МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кафедра кібербезпеки та DATA-технологій факультету № 6

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

навчальної дисципліни
«Економіко-математичні методи та моделі»
обов’язкових компонент освітньої програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

072 «Фінанси, банківська справа та страхування»
(Фінансова безпека та фінансові розслідування)

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Вченою радою факультету № 6
Протокол від 25.08.2023 № 7

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні кафедри кібербезпеки та DATA-технологій (протокол від 15.08.2023 №8)

Розробники:
1. Доцент кафедри кібербезпеки та DATA-технологій факультету № 6, кандидат технічних наук, доцент Клімушин П.С.

Рецензенти:

1. Завідувач кафедри інформаційних управляючих систем ХНУРЕ, д.т.н., професор Петров К. Е.

2. Провідний науковий співробітник Науково-дослідної лабораторії з проблем розвитку інформаційних технологій ХНУВС, к.т.н., доцент Мордвинцев М.В.

Зміст

Практичне заняття №1. Побудова моделей завдань лінійного програмування 5

Практичне заняття №2. Рішення завдань лінійного програмування графічним методом 9

Практичне заняття №3. Розв’язання завдань лінійного програмування в програмі Excel 17

Практичне заняття №4. Рішення завдань лінійного програмування управління запасами 24

Практичне заняття №5. Рішення завдань цілочисельного лінійного програмування 31

Практичне заняття №6. Розв'язання завдань нелінійного програмування 41

Практичне заняття №7. Розв’язання завдання динамічного програмування 50

Практичне заняття №8. Моделювання одноканальної СМО 59

Практичне заняття №9. Моделювання СМО з чергою 67

Практичне заняття №10. Моделювання багатоканальної СМО 77

Практичне заняття №11. Реалізація методу найменших квадратів в MS Excel 85

Практичне заняття №12. Типове завдання побудови парної регресії і аналізу її якості 88

Практичне заняття №13. Типове завдання побудови множинної регресії і аналізу її якості 95

Практичне заняття №14. Методи оцінювання параметрів структурної моделі 105

Практичне заняття №15. Методика прогнозування часових рядів 109

Практичне заняття №16. Розв'язання завдань теорія прийняття рішень 117

Практичне заняття №17. Розв'язання завдань теорії ігор 124

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Номер та назва навчальної теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр № 3							
Тема № 1. Введення в дослідження операцій	16	2				12	
Тема № 2. Формалізація завдань математичного програмування	16	2		2		12	
Тема № 3. Графічна інтерпретація завдання МП	16	2		4		12	
Тема № 4. Симплекс-метод розв'язання завдань ЛП	16	2		2		12	
Тема № 5. Транспортні завдання лінійного програмування	16	2		2		12	
Тема № 6. Цілочисельне лінійне програмування	16	2		2		12	
Тема № 7. Нелінійне і динамічне програмування	20	2		4		14	
Тема № 8. Системи масового обслуговування	34	2		14		18	
Всього за семестр № 3:	**150**	**16**		**30**		**104**	**залік**
Семестр № 4							
Тема № 9. Введення в економетричне моделювання	14	2		2		10	
Тема № 10. Парний регресійний аналіз	26	2		6		18	
Тема № 11. Множинний регресійний аналіз	26	2		6		18	
Тема № 12. Системи економетричних рівнянь	14	2		2		10	
Тема № 13. Економічний аналіз часових рядів	26	2		6		18	
Тема № 14. Теорія прийняття рішень	20	2		4		14	
Тема № 15. Теорія ігор	24	4		4		16	
Всього за семестр № 4:	**150**	**16**		**30**		**104**	**залік**
Всього по дисципліні:	**300**	**32**		**60**		**208**	

Тема № 2. Формалізація завдань математичного програмування

Практичне заняття №1. Побудова моделей завдань лінійного програмування

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Приклади формалізації завдання лінійного програмування

2. Завдання лінійного програмування для самостійного вирішення

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклади формалізації завдання лінійного програмування

<u>Завдання 1. 1</u>. Підприємство характеризується наступними параметрами: випускається n видів продукції; використовується m видів ресурсів. Відомі: ціна

кожного виду продукції; норма витрат кожного виду ресурсів для випуску одиниці кожного виду продукції; запас кожного виду ресурсів на поточний період. Завдання: знайти такий план випуску готової продукції, для якого сумарна виручка від реалізації всіх видів продукції буде максимальною.

Крок 1. Визначення параметрів завдання.

Найменування параметра	**Позначення**	**Числовий приклад**
Кількість видів готової продукції	n	5
Кількість видів ресурсів	m	4
Норми витрат ресурсів	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
Ліміти виробничих ресурсів	$B=(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m)$	$B=(90 \quad 85 \quad 40 \quad 50)$
Ціна на готову продукцію	$C=(c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n)$	$C=(40 \quad 70 \quad 120 \quad 120 \quad 50)$

Крок 2. Визначення змінних моделі. Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, де: x_i - кількість готової продукції ***i***-го найменування. Завдання: знайти компоненти вектора X, які забезпечують максимальну виручку.

Крок 3. Встановлення взаємозв'язків і обмежень. За умовою завдання план випуску продукції обмежений запасом ресурсів: витрата кожного виду ресурсів для випуску всіх видів готової продукції є:

$$(\alpha_j * X) = \alpha_{j1}x_1+\alpha_{j2}x_2+\dots+\alpha_{jn}x_n$$

Загальна запис обмежень	**Числовий приклад**
$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \le b_1$ $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \le b_2$ ……………………………………… $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \le b_m$	$2x_1+3x_2+5x_3+4x_4+4x_5 \le 90$ $2x_1+2x_2+4x_3+5x_4+0x_5 \le 85$ $1x_1+3x_2+2x_3+0x_4+4x_5 \le 40$ $1x_1+2x_2+3x_3+3x_4+2x_5 \le 50$

Крок 4. Формулювання критерію ефективності. З умови задачі випливає, що всі можливі альтернативи порівнюються за величиною виручки від реалізації продукції. Величина виручки є в загальному вигляді:

$F(X) = (X*C) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + \dots + x_nc_n$

в розглянутому прикладі:

$F(X) = 40x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 120x_4 + 50x_5$

Крок 5. Математична постановка завдання:

Загальна форма	**Числовий приклад**

запису	
$(C^*X) \Rightarrow MAX$ $(a_j{}^*X) \le b_j,$ $j=1,2,\ldots,m$ $X_i \ge 0,$ $i=1,2,..,n$	$40x_1+70x_2+120x_3+120x_4+50x_5 \Rightarrow max$ $2x_1+3x_2+5x_3+4x_4+4x_5 \le 90$ $2x_1+2x_2+4x_3+5x_4+0x_5 \le 85$ $1x_1+3x_2+2x_3+0x_4+4x_5 \le 40$ $1x_1+2x_2+3x_3+3x_4+2x_5 \le 50$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0; x_5 \ge 0;$

Завдання 1.2. Розглянемо рішення виробничого завдання заданої у вигляді таблиці при додаткових обмеженнях на попит: попит на продукцію Р1 не перевищує попит на продукцію Р2 більш ніж на 5; попит на продукцію Р2 ≤ 4. Знайти: План випуску продукції, який забезпечує максимальну виручку від реалізації продукції.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	P_1	P_2	
Сировина	1	3	14
Праця	4	2	26
Ціна продукції	3	3	

Формалізація завдання:

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \Rightarrow Max$$

$$x_1 + 3x_2 \le 14 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 26 \qquad (2)$$

$$x_1 - x_2 \le 5 \qquad (3)$$

$$x_2 \le 4 \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0 \qquad (5)$$

2. Завдання лінійного програмування для самостійного вирішення

Завдання 2.1. Визначення оптимального асортименту продукції. Підприємство виготовляє два види продукції - П1і П2, яка надходить в оптову продаж. Для виробництва продукції використовуються два види сировини - А і В. Максимально можливі запаси сировини в добу становлять 9 і 13 одиниць відповідно. Витрата сировини на одиницю продукції виду П1 і виду П2 дані в табл.

Досвід роботи показав, що добовий попит на продукцію П1 ніколи не перевищує попиту на продукцію П2 більш ніж на 5 од. Крім того, відомо, що попит на продукцію П2 ніколи не перевищує 12 од. на добу.

Расход сырья продукции

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13

Завдання 2.2. Підприємство виробляє два види продукції. Для виробництва одиниці першого продукту потрібно 3 години ручної збірки і 2 годину машинної збірки. Для виробництва одиниці другого продукту потрібно 2 годину ручної збірки і 4 години машинної збірки. Щодня в розпорядженні підприємства є 80 годин для ручної збірки і 90 годин для машинної збирання. Ринкові умови не дозволяють продавати більше 15 одиниць першої продукції щодня. Прибуток від реалізації одиниці першого продукту становить 600 грн., Другого - 500 грн.

Метою підприємства є вибір такого асортиментного набору, при якому досягається максимум прибутку в день.

Завдання 2.3. Розглянемо рішення виробничого завдання заданої у вигляді табл. при додаткових обмеженнях на попит: попит на продукцію Р1 не перевищує попит на продукцію Р2 більш ніж на 7; попит на продукцію Р2 ≤ 6.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	P_1	P_2	
Сировина	3	5	123
Праця	7	4	245
Ціна продукції	56	44	

Скласти математичну модель завдання для визначення плану випуску продукції, який забезпечує максимальну виручку від реалізації продукції.

Завдання 2.4. Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовується токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в табл. У ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени (ч)
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль	10	14	12	

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Висновки. Етап формалізації задач математичного програмування є творчим, найбільш важким і відповідальним. Він складається з економічної постановки проблеми і аналізу достовірної вихідної інформації. Вимагає кваліфікованого знання досліджуваної економічної системи. Щоб подальша розробка математичної моделі була успішною, необхідно виконувати три основних правила: враховувати головні чинники, від яких залежить шукане рішення, нехтувати другорядними - не визначальними факторами, треба вміти відрізняти головні чинники від другорядних.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами

Тема № 3. Графічна інтерпретація завдання МП

Практичне заняття №2. Рішення завдань лінійного програмування графічним методом

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Приклад рішення задачі ЛП графічним методом
2. Аналіз чутливості рішення завдання МП
3. Завдання лінійного програмування для самостійного вирішення

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклад рішення задачі ЛП графічним методом

Завдання. Розглянемо рішення виробничого завдання заданої у вигляді таблиці при додаткових обмеженнях на попит: попит на продукцію Р1 не перевищує попит на продукцію Р2 більш ніж на 5; попит на продукцію Р2 $\le$ 4. Знайти: План випуску продукції, який забезпечує максимальну виручку від реалізації продукції.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	P_1	P_2	
Сировина	1	3	14
Праця	4	2	26
Ціна продукції	3	3	

Формалізація задачі:

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \Longrightarrow Max$$

$$x_1 + 3x_2 \le 14 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 26 \qquad (2)$$

$$x_1 - x_2 \le 5 \qquad (3)$$

$$x_2 \le 4 \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0 \qquad (5)$$

Геометричне рішення задачі представлено на рис. 1 і включає наступні етапи:

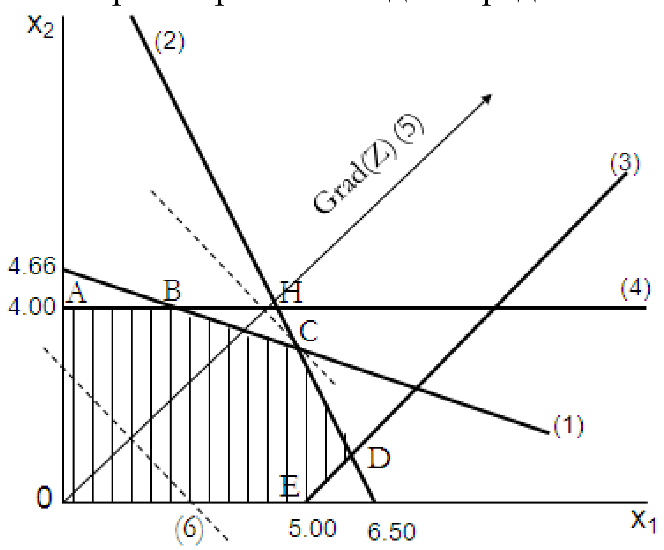


Рис. 1. Графічний метод рішення задач МП

Крок 1. Побудова області допустимих значень для x_1 і x_2 (багатокутник ABCDEO, представлений у вигляді заштрихованої області).

Крок 2. Проводиться пряма (5) вздовж напрямку градієнта: G=grad(Z)={3, 3}.

Крок 3. Проводиться пряма (6) перпендикулярна прямий (5).

Крок 4. Пряма (6) переміщається по прямій (5) до верхньої точки дотику з області.

В даному випадку рішенням завдання є точка С. Її координати x_1 і x_2 можна зняти з графіка або обчислити з умови, що рішення - координати точки перетину прямих (1) і (2). Для цього маємо систему рівнянь:

Рішення є в точці: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ 4x_1 + 2x_2 = 26 \end{cases}$$

Таким чином, максимальна виручка дорівнює Z = 24 при випуску продукції x_1 = 5 одиниць, а продукції x_2 = 3 одиниці.

При вирішенні завдань МП важливо знати, як зміниться рішення задачі в процесі зміни її параметрів: коефіцієнтів цільової функції, елементів матриці і правій частині умов-обмежень. Але особливо важливо знати, за яких змінах параметрів завдання її оптимальне рішення залишається незмінним.

Зміна параметрів завдання МП може відбуватися за рахунок зміни умов функціонування описуваних об'єктів (наприклад, ціни на комплектуючі вироби, вартості продукції на ринку і т.д.). Ці зміни породжують невизначеність параметрів завдання і є в даному випадку детермінованими величинами.

У ряді інших випадків параметри завдання МП є випадковими величинами. І тоді важливо знати, як може змінюватися рішення задачі від реалізації до реалізації. При цьому необхідно мати, принаймні, відомості про математичне сподівання і дисперсії цих випадкових величин, якщо немає можливості оцінити їх функції розподілу. У такому випадку для невизначених значень параметрів треба вказати відповідну їм довірчу ймовірність.

Як правило, в подібних ситуаціях для отримання відповіді вирішують серію прямих близьких завдань, змінюючи значення параметрів.

Особливість завдань МП полягає в тому, що отримане оптимальне рішення може не змінюватися при зміні значень параметрів в цільової функції та умови обмеження в досить широких межах. Більш звичним є «безперервний» варіант: при невеликих змінах параметрів завдання обов'язково змінюється і рішення координати точки оптимуму. У цьому сенсі можна використовувати *параметричне програмування*, коли визначається поведінка рішення задачі МП в залежності від параметра, включеного в вирази коефіцієнтів цільової функції, елементи матриці і правій частині умов-обмежень. Але ці процедури навіть для одного параметра громіздкі. *Провести оцінку можливих змін всіх параметрів моделі одночасно неможливо, тому що параметри пов'язані між собою. Тому оцінку поведінки моделі проводять для кожного параметра окремо.*

Таким чином, в завданнях МП важливий процес аналізу моделі на чутливість, що реалізується після отримання оптимального рішення.

