	1/4

Розв'язок. Оскільки функція $F(x)$ визначена для всіх дійсних значень x , то розглянемо послідовно інтервали

1. $x \in (-\infty; 0]$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, тому що подія $\xi < x$ для такого x є неможливою подією.

2. $x \in (0; 1]$, $F(x) = P(\xi = 0) = 1/4$, тут нерівності $\xi < x$ задовольняє одне значення $\xi = 0$.

3. $x \in (1; 2]$, $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 1/4 + 1/2 = 3/4$, тут нерівності $\xi < x$ задовольняють два значення $\xi = 0$ і $\xi = 1$.

4. $x \in (2; \infty)$, $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$, для x з цього інтервала нерівності $\xi < x$ задовольняють всі значення випадкової величини. Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0]; \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } x \in (0, 1]; \\ \frac{3}{4}, & \text{якщо } x \in (1, 2]; \\ 1, & \text{якщо } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Графік цієї функції наведений на рис. 7.

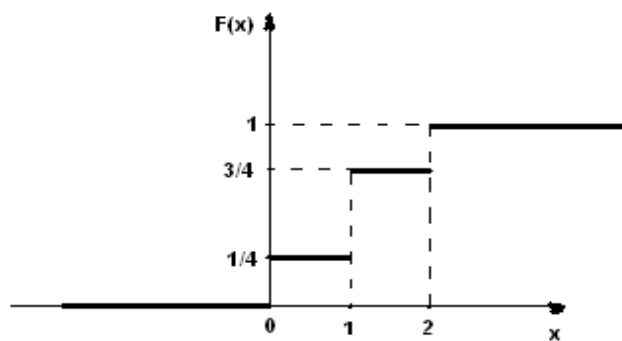


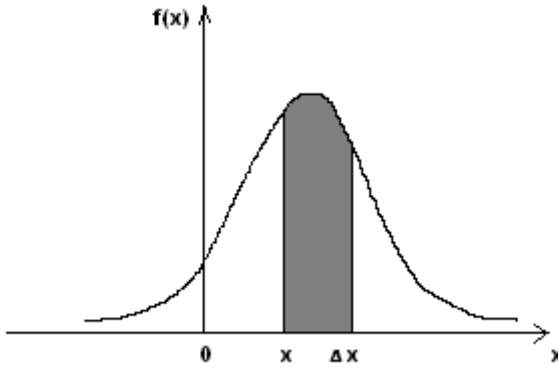
Рис.1. Функція розподілу.

Для неперервних випадкових величин крім функції розподілу, яка визначається так само, як і для дискретних величин, розглядають щільність розподілу.

Щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ неперервної випадкової величини називають першу похідну від функції розподілу:

$$f(x) = F'(x) \quad (2)$$

Ця ймовірність дорівнює площі фігури, розташованої між віссю абсцис і графіком функції $f(x)$ на інтервалі Δx (рис.2).

Рис.2 Щільність розподілу ймовірностей $f(x)$

Щільність розподілу має наступні властивості:

1. $f(x) > 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
3. $P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Функція розподілу, математичне сподівання й дисперсія мають такий самий смисл, як у дискретному випадку, а обчислюються відповідно за формулами (3) - (5).

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (3)$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (4)$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2 \quad (5)$$

Приклад 2. Випадкова величина ξ , розподілена за законом, який визначається щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0 \\ a/2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти параметр a , $F(x)$, $M(\xi)$, $D(\xi)$. Побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язок. Параметр a знайдемо із властивості 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, а інтеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ розіб'ємо на суму трьох інтегралів

$$\int_{-\infty}^0 0 \cdot dy + \int_0^2 \frac{a}{2} dy + \int_2^{\infty} 0 \cdot dy = \frac{ay}{2} \Big|_0^2 = \frac{a \cdot 2}{2} = a = 1$$

Зобразимо графік щільності

розподілу $f(x)$ (рис. 3)

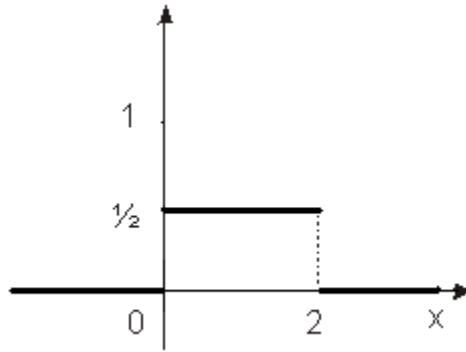


Рис. 3. Графік щільності розподілу $f(x)$

Обчислимо функцію розподілу, для цього розглянемо інтервали $(-\infty, 0)$, $[0, 2]$, $(2, \infty)$.

$$1. x \in (-\infty, 0), \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dy = 0,$$

$$2. x \in [0, 2], \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dy + \int_0^x \frac{1}{2} dy = \frac{y}{2} \Big|_0^x = \frac{x}{2},$$

$$3. x \in (2, \infty), \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dy + \int_0^2 \frac{1}{2} dy + \int_2^x 0 dy = \frac{y}{2} \Big|_0^2 = 1.$$

Графік цієї функції наведений на рис. 4.