В рамках такого аналізу виявляється чутливість оптимального рішення до певних змін вихідної моделі. У задачі про асортимент продукції може становити інтерес питання про те, як вплине на оптимальне рішення збільшення і зменшення попиту на продукцію або запасів вихідної сировини і трудових ресурсів. Можливо, також буде потрібно аналіз попиту і пропозиції продукції на оптимальне рішення.

При такому аналізі завжди розглядається комплекс оптимізаційних моделей. Це додає моделі певну динамічність, що дозволяє досліднику проаналізувати вплив можливих змін вихідних умов на отримане раніше оптимальне рішення. Динамічні характеристики моделей фактично відображають аналогічні характеристики, властиві реальним процесам. Відсутність методів, що дозволяють виявляти вплив можливих змін параметрів моделі на оптимальне рішення, може привести до того, що отримане (статичну) рішення застаріє ще до своєї реалізації. Для проведення аналізу моделі на чутливість з успіхом можуть бути використані графічні методи.

2. Аналіз чутливості рішення завдання МП

Розглянемо основні завдання аналізу чутливості рішення на розглянутому прикладі. Для цього спочатку дамо ряд визначень.

Визначення. Рішення вважається *чутливим (стійким)*, якщо малі зміни обмежень призводять до малих змін рішення. У разі завдання математичного програмування, стійкість це збереження структури рішення при невеликих змінах обмежень. У розглянутому прикладі рішення лежить на перетині кордонів (1) і (2). Саме ці обмеження визначають структуру оптимального рішення.

При аналізі стійкості оптимізаційної моделі визначаються межі зміни параметрів моделі, при яких залишається незмінною якісна структура рішення.

Визначення. Обмеження, які визначають структуру оптимального рішення, називаються *зв'язуючи*. В іншому випадку, відповідне обмеження буде *не зв'язуючи*. Незмінність якісної структури рішення передбачає незмінність типів обмежень завдання.

У нашому випадку сполучні обмеження, це обмеження визначають положення прямих (1) і (2), так як на їх перетині лежить оптимальне рішення. Інші обмеження - які не пов'язуючи.

Визначення. Якщо деяке обмеження є зв'язуючим, то відповідний ресурс відносять до розряду *дефіцитних ресурсів*, так як він використовується повністю. Ресурс, з яким асоційоване не пов’язуючи обмеження, слід віднести до розряду *недефіцитних ресурсів* (тобто наявних в деякому надлишку). У нашому прикладі запаси сировини і трудовий ресурс, що витрачаються на виробництво продукції є дефіцитними ресурсами.

Аналіз стійкості дозволяє відповісти на ряд практично важливих питань:

– на скільки можуть бути збільшені запаси дефіцитних ресурсів з метою підвищення ефективності економічної системи;

– на скільки можуть бути знижені запаси дефіцитних ресурсів при збереженні загальної структури рішення;

– на скільки можна знизити запаси не дефіцитних ресурсів при збереженні ефективності економічної системи.

Провести оцінку можливих змін всіх параметрів моделі одночасно неможливо, тому що параметри пов'язані між собою. Оцінка стійкості проводять для кожного параметра окремо.

Після знаходження оптимального рішення видається цілком логічним з'ясувати, як відіб'ється на оптимальному рішенні зміна запасів ресурсів.

Розглянемо спочатку запас ресурсу - сировина. На рис. 2 при збільшенні запасу цього ресурсу пряма (1) переміщається вгору, паралельно самій собі, до точки ***H***, в якій перетинаються лінії обмежень (1) і (4).

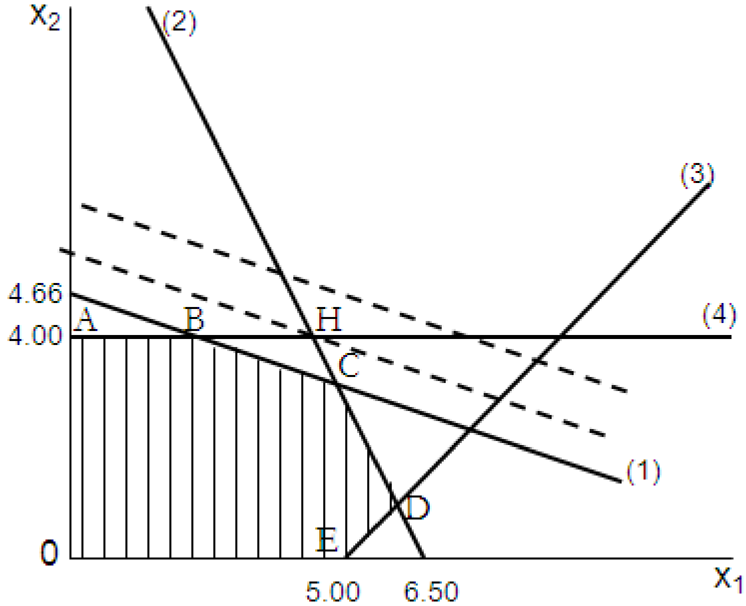


Рис. 2. Зміна запасу ресурс - сировина (верхня межа)

Тобто структура рішення зберігається при переміщенні (1) до точки ***H***, і оптимальному рішенню буде відповідати точка ***H***, а простором допустимих рішень ставатиме багатокутник ***AHDEO***. При подальшому переміщенні лінії запасу ресурсу - сировина оптимальне рішення буде визначатися перетином прямих (2) і (4), тобто структура оптимального рішення змінюється і чутливість рішення задачі до зміни параметра ресурс - сировина втрачається. У точці ***H*** обмеження (1) для запасу ресурсу - сировина стає надмірною, так як будь-який подальший ріст запасу відповідного ресурсу не впливає ні на простір рішень, ні на оптимальне рішення.

Таким чином, обсяг ресурсу - сировина не слід збільшувати понад тієї межі, коли відповідне йому обмеження (1) стає надлишковим, тобто пряма (1) проходить через нову оптимальну точку ***H***.

Цей граничний рівень визначається наступним чином. Встановлюються координати точки ***H***, в якій перетинаються прямі (1), (4) з графіка або знаходиться з рішення системи рівнянь для цих прямих

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 26 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Звідки отримуємо $x_1 = 4.5$; $x_2 = 4$. Підставляючи, отримані значення x_1 і x_2 в обмеження (1) отримаємо верхню межу запасу ресурсу - сировина

$$x_1 + 3x_2 \leq 14 \quad => \quad 4.5 + 3 \cdot 4 = 16.5$$

Таким чином, ресурс - сировина можна збільшити на 2.5 одиниці без зміни структури оптимального рішення. Ефективність системи при цьому зросте на 1.5 одиниці (Z = 25.5).

Аналогічним чином можна визначити нижню межу ресурсу - сировина при збереженні структури рішення. Пряму (1) опускаємо до точки D (рис. 3). Нижче неї зв'язуючими обмеженнями стають (1) і (3).

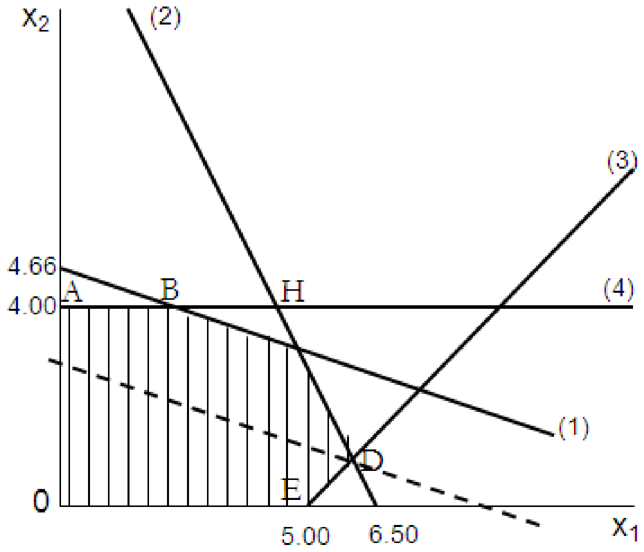


Рис. 3. Зміна запасу ресурс - сировина (нижня межа)

Координати точки ***D*** нового оптимального рішення x_1 і x_2 знаходяться з рішення системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 26 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

Звідки знаходимо: $x_1 = 6$; $x_2 = 1$. Підставляємо дані значення в обмеження (1) отримаємо нижню межу запасу ресурсу - сировина

При цьому цільова функція набуде значення Z = 3 • 6 + 3 • 1 = 21.

Межі зміни трудового ресурсу обмежуються переміщенням прямої (2) між точками ***B*** (нижня межа) і ***L*** (верхня межа) (рис. 4). Координати цих точок знаходяться з рішення систем рівнянь, відповідно

$4x_1 + 2x_2 = 26$	$4x_1 + 2x_2 = 26$
$x_2 = 4$	$x_1 - x_2 = 5$

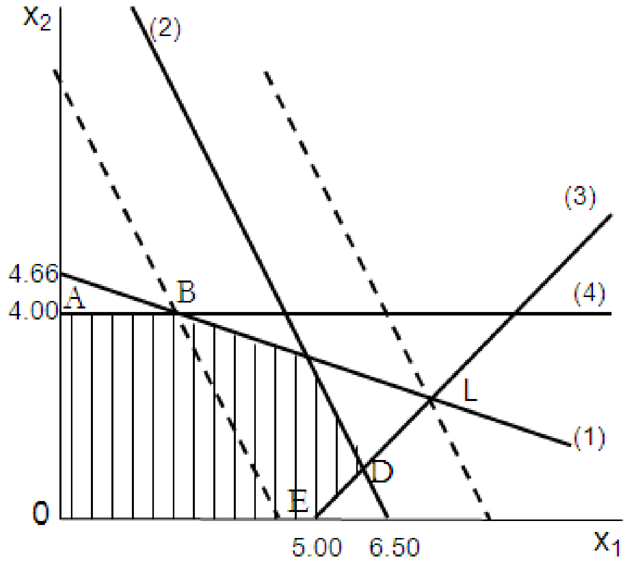


Рис. 4. Допустимі межі зміни трудового ресурсу

У точці B маємо x1 = 2; x2 = 4; Z = 18; трудовий ресурс - 16. У точці L: x1 = 7,25; x2 = 2.25; Z = 28.5; трудовий ресурс - 33.5

Розглянемо обмеження (3) і (4), яке представляє собою обмеження на недефіцитних ресурси - попит на перший і другий продукти.

Можливе зменшення ресурсу «Попит 1» визначається положенням лінії (3-1) (рис. 5). Граничне значення ресурсу знаходиться з рівності (3) підстановкою координат точки C {5,3}: x1-x2 = 5-3 = 2. Аналогічно знаходиться нижня межа ресурсу «Попит 2»: x2 = 3.

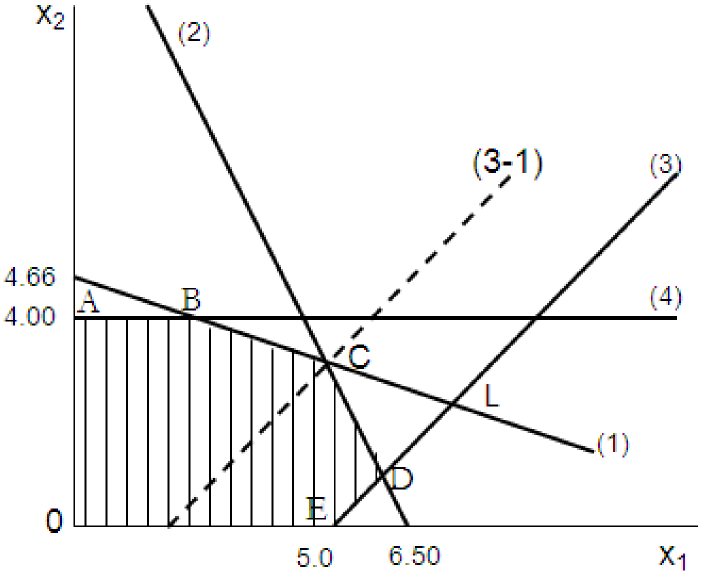


Рис. 5. Межі зміни недефіцитних ресурсів

Цей результат показує, що раніше отримане оптимальне рішення не зміниться, якщо попит на перший і другий продукти впаде до 2 і 3 одиниць, відповідно.

Таким чином, проведені дослідження показують вплив дефіцитних ресурсів на чутливість оптимального рішення. Тут при обмеженнях, пов'язаних з додатковим залученням ресурсів, природно виникає питання: якому з ресурсів слід віддати перевагу при вкладенні додаткових коштів.

Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення цільової функції.

Визначення. Цінністю ресурсу називається відношення приросту цільової функції до діапазону зміни ресурсу при збереженні структури рішення: C = ΔZ / ΔR.

В даному прикладі:

$$C_1 = \frac{(25.5-21.0)}{(16.5-9.0)} = 0.6$$

$$C_2 = \frac{(28.5-18.0)}{(33.5-16.0)} = 0.6$$

Підсумкова таблиця за результатами досліджень приведена в таблиці 2. Отримані результати свідчать про те, що додаткові вкладення в першу чергу слід направити на збільшення дефіцитних ресурсів. Що стосується недефіцитних ресурсів, то, як і слід було очікувати, їх обсяг збільшувати не слід.

Визначення меж зміни коефіцієнтів цільової функції пов'язано з ціновою виробничої політики організації. Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил прямої (Вектор-градієнт), яка представляє цю функцію в прийнятій системі координат (рис 1). Варіація коефіцієнтів цільової функції може привести до зміни сукупності зв'язуючих обмежень і, отже, статусу того чи іншого ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним, і навпаки).

Таблиця 2. Результати дослідження на стійкість

Ресурс	Тип ресурсу	Значення ресурсу	Межі зміни ресурсу	Зміни ЦФ	Цінність ресурсу
Сировина	Дефіцитний	14	9 – 16.5	21 – 25.5	0.6
Праця	Дефіцитний	26	16 – 33.5	18 – 28.5	0.6
Попит 1	Недефіцитний	5	2 - ∞	-	-
Попит 2	Недефіцитний	4	3 - ∞	-	-

При аналізі моделі на чутливість розгляд коефіцієнтів цільової функції необхідно доповнити дослідженням наступних питань:

1. Який діапазон зміни того чи іншого коефіцієнта цільової функції, при якому не відбувається зміни оптимального рішення.

2. На скільки слід змінити той чи інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити деякий недефіцитний ресурс дефіцитним, і, навпаки, дефіцитний ресурс зробити недефіцитним.

Розглядаючи перше питання, позначимо через c_1 і c_2 доходи підприємства від продажу одиниці продукції P_1 і P_2 відповідно. Тоді цільову функцію можна представити в наступному вигляді:

$Z = c_1x_1+c_2x_2$

На рис. 1 видно, що при збільшенні $\boldsymbol{c_1}$ або зменшенні $\boldsymbol{c_2}$ пряма, що представляє цільову функцію $\boldsymbol{Z}$, обертається навколо точки $\boldsymbol{H}$ за годинниковою стрілкою. Якщо ж $\boldsymbol{c_1}$ зменшується або $\boldsymbol{c_2}$ збільшується, та пряма обертається в протилежному напрямку - проти годинникової стрілки. Таким чином, точка $\boldsymbol{H}$ залишатиметься оптимальною точкою до тих пір, поки нахил прямій не вийде за межі, які визначаються нахилами прямих для обмежень (1) і (2). В іншому випадку змінюється структура оптимального рішення, а, отже, і перерозподіляються ресурси на дефіцитні і недефіцітні.

3. Завдання лінійного програмування для самостійного вирішення

Завдання 3.1. Вирішити графічним методом задачу лінійного програмування

$$\text{Max } f(x) = 3X_1 + 2X_2$$
$$X_1 + 2X_2 \le 11$$
$$2X_1 - X_2 \ge 5$$
$$X_1 + 3X_2 \ge 14$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

Завдання 3.2. Вирішити графічним методом задачу лінійного програмування

$$\text{Max } f(x) = 3X_1 + 2X_2$$
$$X_1 + 2X_2 \le 12$$
$$2X_1 - X_2 \ge 7$$

$X_1 + 3X_2 \geq 14$
$X_1 , X_2 \geq 0$

Завдання 3.3. Вирішити графічним методом задачу лінійного програмування

$$\text{Max } f(x) = 3X_1 + 2X_2$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$
$$2X_1 - X_2 \leq 18$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 13$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Висновки. Аналіз стійкості дозволяє відповісти на ряд практично важливих питань:

На скільки можуть бути збільшені запаси дефіцитних ресурсів з метою підвищення ефективності економічної системи.

На скільки можуть бути знижені запаси дефіцитних ресурсів при збереженні загальної структури рішення.

На скільки можна знизити запасів не дефіцитних ресурсів при збереженні ефективності економічної системи.

Провести оцінку можливих змін всіх параметрів моделі одночасно неможливо, т. К. Параметри пов'язані між собою.

Оцінка стійкості проводять для кожного параметра окремо.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами

Тема № 4. Симплекс-метод розв'язання завдань ЛП

Практичне заняття №3. Розв'язання завдань лінійного програмування в програмі Excel

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Приклад рішення задачі ЛП з використанням прикладних програм

3. Завдання лінійного програмування для індивідуального вирішення

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf

2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf

3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf

4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч.

посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклад рішення задачі ЛП з використанням прикладних програм

Основна увага в даному розділі приділяється використанню відповідних прикладних програм для вирішення задач МП. Перш за все, це програма електронної таблиці Excel.

Шаблони електронної таблиці Excel це шаблони для вирішення завдань лінійного і динамічного програмування, реалізації аналітичного ієрархічного процесу, теорії прийняття рішень, дослідження моделей інвестицій, попередньої обробки даних, теорії масового обслуговування, імітаційного моделювання та нелінійної оптимізації. Деякі з цих шаблонів є "простими" робочими листами Excel. Інші використовують надбудову Excel Пошук рішення або макроси, написані на мові VBA. Але незалежно від того, що собою представляють ці шаблони, всі вони володіють особливими засобами або спеціальними областями для введення даних, що дозволяє вирішувати широке коло завдань без необхідності зміни формул або структури робочого аркуша. Формули і структура робочих листів організовані таким чином, щоб мінімізувати можливість їх випадкового зміни.

Програма електронна таблиця Excel, описані в підрозділі, покликані полегшити вивчення і розуміння викладеного матеріалу там, де зробити це іншим способом важко, а робочі книги Excel дуже ефективно допомагають при аудиторному вивченні матеріалу, коли будь-які концепції можна показати, просто змінивши вихідні дані завдання . На приклад, спеціальні шаблони робочих книг Excel для вирішення задач динамічного програмування і реалізації аналітичного ієрархічного процесу, де користувач в інтерактивному режимі може ефективно вивчити всі подробиці цих двох методів.

Розглянемо застосування програми Excel на прикладі рішення наступної задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Компанія "Лаки і Фарби" виробляє фарбу для внутрішніх і зовнішніх робіт з сировини двох типів: Ml і M2 згідно з даними таблиці 1.

Таблиця 1. Основні дані

	Расход сырья на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	Для наружных работ	Для внутренних работ	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход, руб. на тонну	5	4	-

Відділ маркетингу компанії на основі дослідження ринку обмежив щоденне виробництво фарби для внутрішніх робіт до 2 т, а також поставив умову, щоб щоденне виробництво фарби для внутрішніх робіт не перевищувала більш ніж на тонну аналогічний показник виробництва фарби для зовнішніх робіт. Компанія хоче визначити оптимальне (найкраще) співвідношення між видами продукції, що випускається для максимізації загального щоденного доходу.

Математична модель задачі має вигляд:

$Z = 5x1 + 4x2$ max

при обмеженнях:

$6x1 + 4x2 \leq 24$, на сировину M1

$x1 + 2x2 \leq 6$, на сировину M2

$-x1 + x2 \leq 1$, попит 1

$x2 \leq 2$, попит 2

$x1 \geq 0$, $x2 \geq 0$. позитивні

Наведемо рішення даної задачі за допомогою надбудови *Пошук рішення* в програмі Excel. Для цього визначимо завдання вихідних даних завдання на робочому аркуші згідно рис. 1.

	A	B	C	D	E
1		Змінні		Дохід	
2		X1	X2		
3				=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B4:C4)	
4	Ціна	5	4		
5					
6		Обмеження			
7	Ресурс			Витрата	Запас
8	M1	6	4	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B8:C8)	24
9	M2	1	2	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B9:C9)	6
10	Попит 1	-1	1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B10:C10)	1
11	Попит 2	0	1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B11:C11)	2

Рис. 1. Заповнення робочого листа для вирішення завдання

Для змінних задачі x_1 і x_2 відведені осередки B3 і C3. Ці осередки називаються змінними комірками. У змінювані осередки значення не заносяться, і в результаті рішення задачі в цих осередках будуть відображені оптимальні значення змінних.

У осередок D4 вводиться формула для обчислення цільової функції завдання (доходу), а в осередку D8: D11 вводиться формула для обчислення витраченого кількості ресурсів відповідно до заданих обмежень. Відповідно числові значення коефіцієнтів цільової функції (ціни) та обмежень при змінних введені в сторінках B і C, а праві частини обмежень (запаси) задані в коліні E.

Процедура *Пошук рішення* включається з стрічки Дані. У вікні (рис. 2) потрібно встановити адресу цільової комірки D4, значення цільової оседредки: максимальне, адреси змінюваних оседредків B3: C3.

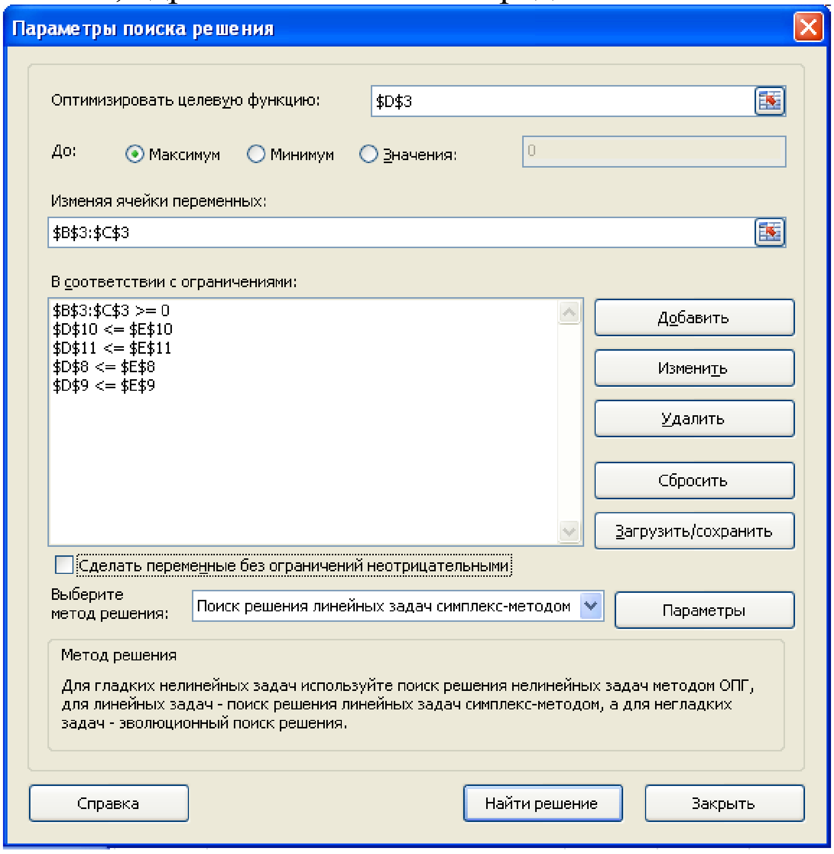


Рис. 2. Вікно Пошук рішення

Щоб ввести обмеження завдання, натиснути кнопку *Додати*. У діалоговому вікні (рис. 3) зліва ввести адресу D8 (витрачений кількість сировини M1), потім вибрати знак ≤ і в правій частині кількість сировини M1, рівне 24 (адреса осередку E8). Після введення натиснути кнопку Додати і аналогічно ввести інші обмеження.

У вікні *Пошук рішення* вибрати метод рішення *Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом*, потім натиснути кнопку *Параметри у вікні* (рис. 4) встановити прапорці в пунктах *Використовувати автоматичне масштабування* (використовується, коли числа в змінюваних оседредках і в цільовій комірці суттєво різняться) і показувати результати ітерацій (призупиняє пошук рішення для перегляду результатів ітерацій).

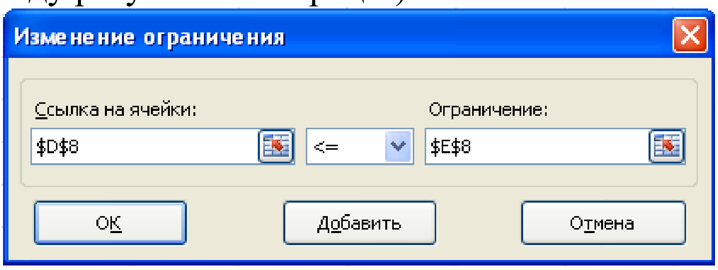


Рис. 3. Додавання обмеження

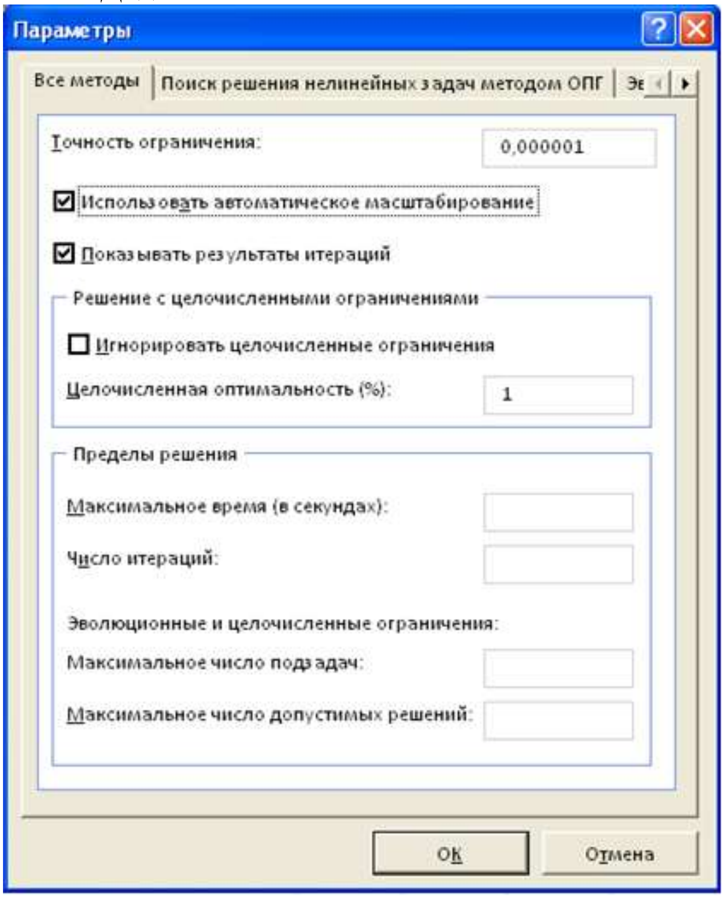


Рис. 4. Завдання параметрів рішення

Для вирішення завдання в вікні *Пошук рішення* натиснути кнопку *Знайти рішення і переглянути результати ітерацій* в процесі знаходження оптимального рішення. У вікні *Результати пошуку рішення* (рис. 5) встановити перемикач в положення *Зберегти знайдене рішення* і вибрати тип звіту *Результати*. Звіт про результати складається з трьох таблиць (рис. 6): таблиці 1 наводяться дані про цільової функції; в таблиці 2 наводяться значення змінних завдання; в таблиці 3 показані результати пошуку для обмежень завдання.

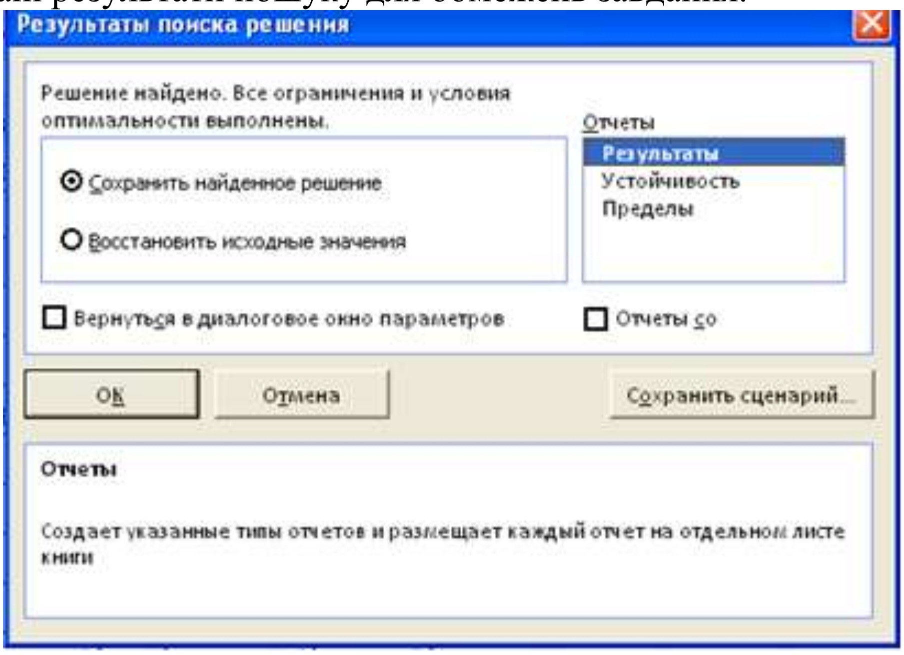


Рис. 5. Вибір звітності

14	Ячейка целевой функции (Максимум)			
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
16	$D$3	Дохід	0	21
17				
18				

19	Ячейки переменных				
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
21	$B$3	X1	0	3	Продолжить
22	$C$3	X2	0	1,5	Продолжить
23					
24					

25	Ограничения					
26	Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
27	$D$10	Попит 1 Витрата	-1,5	$D$10<=$E$10	Без привязки	2,5
28	$D$11	Попит 2 Витрата	1,5	$D$11<=$E$11	Без привязки	0,5
29	$D$8	M1 Витрата	24	$D$8<=$E$8	Привязка	0
30	$D$9	M2 Витрата	6	$D$9<=$E$9	Привязка	0
31	$B$3	X1	3	$B$3>=0	Без привязки	3
32	$C$3	X2	1,5	$C$3>=0	Без привязки	1,5

Рис. 6. Звіт про результати

	A	B	C	D	E
1		Змінні		Дохід	
2		X1	X2		
3		3	1,5	21	
4	Ціна	5	4		
5					
6		Обмеження			
7	Ресурс			Витрата	Запас
8	M1	6	4	24	24
9	M2	1	2	6	6
10	Попит 1	-1	1	-1,5	1
11	Попит 2	0	1	1,5	2

Рис. 7. Результат пошуку рішення

З цих таблиць видно, що в оптимальному рішенні: виробництво фарби для зовнішніх робіт B3 = 3; виробництво фарби для внутрішніх робіт C3 = 1.5; при цьому дохід D4 = 21; витрата сировини M1 D8 = 24; витрата сировини M2 D9 = 6.

Первісна таблиця Excel заповнюється результатами, отриманими при вирішенні (рис. 7).

6	Ячейки переменных						
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	$B$3	X1	3	0	5	1	3
10	$C$3	X2	1,5	0	4	6	0,666666667
11							

12	Ограничения						
13			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
15	$D$10	Попит 1 Витрата	-1,5	0	1	1E+30	2,5
16	$D$11	Попит 2 Витрата	1,5	0	2	1E+30	0,5
17	$D$8	M1 Витрата	24	0,75	24	12	4
18	$D$9	M2 Витрата	6	0,5	6	0,666666667	2

Рис. 8. Звіт про стійкість

Таким чином, знайдено опримальне рішення завдання з використанням додаткової компоненти Excel *Пошук рішення*.

3. Завдання лінійного програмування для індивідуального вирішення

Виконати рішення задач відповідно до свого варіанта:

1) графічним методом

2) із застосуванням прикладних програм (Excel)

Для виготовлення різних виробів **А** і **В** використовуються три види сировини (табл. 1). На виробництво одиниці виробу **А** потрібно затратити сировини першого виду **а1** кг., Сировини другого виду **а2** кг., Сировини третього виду **а3** кг. На виробництво одиниці виробу **В** потрібно затратити сировини першого виду **в1** кг., Сировини другого виду **в2** кг., Сировини третього виду **в3** кг.

Виробництво забезпечено: сировиною першого виду в кількості **р1** кг., Сировиною другого виду в кількості **р2** кг., Сировиною третього виду в кількості **р3** кг.

Прибуток від реалізації одиниці готового виробу **А** становить α ум. од., а вироби **В** - β ум. од.

Скласти план виробництва виробів **А** і **В**, що забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

Скласти математичну модель задачі. Вирішити задачу графічним і симплексним методами. Дати економічну інтерпретацію отриманим результатам. Дослідити на стійкість (чутливість) отримане рішення.

Таблиця 1

Варіант	*а1*	*а2*	*а3*	*в1*	*в2*	*в3*	*р1*	*р2*	*р3*	α	β
1	16	8	5	4	7	9	784	552	567	4	6
2	9	7	4	5	8	16	1431	1224	1328	3	2
3	12	10	3	3	5	6	684	690	558	6	2
4	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
5	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
6	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9
7	11	8	5	3	4	3	671	588	423	5	2
8	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
9	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
10	10	5	4	9	11	15	1870	1455	1815	7	9
11	2	3	4	6	4	3	600	520	600	3	6
12	3	6	8	2	3	2	560	870	840	3	2
13	2	3	3	5	2	3	380	273	300	2	5
14	1	7	6	2	3	3	650	1365	1245	6	5
15	4	3	3	3	4	5	700	630	750	6	5
16	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	4
17	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
18	5	4	3	3	3	4	750	630	700	5	6
19	6	4	3	2	3	4	600	520	600	6	3
20	8	6	3	2	3	2	840	870	500	6	2
21	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	5
22	2	3	3	1	6	7	438	747	812	7	5
23	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
24	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	5

Варіант	*а1*	*а2*	*а3*	*в1*	*в2*	*в3*	*р1*	*р2*	*р3*	α	β
25	2	3	2	3	6	8	428	672	570	3	8
26	5	3	6	10	12	3	910	948	714	9	3
27	9	6	3	4	7	8	945	864	740	3	2
28	4	3	3	8	11	5	616	627	453	2	5
29	3	6	9	8	7	4	768	807	801	3	2
30	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	5

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами

Тема № 5. Транспортні завдання лінійного програмування

Практичне заняття №4. Рішення завдань лінійного програмування управління запасами

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Приклад рішення завдання ЛП управління запасами

3. Завдання ЛП управління запасами для індивідуального вирішення

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклад рішення завдання ЛП управління запасами

Для транспортної задачі існує декілька методів відшукання початкового плану (опорного рішення): метод північно-західного кута; метод мінімальної вартості; метод Фогеля і тощо.

Різниця цих методів полягає в "якості" початкового рішення, тобто "Віддаленості" початкового рішення від оптимального. У загальному випадку метод Фогеля, запропонований американським вченим, дає найкраще рішення, а метод північно-західного кута - найгірше. Однак метод північно-західного кута вимагає меншого обсягу обчислень.

Обчислювальний алгоритм методу потенціалів розглянемо на прикладі вирішення конкретного завдання прикріплення трьох пунктів відправлення (постачальників) i = 1,2,3 до чотирьох пунктів призначення (споживачі) j = 1,2, ..., 4 відповідно до вихідних даних табл. 1.

Таблиця 1. Початкові дані

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Потребность	40	60	80	60	240

Початковий план можна скласти одним з перерахованих вище методів. Скористаємося найбільш простим методом - методом північно-західного кута. Відповідно до цього методу завантаження клітин (визначення базисних змінних по розподілу обсягів пунктів відправлення до пунктів призначення) починається з верхньої лівої клітки («північно-західна» частина таблиці) і триває вниз і вправо (по діагоналі).

За вказаному правилу завантажуємо першу клітку на основі наступної умови: $x_{11} = \min \{a_1; b_1\} = \min \{60; 40\} = 40$.

Таким чином, перший пункт призначення завантажений, а перший пункт відправлення має залишки вантажу $\Delta a_1 = 60\text{-}40 = 20$, які і розподіляємо на другий пункт призначення: $x_{12} = \min \{\Delta a_1; b_2\} = \min \{20; 60\} = 20$; $\Delta b_2 = 40$.

Продовжуючи перетворення аналогічним чином, отримуємо: $x_{22} = \min \{a_2; \Delta b_2\} = \min \{80; 40\} = 40$; $\Delta a_2 = 40$ і т. Д. Процес триває до тих пір, поки не будуть задоволені всі споживачі за рахунок запасів постачальників.

Результати початкового плану і розрахунку потенціалів представлені в табл. 2.

Таблиця 2. Початковий план перевезень

Поставщики	Потребители				Запасы	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 P 40	2 20 3	3	4	60	0
A_2	4	3 40 P	2 3 40	0	80	1
A_3	0 ⊕ 3	2	2 P 40	1 60	100	1
Потребность	40	60	80	60	240	
β_j	1	2	1	0		

У процесі рішення після кожної ітерації (в тому числі і після отримання допустимого рішення) по числу завантажених клітин перевіряється опорний план на виродженість, тобто число завантажених клітин має бути не більшою за кількість рівнянь: N = m + n - 1 = 4 + 3-1 = 6.

У тому випадку, якщо число завантажених клітин менше числа рівнянь, то потрібно в будь-які вільні клітини поставити нулі. Клітка, в якій стоїть нуль, вважається зайнятою.

Значення цільової функції за результатами розрахунку допустимого плану

$Z_0 = 1 \times 40 + 2 \times 20 + 3 \times 40 + 2 \times 40 + 2 \times 40 + 1 \times 60 = 420.$

Розрахунок потенціалів виконують по завантажених клітин, для яких повинно виконуватися рівність:

$\alpha i + \beta j = cij,$ (1)

де αi потенціал постачальника Ai, який записують в новому стовпці праворуч від таблиці; βj потенціал споживача B j, який записують в новому рядку під таблицею. Дані потенціали вибирають так, щоб в будь-який базисної клітці їх сума дорівнювала тарифу, тобто виконувалося рівність (1). Так як кількість всіх потенціалів αi і βj становить m + n, а зайнятих клітин m + n-1, то для визначення чисел αi і βj доведеться вирішувати систему з m + n-1 рівнянь з m + n невідомими. Тому одному з невідомих потенціалів надають довільне значення (наприклад, нульовий). Тоді інші значення визначаються однозначно.

Обчислюючи потенціали за виразом (1), приймаємо для першого рядка αi = 0. Використовуючи завантажені клітини (i-j) = (1-1), (1-2), отримуємо:

$\alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 0 + \beta_1 = 1, \beta_1 = 1;$

$\alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 0 + \beta_2 = 2, \beta_2 = 2.$

Далі по завантажених клітин (2-2), (2-3) визначаємо інші потенціали:

$\alpha_2 + \beta_2 = 3, \alpha_2 + 2 = 3, \alpha_2 = 1;$

$\alpha_2 + \beta_3 = 2, 1 + \beta_3 = 2, \beta_3 = 1.$

Результати розрахунку потенціалів для опорного плану представлені в табл. 2.

Для перевірки оптимальності плану переглядають вільні клітини, для яких визначають оцінки Δcij - різниця між тарифом клітини і сумою потенціалів рядка і стовпця, тобто Δcij = cij- (αi + βj). Економічно оцінка Δcij показує, розмір економії транспортних витрат на 1 од. вантажу, що перевозиться. Якщо всі оцінки невід'ємні, тобто $\Delta cij \geq 0$ або

$\alpha i + \beta j \leq cij,$ (2)

то план оптимальний і залишається підрахувати транспортні витрати.

За табл. 1.10 здійснюємо перевірку початкового плану на оптимальність:

(i-j) = (1-3), $0 + 1 \leq 3$;

(i-j) = (1-4), $0 + 0 \leq 4$;

(i-j) = (2-1), $1 + 1 \leq 4$;

(i-j) = (2-4), $1 + 0 > 0$, $\Delta c_{24} = -1$;

(i-j) = (3-1), $1 + 1 > 0$, $\Delta c_{31} = -2$;

(i-j) = (3-2), $1 + 2 > 2$, $\Delta c_{32} = -1$.

Отже, за трьома клітинам умова (2) не виконується, отже, початковий план вимагає поліпшення. Найбільшу економію можна отримати по клітці (i-j) = (3-1), де $\Delta c_{31} = -2$, так як дане значення більше за абсолютною величиною інших оцінок $\{\Delta c_{24} = -1;\ \Delta c_{32} = -1\}$. Отже, клітку (3-1) необхідно завантажити за рахунок перерозподілу ресурсів з інших завантажених клітин. У табл. 2 клітку (3-1) помічаємо знаком «+», так як тут в початковому плані знаходиться вершина максимальної неоптимальности.

Контур перерозподілу ресурсів становлять за такими правилами:

– цей контур представляє замкнутий багатокутник з вершинами в завантажених клітинах, за винятком клітини з вершиною максимальної неоптимальности «+», і ланками, що лежать уздовж рядків і стовпців матриці;

– ламана лінія повинна бути пов'язаною в тому сенсі, що з будь-якої її вершини можна потрапити в будь-яку іншу вершину по ланках ламаної ланцюга (по рядку або по стовпцю);

– в кожній вершині контуру зустрічаються тільки дві ланки, одне з них розташовується по рядку, інше - по стовпцю;

– число вершин контуру парне, всі вони в процесі перерозподілу діляться на завантажувані (З) і розвантажуються (Р);

– в кожному рядку (стовпці) є дві вершини: одна - завантажується, інша-розвантажувати.

У клітці максимальної неотімальності намічаємо одну з вершин контуру і далі по вищевикладеним правилам будуємо контур, вершини якого будуть перебувати в клітинах (3-1) - (1-1) - (1-2) - (2-2) - (2 3) - (3-3). Вершини контуру послідовно розділяємо на завантажувані (3) і розвантажуються (Р), починаючи з вершини максимальної неоптимальности «+» (табл. 2).

Перерозподіл ресурсів по контуру здійснюється з метою отримання оптимального плану. У процесі перерозподілу ресурсів по контуру відповідно до умовою невід'ємності змінних x_{ij} жодне з цих значень не повинно перетворитися на негативне число. Тому аналізують тільки клітини, помічені знаком Р, з яких вибирають клітку з мінімальним обсягом перевезень. У нашому прикладі Xmin = min {40; 40; 40} = 40. Отже, клітини (1-1), (2-2), (3-3) повністю розвантажуються. У клітці (1-2) завантаження збільшиться на 40 і досягне 60, в клітці (2-3) завантаження складе 40 + 40 = 80, і клітина (3-1) завантажиться на 40 (табл. 3).

Таблиця 3. Перший план перевезень

Поставщики	Потребители				Запасы	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 0	2 60	3	4	60	0
A_2	4	3	2 80 P 3	⊕ 0	80	–1
A_3	0 40	2	2 0 3	1 P 60	100	–1
Потребность	40	60	80	60	240	
β_j	1	2	3	2		

Перевіряємо умова не вирожденість число рівнянь N = m + n-1 має бути рівно кількості змінних (числу завантажених клітин). У нашому прикладі m = 3, n = 4, а число завантажених клітин дорівнює 4, тобто умова не виконується і 6 $\neq$ 4. У процесі перерозподілу ресурсів відбулася повна розвантаження трьох клітин, а повинна звільнитися тільки одна клітина. В цьому випадку слід в дві клітини проставити нулі (нульовий ресурс) і вважати умовно їх завантаженими. Наприклад, в клітини (1-1) і (3-3) проставимо нульовий ресурс (рис. 3).

За результатами першої ітерації маємо

$Z_1 = 2 \times 60 + 2 \times 80 + 1 \times 60 + 0 \times 40 = 340.$

Отримання чергового плану (ітерації) здійснюється в тому ж порядку, який був розглянутий вище, тобто:

– по завантаженим клітинам (відповідно до новим завантаженням) обчислюються потенціали αi і βj;

– по незавантаженим клітинам проводиться перевірка плану на оптимальність;

– знаходиться вершина максимальної неоптимальности і будується новий контур перерозподілу і т. д., до тих пір, поки не буде знайдено оптимальне рішення, яке задовольняє нерівності (2).

Нижче наведені розрахунки по другій ітерації. Пошук потенціалів для першого плану наступний:

$\alpha_1 + \beta_1 = 1,\ 0 + \beta_1 = 1,\ \beta_1 = 1;$

$\alpha_1 + \beta_2 = 2,\ 0 + \beta_2 = 2,\ \beta_2 = 2;$

$\alpha_3 + \beta_1 = 0,\ \alpha_3 + 1 = 0,\ \alpha_3 = -1;$

$\alpha_3 + \beta_3 = 2,\ -1 + \beta_3 = 2,\ \beta_3 = 3;$

$\alpha_2 + \beta_3 = 1,\ \alpha_2 + 3 = 2,\ \alpha_2 = -1;$

$\alpha_3 + \beta_4 = 1,\ -1 + \beta_4 = 1,\ \beta_4 = 2.$

Проведемо перевірку на оптимальність першого плану:

(I-j) = (1-3), $0 + 3 \leq 3$;

(I-j) = (1-4), $0 + 4 <4$;

(I-j) = (2-1), $-1 + 1 <4$;

(I-j) = (2-2), $-1 + 2 <3$;

(I-j) = (3-2), $-1 + 2 <2$;

(I-j) = (2-4), $-1 + 2> 0$.

Клітку (2-4) необхідно завантажити. Відповідно до перерозподілом ресурсів по контуру отримуємо табл. 4, для якої знову розраховуємо потенціали αі і βj, і послідовність обчислень повторюється.

Таблиця 4. Оптимальний план перевезень

Поставщики	Потребители				Запасы	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 0	2 60	3	4	60	0
A_2	4	3	2 20	0 60	80	−1
A_3	0 40	2	2 60	1	100	−1
Потребность	40	60	80	60	240	
β_j	1	2	3	1		

Для розподілу, отриманого в табл. 4, умова (2) виконується, отже, план - оптимальний.

Транспортні витрати по оптимальному плану наступні:

$Z_2 = 1 \times 0 + 2 \times 60 + 2 \times 20 + 0 \times 60 + 0 \times 40 + 2 \times 60 = 280.$

Таким чином, побудовою початкового плану з подальшим розрахунком двох ітерацій отримано оптимальне рішення по закріпленню пунктів відправлення вантажів до пунктів призначення. Однак розглянута задача є класичною транспортної завданням і в економіці підприємства такі завдання зустрічаються вкрай рідко. Зазвичай при складанні економіко-математичної моделі в задачі транспортного типу доводиться вводити цілий ряд додаткових обмежень, а потім її вирішувати методом потенціалів.

3. Завдання ЛП управління запасами для індивідуального вирішення

Виконати рішення задач відповідно до свого варіанта:

1) методом потенціалів;

2) із застосуванням прикладних програм Excel.

Скласти план перевезень з найменшою загальною вартістю від трьох постачальників до п'яти споживачам (табл. 5, 6).

Запаси постачальників відповідно **а1, а2, а3** од. продукції.

Попит споживачів відповідно **в1, в2, в3**, **в4, в5** од. продукції.

Вартість перевезення одиниці вантажу від **і**-ого постачальника до j-ого споживачеві становить c_{ij} $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,5})$ ум. од.

Таблиця 5

Варіант	*а1*	*а2*	*а3*	*в1*	*в2*	*в3*	*в4*	*в5*
1	150	150	200	100	70	130	110	90
2	280	220	300	190	140	180	120	170
3	200	250	150	120	180	110	90	100
4	350	400	250	180	230	240	170	180
5	250	250	200	100	120	90	190	200
6	250	200	230	160	120	100	150	150
7	300	300	400	160	160	180	220	280
8	250	350	400	200	170	190	210	230
9	200	150	150	90	100	70	130	110
10	300	280	220	180	140	190	150	140

Варіант	***а1***	***а2***	***а3***	***в1***	***в2***	***в3***	***в4***	***в5***
11	250	200	180	170	120	100	110	130
12	400	250	350	200	170	230	210	190
13	150	200	180	160	70	90	80	130
14	280	300	220	170	120	200	140	170
15	250	250	200	180	120	100	190	110
16	250	400	350	300	160	240	200	200
17	220	400	280	160	180	170	250	140
18	160	400	240	170	190	140	200	100
19	300	330	370	190	160	250	200	200
20	280	340	280	170	180	190	240	120
21	500	600	300	350	350	200	400	100
22	600	400	700	600	300	400	200	300
23	300	600	600	500	300	200	200	300
24	350	700	500	500	250	250	400	150
25	450	650	350	600	150	200	300	200
26	300	400	700	600	300	100	250	150
27	700	700	600	400	600	350	250	400
28	500	400	900	600	500	200	200	300
29	700	400	1000	680	320	200	500	400
30	850	250	900	650	200	750	150	250

Таблиця 6

Варіант	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
1	10	4	2	3	1	8	9	8	7	4	4	2	6	8	7
2	6	4	2	3	1	8	9	8	7	4	5	2	6	8	7
3	10	4	3	1	6	8	9	7	4	8	4	2	8	7	5
4	10	2	3	1	6	8	8	7	4	8	4	6	8	7	5
5	10	4	2	3	6	8	9	8	7	8	4	2	6	8	5
6	6	8	5	4	2	3	9	7	1	5	10	4	2	3	6
7	9	5	1	6	3	7	10	4	8	5	7	3	7	5	2
8	4	2	3	5	4	5	7	5	6	2	2	6	8	9	8
9	8	1	6	3	3	8	4	8	5	6	4	7	5	2	10
10	2	3	1	3	3	6	7	4	3	8	7	8	7	3	10
11	12	8	15	23	21	10	9	17	5	16	8	11	19	10	4
12	6	13	14	18	14	25	14	7	5	16	11	4	10	18	9
13	20	17	13	2	17	6	10	9	4	15	3	7	13	6	23
14	7	9	16	10	16	13	12	18	12	20	19	15	10	13	13
15	6	11	10	14	18	17	6	4	11	9	12	8	19	10	13
16	14	11	9	13	18	6	5	14	4	14	7	19	11	6	13
17	13	7	16	4	11	20	9	6	10	9	2	4	7	3	6
18	5	13	18	17	8	6	10	15	6	3	24	21	9	16	17
19	9	6	17	11	8	13	4	9	5	7	6	7	14	10	6
20	7	3	9	15	3	3	10	12	20	46	15	11	16	19	48
21	20	3	9	15	35	14	10	12	20	46	25	11	16	19	45
22	9	15	35	20	7	15	35	12	11	6	16	19	40	15	25
23	14	6	4	9	4	17	10	9	11	5	15	11	6	13	8
24	28	12	7	18	7	35	14	18	15	3	30	16	11	25	15
25	8	20	7	11	16	4	14	12	15	17	15	22	11	12	19

Варіант	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
26	13	9	5	11	17	14	5	12	14	22	20	17	13	18	21
27	12	8	21	10	15	13	4	15	13	21	19	16	26	17	20
28	19	21	9	10	16	13	15	11	13	21	19	26	12	17	20
29	12	15	21	14	17	14	8	15	21	31	19	16	26	12	20
30	14	6	4	9	4	17	10	9	11	5	15	11	6	13	6

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 6. Цілочисельне лінійне програмування

Практичне заняття №5. Рішення завдань цілочисельного лінійного програмування

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Приклад рішення задачі ЦЛП методом Гоморі
2. Приклад рішення задачі ЦЛП методом гілок і меж
3. Індивідуальні завдання ЦЛП

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклад рішення задачі ЦЛП методом Гоморі

Суть *методу відсікання*, запропонованого Р.Е. Гоморі в 1957-1958гг, полягає в тому, що спочатку завдання вирішується без умови цілечисельності. Якщо отриманий план цілочисельний, задача вирішена. В іншому випадку до обмежень задачі додається нове обмеження, що володіє наступними властивостями: воно повинно бути лінійним; має відсікати знайдений оптимальний нецілочисельний план; не повинно відсікати жодного цілочисельного плану.

Додаткове обмеження, що володіє вказаними властивостями, називається *правильним відсіканням*. Далі завдання вирішується з урахуванням нового обмеження. Після цього в разі потреби додається ще одне обмеження тощо.

Геометрично додавання кожного лінійного обмеження відповідає проведенню прямої (гіперплощині), яка відсікає від багатокутника (багатогранника) рішень деяку його частину разом з оптимальною точкою з нецілі координатами, але не зачіпає жодної з цілих точок цього багатогранника. В результаті новий багатогранник рішень містить всі цілі точки, які полягали в первісному багатограннику рішень, і відповідно отримане при цьому багатограннику оптимальне рішення буде цілочисельним (рис. 1, простір допустимих рішень задачі цілочислового лінійного програмування представлено точками).

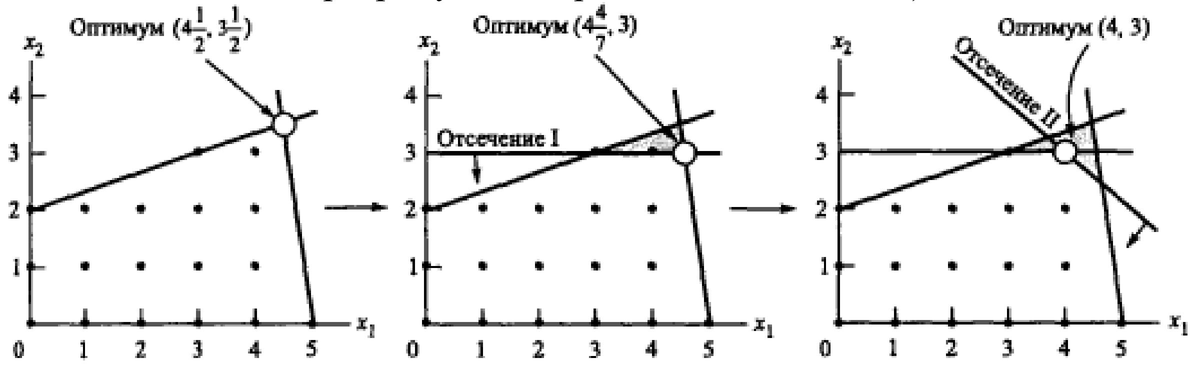


Рис. 1. Послідовність побудови відсікань

У загальному випадку може знадобитися будь-яке (кінцеве) число відсікань для досягнення повністю цілечисельної екстремальної точки. Насправді кількість необхідних для цього відсікань не залежить від розмірності задачі в тому сенсі, що для вирішення завдання з невеликою кількістю змінних і обмежень може знадобитися більше відсікань, ніж для завдання великої розмірності.

Метод відсікання починає роботу з вирішення безперервного завдання лінійного програмування. У симплекс-таблиці, що відповідає оптимальному вирішенню завдання лінійного програмування, слід вибрати одну з рядків, для якої базисна змінна нецілочисельна.

Шукане відсікання будується на підставі дрібних складових коефіцієнтів виробляючого рядку. З цієї причини його називають *дробовим відсіканням*.

Якщо ж в оптимальному плані задачі ЛП (1) - (3) деяка змінна має неціле значення, то використовуючи нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{a_{ij}^{*}\right\}x_j \geq \left\{b_i^{*}\right\}, \qquad (4)$$

знаходимо рішення задачі (1) - (4).

У нерівності (4) a_{ij}^{*} і b_i^{*} - перетворені вихідні величини a_{ij} і b_i, значення яких взяті з останньої симплекс-таблиці (з оптимального плану без урахування цілечисельності), а $\left\{a_{ij}^{*}\right\}$ й $\left\{b_i^{*}\right\}$- дробові частини чисел. Під дробової частиною числа k розуміється різниця k - [k], де [k] - ціла частина числа k. Під цілою частиною числа k розуміється найбільше ціле число, яке не перевищує k.

Розглянемо наступний приклад:

{3.2} = 3.2 – [3.2] = 3.2 – 3 = 0.2;

{-3.2} = -3.2 – [-3.2] = -3.2 – (-4) = 0.8.

Якщо в оптимальному плані задачі (1) - (3) дробові значення приймають декілька змінних, то додаткове нерівність (4) формується виходячи з рядка підсумкової симплекс-таблиці, відповідної найбільшої дробової частини цих змінних.

Якщо в знайденому плані задачі (1) - (4) змінні приймають нецілі значення, то знову додають одне додаткове обмеження, і процес обчислень повторюють.

Провівши кінцеве число ітерацій, або отримують оптимальний план задачі цілочислового програмування, або встановлюють її нерозв'язність.

Розглянемо реалізацію методу Гоморі на наступному прикладі.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max, \qquad (5)$$

за умов

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 13; \\ x_1 - x_2 &\leq 6; \\ -3x_1 + x_2 &\leq 9; \\ x_1, x_2 &\geq 0; \\ x_1, x_2 &- \text{цілі числа.} \end{aligned} \qquad (6)$$

Наводячи попередньо завдання (5) - (6) до канонічного вигляду і не звертаючи уваги на умови цілечисельності змінних, знайдемо оптимальне рішення симплекс-методом.

Таблиця 1.

Базисні змінні	Змінні					Права частина b	Відносини: b / елемент ведучого стовпчика
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	1	1	1	0	0	13	13
s_2	1	-1	0	1	0	6	6

s_3	- 3	1	(	(	1	9	-3
F	- 3	- 2	(	(	(	0	

Таблиця 2.

Базисні змінні	Змінні					Права частина b	Відносини: b / елемент ведучого стовпчика
	1	2	1	2	3		
s_1				1		7	3.5
x_1		1				6	-6
s_3		2				27	-13.5
F		5				0	

Таблиця 3.

Базисні змінні	Змінні					Права частина b	Відносини: b / елемент ведучого стовпчика
	1	2	1	2	3		
x_2			.5	0.5		3.5	
x_1			.5	.5		9.5	
s_3						34	
F			.5	.5		0	

Отримане рішення $x_1 = 9.5$ і $x_2 = 3.5$ ($F_{max} = 35.5$) є оптимальним, але змінні x_1 і x_2 мають нецілочисельне значення.

Знайдемо дробові частини цих чисел: $\{x_1\}=\{9.5\}=0.5$; $\{x_2\}=\{3.5\}=0.5$. Дробові частини однакові, тому можна сформувати додаткове обмеження для всіх змінних, наприклад для x_2.

З останньої симплекс-таблиці для рядка, що відповідає x_2 отримуємо

$$1x_2 + 0.5s_1 - 0.5s_2 \le 3.5. \qquad (7)$$

Складемо додаткове обмеження по Гоморі:

$$\{1\}x_2 + \{0.5\}s_1 - \{0.5\}s_2 \ge \{3.5\},$$

так як

$$\{1\} = 0;\ \{0.5\} = 0.5,\ \{-0.5\} = 0.5,\ \{3.5\} = 0.5,$$

то отримаємо

$$0.5s_1 + 0.5s_2 \ge 0.5 \ \text{ або } \ s_1 + s_2 \ge 1. \qquad (8)$$

Наведемо обмеження (8) до канонічного вигляду, ввівши штучну змінну:

$$s_1 + s_2 - s_4 = 1. \qquad (9)$$

Додамо обмеження (9) до вихідної задачі, і нове завдання вирішимо симплекс-методом. Це завдання має оптимальний план $x_1 = 9$ і $x_2 = 4$ (= 35). Цей план є рішенням вихідної задачі цілочисельного програмування (1) - (3), так як обидві змінні мають цілі значення.

2. Приклад рішення задачі ЦЛП методом гілок і меж

Метод гілок і меж - один з комбінаторних методів. Вперше метод гілок і меж був запропонований в 1960 році А. Лендом і Дж. Дойг для вирішення цілочислових задач лінійного програмування. Його суть полягає в упорядкованому переборі варіантів і розгляді лише тих

Метод гілок і меж полягає в наступному: безліч припустимих рішень (планів) деяким способом розбивається на підмножини, кожне з яких цим же способом знову розбивається на підмножини. Процес триває до тих пір, поки не отримано оптимальне цілочисельне рішення вихідної задачі [2].

Розгалуження проводиться послідовним введенням додаткових обмежень. Нехай x_k - целочисленная змінна, значення якої в оптимальному рішенні вийшло дробовим. Інтервал $[x_k] \le x_k \le [x_k]+1$ не містить цілочислових компонентів рішення. Тому допустиме ціле значення x_k повинно відповідати одній із зазначених нерівностей $x_k \ge [x_k]+1$ або $x_k \le [x_k]$. Це і є додаткові обмеження. Введення їх в методі гілок і меж на кожному кроці породжує дві не зв'язані між собою підзадачі. Кожна подзадача вирішується як завдання лінійного програмування з вихідної цільової функцією. Після кінцевого числа кроків буде знайдено цілечисельну оптимальне рішення.

Застосування методу гілок і меж розглянемо на конкретному прикладі.

Методом гілок і меж знайти максимальне значення функції

$F(x) = 2x_1 + 3x_2$

при обмеженнях

$3x_1+4x_2 \le 24$

$2x_1+5x_2 \le 22$

$x_{1,2} \ge 0$ – цілі

Крок 1. Вирішується задача лінійного програмування без умов цілочисельності змінних за допомогою симплекс-методу. Результатом рішення є:

$x^*_1=4\frac{4}{7}$; $x^*_2=2\frac{4}{7}$; $F_{max}=16\frac{6}{7}$.

Графічна інтерпретація завдання наведена на рис. 2. Тут область допустимих рішень (ОДР) представлена чотирикутником ABCD, а координати вершини C збігаються з x^*_1 і x^*_2. Обидві змінні в оптимальному рішенні є нецілі, тому будь-яка з них може бути обрана в якості змінної, яка ініціює процес розгалуження.

Нехай це буде x_2. Вибір x_2 породжує дві підзадачі (2 і 3), одна з них виходить шляхом додавання обмеження $x_2 \ge 3$ до вихідної задачі, а інша - шляхом додавання обмеження $x_2 \le 2$. При цьому ОДР розбивається на дві заштриховані області, а смуга значень $2 < x_2 < 3$ виключається з розгляду. Однак безліч допустимих цілочислових рішень зберігається, породжені підзадачі містять всі цілочисельні рішення вихідної задачі.

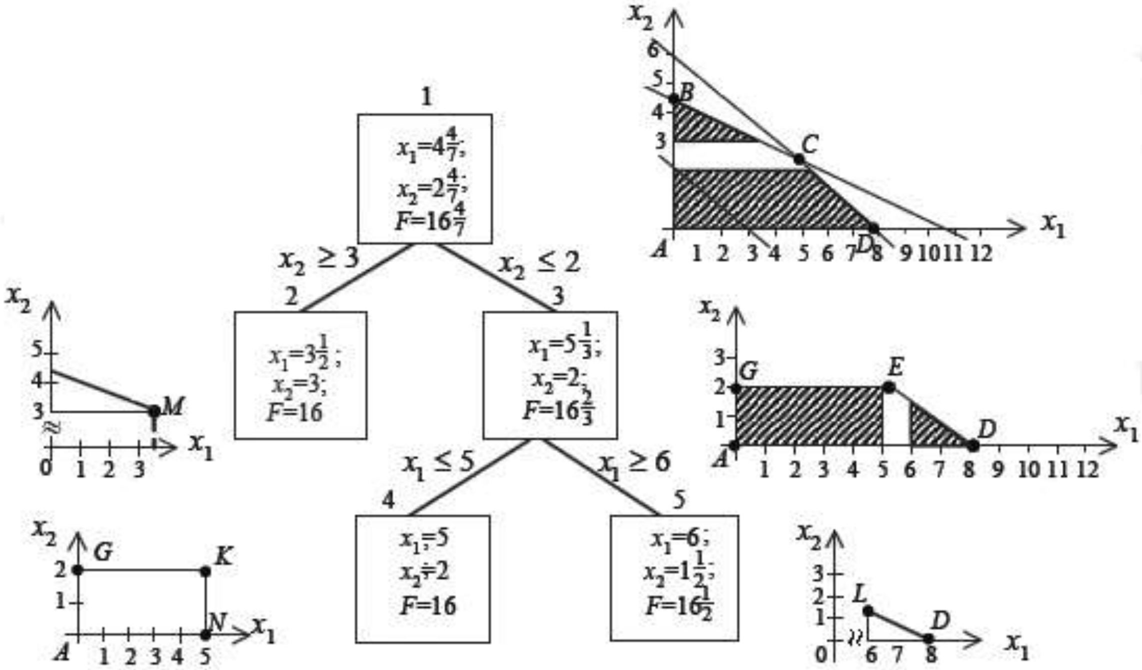


Рис. 2. Графічна інтерпретація рішення задачі методом гілок і меж

Крок 2. Здійснюється вибір однієї з позначених раніше підзадач. Не існує точних методів визначення, який з підзадач віддати перевагу. Випадковий вибір призводить до різних послідовностей підзадач і, отже, до різних кількостей ітерацій, що забезпечують отримання оптимального рішення.

Нехай спочатку вирішується подзадача 3 з додатковим обмеженням $x_2 \leq 2$. В результаті застосування симплекс-методу отримано рішення: $x_1=5\frac{1}{3}$; $x_2 = 2$; Fmax = $16\frac{2}{3}$.

Мінлива x_1 неціла, тому розгалуження необхідно продовжити; при цьому виникають підзадачі 4 і 5 з обмеженнями $x_1 \leq 5$ і $x_1 \geq 6$ відповідно. Смуга значень $5 < x_1 < 6$ виключається з розгляду.

Крок 3. Вирішуються підзадачі 4 і 5. З рис. 2 видно, що оптимальне цілочисельне рішення підзадачі 4 досягається в вершині К з координатами $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, проте це не означає, що знайдений оптимум вихідної задачі. Причиною такого висновку є ще не вирішені підзадачі 2 і 5, які також можуть дати цілочисельні рішення. Знайдене целочисленное рішення F = 16 визначає нижню межу значень цільової функції, тобто менше цього значення воно бути не повинно.

Підзадача 5 передбачає введення додаткового обмеження $x_1 \geq 6$ в підзадачу 3. Графічне рішення на рис. 2 визначає вершину L з координатами $x_1 = 6$, $x_2 = 3/2$, в якій досягається оптимальне рішення підзадачі 5: Fmax = 16.5. Подальше розгалуження в цьому напрямку здійснювати недоцільно, так як більшого, ніж 16, цілого значення функції мети отримати неможливо. Розгалуження підзадачі 5 в кращому випадку призведе до іншого целочисленному рішенням, в якому F = 16.

Крок 4. Досліджується подзадача 2 з обмеженням $x_2 \geq 3$, знаходиться її оптимальне рішення, яке відповідає вершині М (рис. 2) з координатами $x_1 = 3.5$, $x_2 = 3$. Значення функції мети при цьому Fmax = 16, яке не перевищує знайденого раніше рішення. Таким чином, пошук вздовж гілки $x_2 \geq 3$ слід припинити.

Відзначимо, що алгоритм методу гілок і меж є найбільш надійним засобом вирішення цілочислових задач, він покладений в основу більшості прикладних програм для комп'ютерів, що використовуються для цих цілей.

3. Індивідуальні завдання ЦЛП

1) $$\begin{aligned}&F_{max} = -2x_3 + 2x_4 + x_5\\&x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4{,}55\\&x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2{,}5\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&F_{max} = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 10x_5\\&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \ge 9{,}3\\&2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5 \le 10{,}6\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 \le 14{,}3\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5\\&x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 \le 9{,}54\\&x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 \le 25{,}18\\&x_3 + x_4 + x_5 \le 3{,}63\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&F_{max} = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + x_5\\&x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 \le 28{,}1\\&x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16{,}2\\&x_4 + 2x_5 \le 12{,}75\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}&F_{max} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4\\&x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_6 = 1{,}78\\&2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4{,}58\\&4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 8{,}35\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6,7\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 2x_4 + 1{,}2x_6\\&2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 \le 7{,}5\\&x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \ge 2{,}6\\&x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \le 5{,}2\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6\end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5\\&x_1 + x_2 + 2x_4 \le 10{,}3\\&x_2 + x_3 + 2x_5 \le 12{,}1\\&x_3 + x_4 + 2x_5 \le 5{,}7\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned}&F_{max} = 2x_1 - x_2 + 3x_4\\&x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \le 6{,}78\\&2x_1 - x_2 \le 4{,}69\\&x_1 + 2x_2 \le 7{,}12\\&-x_1 + 2x_4 \le 5{,}94\\&-2x_3 + x_4 \le 8{,}1\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4\end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5\\&x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 \le 9{,}54\\&x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 \le 25{,}18\\&x_3 + x_4 + x_5 \le 3{,}63\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5\\&3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \le 10{,}5\\&6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \le 20{,}3\\&10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 \le 30{,}1\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5\\&x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5{,}37\\&x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8{,}79\\&x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6{,}12\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned}&F_{max} = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 15{,}7\\&3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_5 \le 18{,}9\\&-5x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 \le 20{,}8\\&x_3 + 2x_4 + 5x_5 \le 15{,}1\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

13)
$$\begin{aligned}&F_{max} = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5\\&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \le 9{,}3\\&2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5 \le 10{,}6\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 \le 14{,}3\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

14)
$$\begin{aligned}&F_{max} = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 + 4x_5\\&2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 5{,}79\\&x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 8{,}59\\&-x_1 + 4x_2 + x_4 \le 1{,}67\end{aligned}$$

15)
$$\begin{aligned}&F_{max} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 5x_6\\&x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 + x_6 \le 4{,}47\\&x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 5x_5 \le 8{,}12\\&x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 10x_5 + 5x_6 \le 18{,}69\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6\end{aligned}$$

16)
$$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + 2{,}1x_3 + 2{,}6x_4 + 2x_5\\&3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10{,}5\\&6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \le 20{,}3\\&10x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 30{,}7\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

17)
$$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5\\&x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 \le 9{,}78\\&x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 \le 5{,}1\\&3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 3{,}12\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

18)
$$\begin{aligned}&F_{max} = 1{,}1x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}3x_3 + x_4 + 0{,}2x_5\\&x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 \le 7{,}32\\&x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 6{,}25\\&2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \le 7{,}47\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

19)
$$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + 1{,}1x_2 + x_3 + 2{,}1x_4\\&x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le 6{,}93\\&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 10{,}21\\&2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 \le 13{,}74\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

20)
$$\begin{aligned}&F_{max} = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6\\&2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 15{,}1\\&x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 0{,}3\\&x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 22{,}1\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6\end{aligned}$$

21)
$$\begin{aligned}&F_{max} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\\&x_1 + x_2 + 2x_4 \le 4{,}76\\&-x_2 + x_3 + 2x_5 \le 2{,}93\\&-x_3 + x_4 + 2x_5 \le 1{,}89\\&x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5\end{aligned}$$

22)
$$F_{max} = x_1 + 1{,}2x_2 + 3x_3 + x_4 + 1{,}1x_5 + x_6$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_6 = 9{,}3$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3{,}5$$
$$x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 1{,}01$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6$$

23)
$$F_{max} = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 + 2x_6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 + 3x_6 \le 17{,}63$$
$$x_2 + 8x_4 - x_5 + x_6 \le 6{,}25$$
$$4x_2 + x_3 + x_5 \le 12{,}83$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6$$

24)
$$F_{max} = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 4{,}9$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 13{,}3$$
$$-x_1 + 4x_2 + x_4 \le 31{,}2$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5$$

25)
$$F_{max} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5$$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 \le 4{,}55$$
$$x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 11{,}3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \le 5{,}74$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5$$

26)
$$F_{max} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 + x_6$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 \le 11{,}5$$
$$x_1 + 2x_3 + x_5 \le 7{,}56$$
$$3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \le 5{,}2$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6$$

27)
$$F_{max} = 1{,}2x_1 + 2x_2 + 1{,}1x_3 + x_4$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 13{,}7$$
$$2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 11{,}9$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \le 11{,}7$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5$$

28)
$$F_{max} = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2x_6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 + 3x_6 \le 17{,}6$$
$$4x_2 + x_3 + x_5 \le 12{,}83$$
$$x_2 + 8x_4 - x_5 + x_6 \le 6{,}25$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6$$

29)
$$F_{max} = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + x_5$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \le 28{,}1$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16{,}2$$
$$x_2 + 4x_4 + 2x_5 \le 12{,}75$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5$$

30)
$$F_{max} = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 - x_8$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 6x_6 + 2x_7 - x_8 = 9{,}01$$
$$3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 + 11x_6 + 3x_7 + 2x_8 = 30{,}02$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 + 6x_6 + 2x_7 - 3x_8 = 22{,}01$$
$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

Список цілочисельних змінних

1)

1	2	3	4	5
R	R	I	I	R

2)

1	2	3	4	5
I	I	I	R	R

3)

1	2	3	4	5
I	R	I	R	I

4)

1	2	3	4	5
I	R	R	I	R

5)

6)

1	2	3	4	5	6
R	R	I	I	I	R

1	2	3	4	5	6
I	I	I	R	R	R

7)

8)

1	2	3	4	5
I	R	R	I	I

1	2	3	4
I	I	R	I

9)

10)

1	2	3	4	5
I	R	I	R	I

1	2	3	4	5
R	I	R	I	I

11)

12)

1	2	3	4	5
I	I	R	R	R

1	2	3	4	5
R	I	R	R	I

13)

14)

1	2	3	4	5
I	I	R	R	R

1	2	3	4	5
I	I	R	R	I

15)

16)

1	2	3	4	5	6
I	R	R	R	R	I

1	2	3	4	5
R	I	R	I	R

17)

18)

1	2	3	4	5
I	I	R	I	R

1	2	3	4	5
I	I	I	I	R

19)

20)

1	2	3	4	5	6
I	R	I	R	I	R

1	2	3	4	5
I	R	R	I	R

21)

22)

1	2	3	4	5	6
I	I	I	R	R	R

1	2	3	4	5
I	R	I	R	I

23)

24)

1	2	3	4	5	6
I	R	I	R	I	R

1	2	3	4	5
I	R	I	I	R

25)

26)

1	2	3	4	5	6
I	I	R	R	I	R

1	2	3	4	5
R	R	I	I	I

27)

1	2	3	4	5	6
I	R	I	R	I	R

28)

1	2	3	4	5
I	I	I	R	R

29)

1	2	3	4	5	6	7	8
I	R	I	I	I	R	R	I

30)

1	2	3	4	5
I	R	I	I	R

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 7. Нелінійне і динамічне програмування

Практичне заняття №6. Розв'язання завдань нелінійного програмування

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Параметри інструменту Пошук рішення
2. Математична постановка задачі
3. Приклад рішення задачі нелінійного програмування
4. Індивідуальні завдання нелінійного програмування

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч.

посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/

5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf

6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Параметри інструменту Пошук рішення

Основна увага в даному розділі приділяється використанню відповідних прикладних програм для вирішення задач МП. Перш за все, це програма електронної таблиці Excel.

Як зазначалося раніше, доступ до інструмента Пошук рішення здійснюється за допомогою команди *Дані - Пошук рішення*. Дана команда відображає вікно діалогу *Параметри пошуку рішення* (рис. 1).

Перед використанням даного інструменту на аркуші електронної таблиці повинні бути сформовані цільова функція, область змінюваних осередків (невідомі), значення яких будуть знайдені в процесі рішення. Рішення (змінювані осередки) має перебувати в певних межах або відповідати певним обмеженням.

Параметри завдання обмежуються такими граничними показниками:

- кількість невідомих - 200;
- кількість формульних обмежень на невідомі - 100;
- кількість граничних умов на невідомі - 400.

У вікні діалогу *Параметри пошуку рішення* в поле *Оптимізувати цільову функцію* вказується адреса комірки з цільовою функцією. Цільова функція залежить від змінюваних осередків і пов'язана з ними деякої формулою. Оптимізується значення цільової функції до максимуму, мінімуму, або деякого певного значення. В поле *Змінюючи* осередки змінних вказується адреса блоку комірок, які і будуть рішенням.

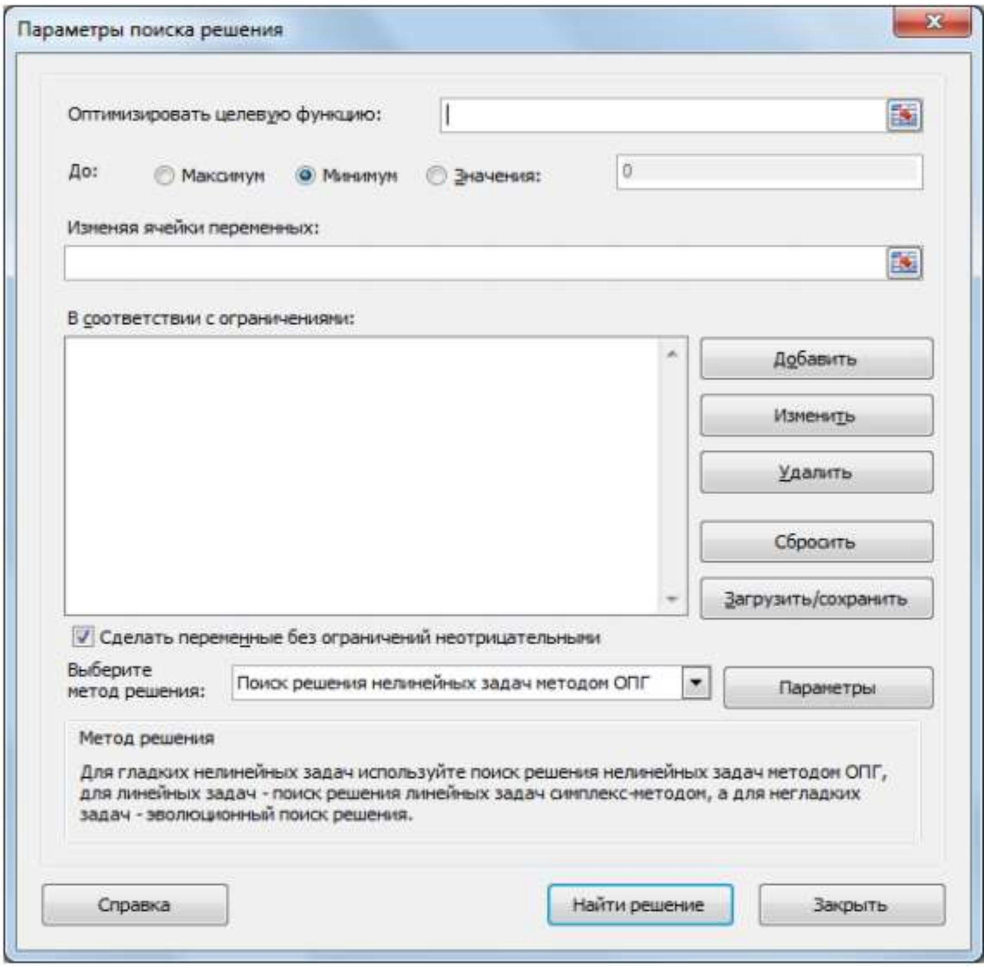


Рис. 1. Завдання параметрів пошуку рішення

В область до обмеження вводяться обмеження на рішення. Кнопки *Додати, Змінити, Видалити* керують обмеженнями, їх дії інтуїтивно зрозуміли.

Якщо в межах одного робочого листа Excel необхідно розглянути кілька моделей оптимізації (наприклад, знайти максимум і мінімум однієї функції або максимальні значення декількох функцій), то зручніше зберегти ці моделі, використовуючи кнопку *Завантажити / зберегти*. Діапазон для зберігається моделі містить інформацію про цільовій комірці, про змінюваних осередках, про кожного з обмежень і все значення вікна діалогу

Параметри. Як вибрати збережену раніше моделі для вирішення конкретної оптимізаційної задачі здійснюється також за допомогою кнопки *Завантажити / зберегти*.

Прапорець в полі *Зробити змінні без обмежень невід'ємними* дозволяє не вводити додатково обмеження на змінні комірки, якщо їх значення невід'ємні.

Пошук рішення в залежності від типу розв'язуваних завдань, дозволяє використовувати методи:

– Симплексних метод.
– Метод ОПГ (узагальненого приведеного градієнта).
– Еволюційний пошук рішення.

Метод рішення вибирається із списку *Виберіть метод вирішення* даного вікна діалогу.

Кнопка *Знайти рішення* запускає процес вирішення завдання.

Іноді в результаті виконання процедури пошуку рішення саме рішення не знаходиться, навіть якщо відомо, що рішення існує. часто цю проблему вдається вирішити, змінивши деякі параметри і повторно запустивши *Пошук рішення*. Зазначені параметри встановлюються в діалоговому вікні *Параметри* (рис. 2), яке відобразиться, якщо у вікні діалогу *Параметри пошуку рішення* вибрати кнопку *Параметри*.

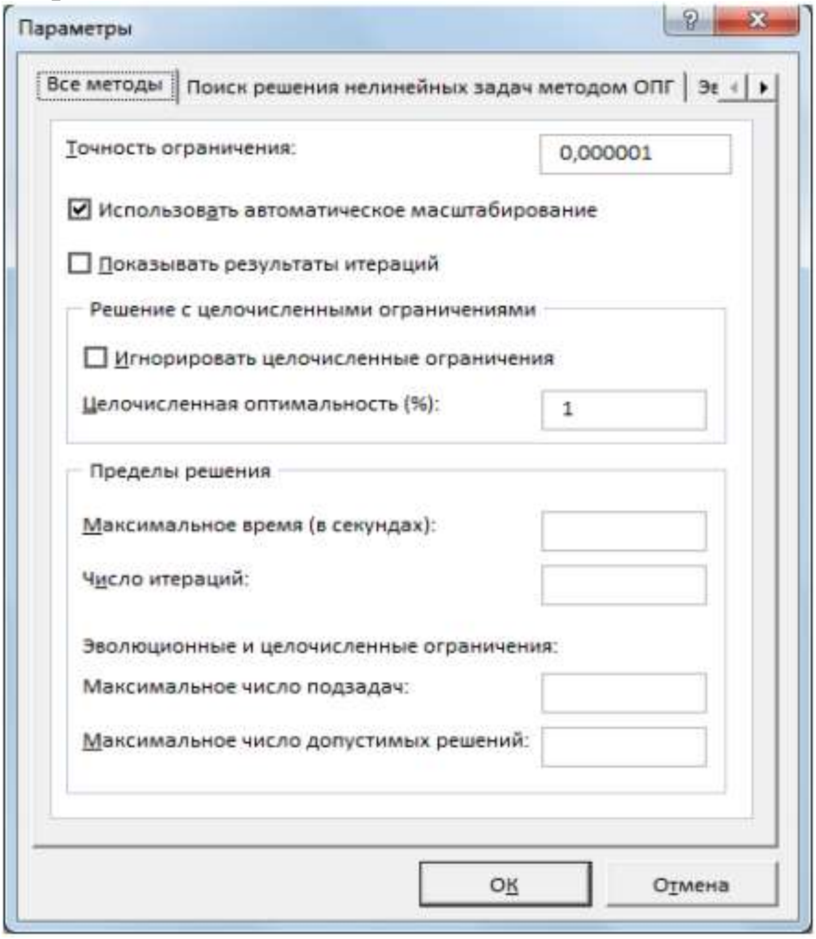


Рис. 2. Налаштування параметрів

Нижче описані основні параметри вкладки *Всі методи*.

Точність обмеження. Вказує наскільки точно виконуються обмеження. Завдання може бути вирішена швидше, якщо поставити меншу точність.

Використовувати автоматичне масштабування. Служить для автоматичної нормалізації вхідних і вихідних значень, значно різняться за величиною.

Показувати результати ітерацій. Якщо цей параметр активізований, то після виконання чергової ітерації рішення призупиняється, і відображаються знайдені результати.

Ігнорувати цілочисельні обмеження. При установці цього параметра ігноруються обмеження, що визначають, що значення мають бути цілими. Застосування цього параметра іноді дозволяє знайти рішення, яке в іншому випадку виявити не можна.

Максимальний час. Надає можливість обмежити максимальний час виконання завдання (в секундах). Якщо з'явиться повідомлення, що час на вирішення завдання минув, то його можна додати.

Число ітерацій. Використовується для введення максимального числа проміжних рішень, допустимих при пошуку рішення.

Максимальне число подзадач. Параметр призначений для вирішення складних завдань. Дозволяє задати максимальну кількість підзадач, які можуть використовуватися при застосуванні еволюційного алгоритму.

Максимальне число допустимих рішень. Параметр призначений для вирішення складних завдань. Дозволяє задати максимальну кількість прийнятних рішень, які можуть використовуватися при застосуванні еволюційного алгоритму.

Дві інші вкладки діалогового вікна *Параметри* містять додаткові параметри, які використовуються методами узагальненого приведеного градієнта і еволюційного пошуку.

2. Математична постановка задачі

Нелінійне програмування - розділ математичного програмування, що вивчає методи вирішення екстремальних задач з нелінійної цільовою функцією і (або) областю допустимих рішень, певною нелінійними обмеженнями.

Завдання нелінійного програмування полягає у визначенні максимального або мінімального значення цільової функції:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

за умови, що її змінні задовольняють співвідношенням:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, k})$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{k+1, m})$$

де f і g_i деякі функції n змінних, а bі задані числа. якщо хоча б одна з функцій f, g_i нелінійна, то відповідна задача є завданням нелінійного програмування.

3. Приклад рішення задачі нелінійного програмування

Завдання визначення оптимального плану виробництва. Відомий ринковий попит на деякий товар в кількості 180 одиниць. Цей виріб може бути виготовлено двома підприємствами одного концерну за різними технологіями.

Якщо виріб виготовляється на першому підприємстві в кількості x_1 одиниць, то витрати на його виробництво складуть $4x_1 + x^2{}_1$ грн. При виготовленні вироби в кількості x_2 одиниць на другому підприємстві витрати складуть $8x_2 + x^2{}_2$ грн.

Визначити, скільки виробів, виготовлених на різних підприємствах, може запропонувати концерн, щоб загальні витрати на його виробництво були мінімальними.

Рішення. Складемо математичну модель для рішення завдання.

Витрати виробництва при виготовленні x_1 виробів на першому підприємстві і x_2 на другому складуть:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x^2{}_1 + 8x_2 + x^2{}_2$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 180$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 – целые

Таким чином, математична модель даної задачі полягає в знаходженні значень змінних x_1, x_2, при яких функція F (x_1, x_2) приймає мінімальне значення при зазначених вище обмеження.

Створимо на робочому аркуші таблицю для введення вихідних даних (рис. 3). Заливкою виділені осередки для введення формул і виведення результату.

	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3					
4					
5	**Издержки производства**				

Рис. 3. Визначення осередків для введення формул

Блок осередків B3:C3 містить оптимальний план виробництва. Значення цих осередків буде обчислено в процесі виконання завдання.

У комірку B5 введемо формулу для цільової функції F (x1, x2) = $4x_1 + x^2_1 + 8x_2 + x^2_2$. У осередок D3 - сумарна кількість вироблених виробів. В осередок E3 - обмеження щодо попиту.

На рис. 4 показана таблиця для вирішення завдання з вихідними даними і необхідними формулами.

	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3				=B3+C3	180
4					
5	**Издержки производства**	=4*B3+B3^2+8*C3+C3^2			

Рис. 4. Визначення осередків для вихідних даних

Тепер для вирішення завдання підключаємо інструмент MS Excel 2010 опитування *Пошук рішення*. Для цього на вкладці *Дані* в групі виберемо команду *Пошук рішення*.

На екрані відобразиться діалогове вікно *Параметри пошуку рішення*, в якому встановимо наступні параметри (рис. 5):

– в поле *Оптимізувати цільову функцію* вказуємо адресу осередки зі значенням цільової функції - B5;

– вибираємо знаходження мінімуму цільової функції;

– в поле *Змінюючи* осередки змінних вказуємо адреси осередків зі значеннями шуканих змінних B3: C3;

– встановлюємо прапорець *Зробити змінні без обмежень невід'ємними*; Цей параметр дозволить виконати обмеження $x_1, x_2 \geq 0$.

– в списку *Виберіть метод* вирішення вказуємо *Пошук рішення нелінійних задач методом ОГП* (метод узагальненого приведеного градієнта для вирішення задач нелінійного програмування).

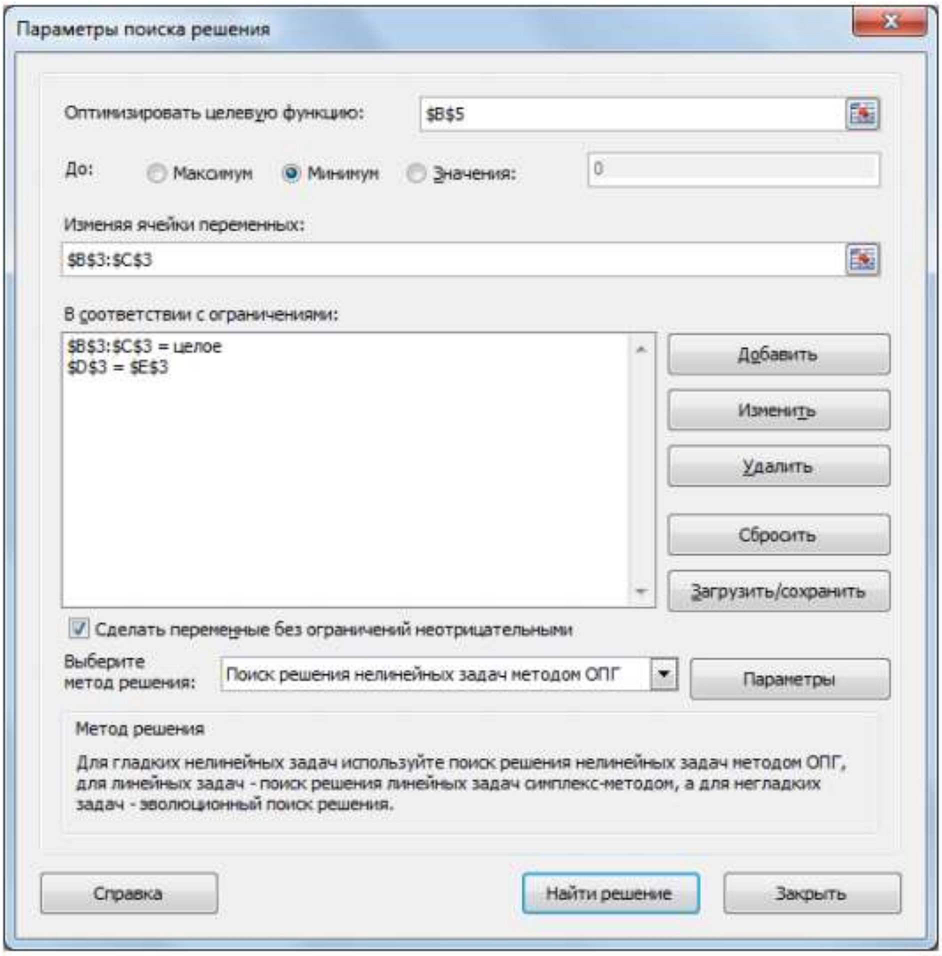


Рис. 5. Завдання вихідних даних

Тепер введемо обмеження в діалогове вікно *Параметри пошуку рішення*.

Для додавання обмеження необхідно вибрати кнопку *Додати*.

З'явиться вікно діалогу Додавання обмежень, де додаємо обмеження задачі.

Після вибору кнопки *Знайти рішення* відобразиться вікно *Результати пошуку рішення* (рис. 6).

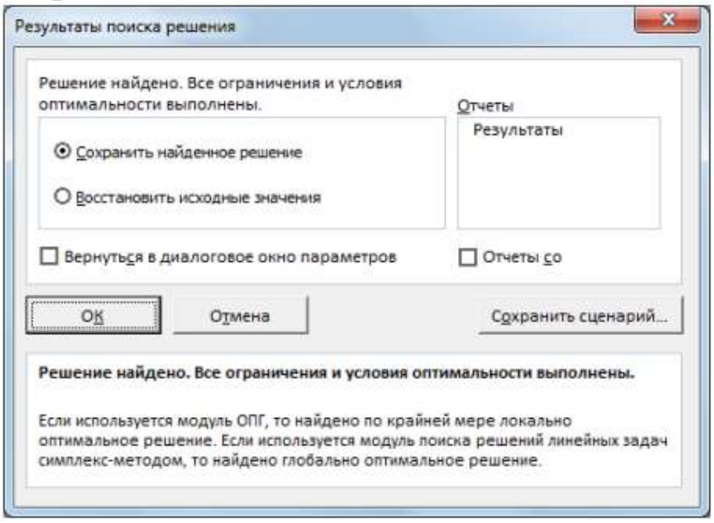


Рис. 6. Завдання параметрів пошуку

Для збереження отриманого рішення і виведення доступного звіту за результатами необхідно використовувати перемикач *Зберегти знайдене рішення*, виділити в поле *Звіти Результати і натиснути* кнопку *ОК*. Після чого на робочим аркуші відобразиться рішення задачі (рис. 7). На створеному однойменному аркуші буде виведений *Звіт про результати*.

	A	B	C	D	E
1		Объемы производства			
2		x_1	x_2	Суммарное количество изделий	Ограничение на спрос
3		91	89	180	180
4					
5	Издержки производства	17278			

Рис. 7. Результати рішення

В результаті рішення задачі отримали оптимальне рішення, при якому 91 виріб виробляється на першому підприємстві, 89 - на другому. При цьому витрати виробництва складуть 17278 р.

4. Індивідуальні завдання нелінійного програмування

1) $$\begin{aligned} & Z = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 + 0{,}5x_1x_2 \to \min \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} & Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 10x_2 \to \min \\ & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_2 \ge 2 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} & Z = -2x_1 + 3x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min \\ & 3x_1 + x_2 \le 16 \\ & -x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} & Z = -0{,}2x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \to \min \\ & 2x_1 + x_2 \ge 6{,}4 \\ & 2x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} & Z = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \min \\ & x_1 + 2x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} & Z = x_1 + x_1x_2 - x_2^2 \to \max \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 \ge 5 \\ & x_2 \ge 2 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} & Z = x_1 + 2x_2 - 2x_1x_2 + 4x_1^2 \to \min \\ & x_1 + x_2 \le 8{,}2 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_2 \le 7 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} & Z = -5x_1 + x_1^2 - 0{,}5x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 \to \min \\ & x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} &Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to \min \\ &2x_1 + x_2 \le 7{,}9 \\ &x_1 + 3x_2 \le 14{,}8 \\ &x_1 \ge 1{,}1 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} &Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_1 - 8x_2 \to \min \\ &x_1 + 3x_2 \le 12{,}2 \\ &x_1 + x_2 \ge 8{,}3 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

11) $$\begin{aligned} &Z = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 + 6x_2 \to \min \\ &x_1 - x_2 \ge 5{,}9 \\ &2x_1 + x_2 \ge 15 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned} &Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 \to \min \\ &2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ &x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

13) $$\begin{aligned} &Z = -3x_1 - 4x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 \to \min \\ &x_1 + 2x_2 \le 20 \\ &x_1 + x_2 \ge 8 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

14) $$\begin{aligned} &Z = -x_1 - x_2 + 3x_1^2 + x_2^2 \to \min \\ &x_1 + 2x_2 \le 16 \\ &x_1 + x_2 = 8 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

15) $$\begin{aligned} &Z = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2 \to \min \\ &2x_1 + 5x_2 \le 20{,}1 \\ &2x_1 - x_2 = 7{,}9 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

16) $$\begin{aligned} &Z = 5x_1 + 2x_2 + 2x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 \to \max \\ &2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ &x_1 + 2x_2 \ge 7{,}5 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

17) $$\begin{aligned} &Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min \\ &x_1 + 2x_2 \le 19{,}8 \\ &x_1 + x_2 \ge 8{,}1 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

18) $$\begin{aligned} &Z = -x_1 - 3x_2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2 \to \min \\ &x_1 + 3x_2 \le 12{,}3 \\ &x_1 + x_2 \ge 6{,}2 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

19) $$\begin{aligned} &Z = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 4x_2 \to \min \\ &x_1 - x_2 = 6 \\ &2x_1 + x_2 \ge 15{,}1 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

20) $$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + 8x_2 - x_1^2 + 2x_2^2 \to \max \\ &2x_1 + x_2 \ge 8{,}2 \\ &2x_1 + 3x_2 \le 20 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

21) $$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_1x_2 - 8x_1^2 + 3x_2^2 \to \min \\ &2x_1 - x_2 \le 9 \\ &2x_1 + 4x_2 \ge 11 \\ &x_1 \ge 0{,}2 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

22) $$\begin{aligned} &Z = 8x_1 + 5x_2 - x_1^2 - 3x_1x_2 \to \max \\ &2x_1 + 3x_2 \le 15{,}9 \\ &x_1 + 5x_2 \ge 20{,}1 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

23) $\begin{aligned}&Z = 3x_1 + 10x_2 - 2x_1^2 - 5x_2^2 - 0{,}2x_1x_2 \to \max\\&4x_1 - x_2 \le 8\\&x_1 + x_2 \le 12\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

24) $\begin{aligned}&Z = 15x_1 + 8x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2 \to \max\\&3x_1 + x_2 \le 15\\&x_1 + 2x_2 \le 10\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

25) $\begin{aligned}&Z = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 \to \min\\&x_1 + x_2 \ge 6{,}4\\&2x_1 + 3x_2 \le 18\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

26) $\begin{aligned}&Z = -2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 5x_2 \to \min\\&x_1 + x_2 = 6\\&2x_1 + x_2 \le 7{,}9\\&x_1 \ge 1{,}1\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

27) $\begin{aligned}&Z = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 5x_2 + 6x_2 \to \min\\&2x_1 + x_2 = 10\\&x_1 + 2x_2 \ge 6\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

28) $\begin{aligned}&Z = 10x_1 + 20x_2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max\\&2x_1 + x_2 \ge 10{,}2\\&3x_1 - x_2 \ge 6{,}9\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

29) $\begin{aligned}&Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_1^2 - 4x_1x_2 \to \min\\&2x_1 + x_2 \ge 2{,}3\\&3x_1 + 2x_2 \le 6\\&2x_1 \ge 1\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

30) $\begin{aligned}&Z = 2x_1 + x_2 + 6x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max\\&6x_1 - x_2 \ge 1\\&x_1 + 3x_2 \le 6\\&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 7. Нелінійне і динамічне програмування

Практичне заняття №7. Розв’язання завдання динамічного програмування

Навчальна мета заняття: вивчити можливості табличного процесора MS Excel для вирішення завдання розподілу обмежених ресурсів методом динамічного програмування.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Короткі теоретичні відомості
2. Постановка завдання динамічного програмування в загальному вигляді
3. Варіанти індивіді дуальних завдань

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.

https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf

3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf

4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/

5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf

6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Короткі теоретичні відомості

Побудова моделі динамічного програмування (ДП) і застосування методу ДП для вирішення завдання зводиться до наступного:

1) вибирають спосіб поділу процесу управління на кроки;

2) визначають параметри стану S_k і змінні управління X_k на кожному кроці;

3) записують рівняння станів;

4) вводять цільові функції k - ого кроку і сумарну цільову функцію;

5) вводять в розгляд умовні максимуми (мінімуми) $Z_k^*(S_{k-1})$ і умовне оптимальне керування на k - му кроці: $X_k^*(S_{k-1}), k=\overline{1,n}$.

6) Записують основні для обчислювальної схеми ДП *рівняння Беллмана* для і за правилом: $Z_n^*(S_{n-1})$ и $Z_k^*(S_{k-1})$

$Z_n^*(S_{n-1}) = \max\limits_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n)$, $Z_k^*(S_{k-1}) = \max\limits_{\{X_k\}}\{f_k(S_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\}, k=\overline{n-1,1}$.

7) Вирішують послідовно рівняння Беллмана (умовна оптимізація) і отримують дві послідовності функцій $\{Z_k^*(S_{k-1})\}$ и $\{X_k^*(S_{k-1})\}$

8) Після виконання умовної оптимізації отримують оптимальне рішення для конкретного стану S_0:

а) $Z_{\max} = Z_1^*(S_0)$ і

б) по ланцюжку $S_0 \Rightarrow X_1^* \rightarrow S_1^* \Rightarrow X_2^* \rightarrow S_2^* \Rightarrow \ldots \Rightarrow X_{n-1}^* \rightarrow S_{n-1}^* \Rightarrow X_n^* \rightarrow S_n^*$ оптимальне управління (рішення) $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$.

2. Постановка завдання динамічного програмування в загальному вигляді

Завдання. Планується діяльність чотирьох промислових підприємств на черговий рік. Початкові кошти: $S_0=5$ у.о. Розмири вкладення в кожне кратні 1 умовної одиниці. Засоби X, виділені k - ому підприємству ($к=1,4$), приносять в кінці року прибуток $f_k(x)$.Функції $f_k(x)$ задані табличне:

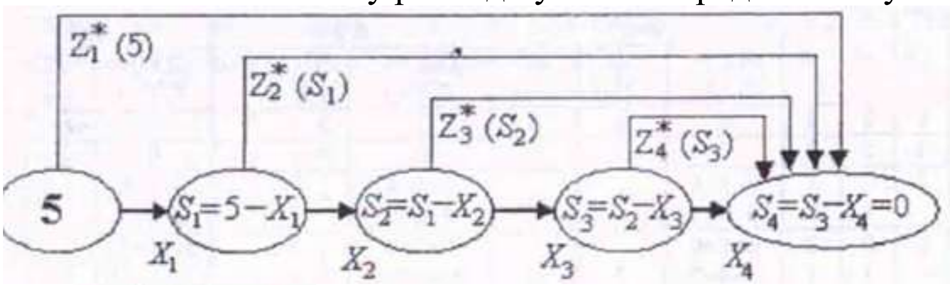
X	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$	$f_4(X)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Визначити, яка кількість коштів потрібно виділити кожному підприємству, щоб сумарний прибуток (що дорівнює сумі прибутків, отриманих від кожного підприємства), було найбільшою.

Рішення. Нехай X_k- кількість коштів, виділених k-ому підприємству. Сумарний прибуток дорівнює $Z = \sum_{k=1}^{4} f_k(X_k)$. Змінні X задовольняють обмеженням: $\sum_{k=1}^{4} X_k = 5,\ X_k \geq 0\ (k=\overline{1,4})$. Потрібно знайти змінні, що задовольняють даним обмеженням і звертають в максимум функцію Z.

Схема рішення задачі методом ДП має наступний вигляд: процес вирішення розподілу коштів $S_0=5$ можна розглядати як 4-кроковий, номер кроку збігається з номером підприємства; вибір змінних X_k - рівняння на 1, 2, 3, 4 кроки відповідно; S_4- кінцевий стан процесу розподілу - дорівнює нулю, тому що всі кошти повинні бути вкладені у виробництво, $S_4= 0$.

Рівняння станів і схем у розподілу можна представити у вигляді:



Тут $S_k = S_{k-1} - X_k, k=\overline{1,4}$ - параметр стану - кількість коштів, що залишилися після k-ого кроку, тобто кошти, які залишається розподілити між рештою ($4-k$)підприємствами.

Введемо в розгляд функцію $Z_k^*(S_{k-1})$ - умовно оптимальний прибуток, отриманий від k-го, ($k+1$)-го,..., 4-го підприємств, якщо між ними розподілялися оптимальним чином кошти $S_{k-1}\ \ (0 \le S_{k-1} \le 5)$. Рівняння на k-му кроці задовольняють умові: $0 \le X_k \le S_{k-1}$ (або k-ому підприємству нічого не виділяємо: $X_k=0$, або не більше того, що маємо до k-ому кроці: $X_k \le S_{k-1}$).

Рівняння Беллмана мають вигляд:

$$k = 4,\quad S_4 = 0 \ \Rightarrow\ Z_4^*(S_3) = \max_{0 \le X_4 \le S_3} f_4(X_4),$$

$$Z_3^*(S_2) = \max_{0 \le X_3 \le S_2} \{f_3(X_3) + Z_4^*(S_3)\},$$

$$Z_2^*(S_1) = \max_{0 \le X_2 \le S_1} \{f_2(X_2) + Z_3^*(S_2)\},$$

$$Z_1^*(5) = \max_{0 \le X_1 \le 5} \{f_1(X_1) + Z_2^*(S_1)\}$$

Рішення рівнянь здійснюється шляхом послідовної оптимізації кожного кроку.

4 крок. Всі кошти, що залишилися до 4-му кроці, слід вкласти в 4-е підприємство, оскільки згідно з таблицею $f_4(x_4)$ прибутку монотонно зростають. При цьому для можливих значень $S_3=0,1,2,3,4$ отримаємо:

$Z_4^*(S_3) = f_4(S_3),\quad X_4^*(S_3) = S_3$.

3 крок. Робимо припущення щодо залишку коштів до 3-йому кроці: S_2 може набувати значень 0,1,2,3,4,5 (S_2= 0, якщо всі засоби віддані 1-го і 2-го підприємствам і т.д.). Залежно від цього вибираємо $0 \le X_3 \le S_2$ і порівнюємо для різних X_3 при фіксованих значеннях S_2 значення суми $f_3(X_3) + Z_4^*(S_3)$. Для кожного S_2 максимальне з цих значень є $Z_3^*(S_2)$ - умовна оптимальна прибуток, отриманий при оптимальному розподілі коштів S_2 між 3-м і 4-м підприємствами. Отримані значення для $k=2$ приведені в таблиці в графах 5 і 6 відповідно.

S_{k-1}	X_k	S_k	k=3			k=2			k=1		
			$f_3(X_3)+$ $Z_4^*(S_3)$	$Z_3^*(