Обчислимо математичне сподівання й дисперсію за формулами (3) і (4):

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x dx = 1$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 1 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx - 1 = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} - 1 = \frac{1}{3}$$

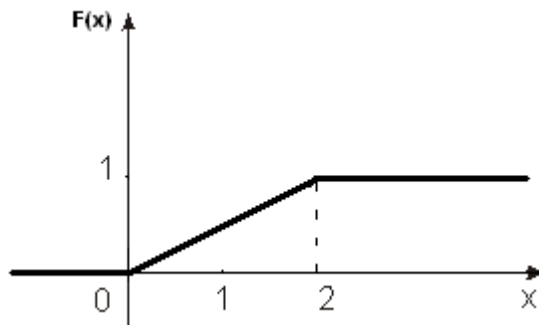


Рис.4 Графік функції розподілу

Модою випадкової величини ξ неперервного типу Md , називається дійсне число – точка максимуму щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Медіаною випадкової величини ξ неперервного типу Mn називається дійсне число, що задовольняє рівняння

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Квантилью порядку p розподілу випадкової величини ξ неперервного типу

називається дійсне число x_p , що задовольняє рівняння $P(\xi < x_p) = p$.

2. Приклади розподілів неперервних випадкових величин: рівномірний, нормальний, показниковий

Рівномірний розподіл.

Випадкова величина ξ неперервного типу називається *розподіленою рівномірно* на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу має від:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a, b] \end{cases} \quad (6)$$

Обчислимо математичне сподівання й дисперсію цього розподілу:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2}{(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} = \frac{a+b}{2}, \\ D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi) = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Розглянутий в прикладі 2 розподіл є рівномірним при $a = 0$ і $b = 1$.

Показниковий (експоненціальний) розподіл.

Випадкова величина ξ називається розподіленою за *показниковим (експоненціальним)* законом з параметром $\lambda > 0$, якщо вона неперервного типу і її щільність розподілу задана формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Графік функції наведений на рис. 5

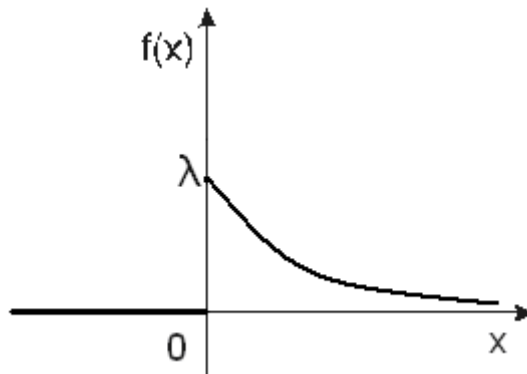


Рис. 5. Щільність показникового розподілу

Математичне сподівання й дисперсія відповідно рівні:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальний розподіл.

Випадкова величина називається розподіленою нормально з параметрами a й $\sigma > 0$, якщо щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (8)$$

Графік цієї функції наведено на рис. 6.

Важливе значення в прикладних задачах має окремий випадок щільності нормального розподілу при $a = 0$ і $\sigma = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (9)$$

Це так званий стандартний нормальний розподіл. Функція (9) - парна. Для значень цієї функції є таблиці.

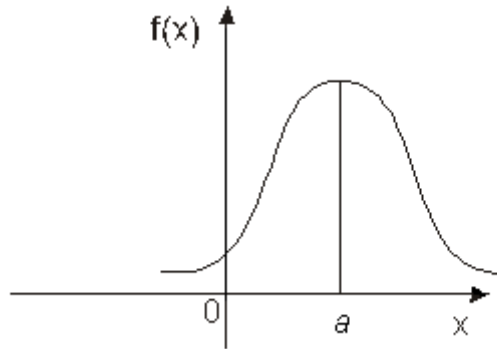


Рис.6. Щільність нормального розподілу.

Математичне сподівання й дисперсія цього розподілу: $M(x) = a$, $D(x) = \sigma^2$.

Параметри a і σ збігаються з основними характеристиками розподілу.

Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини ξ в інтервал $[x_1, x_2]$ обчислюється за формулою

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \quad (10)$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа.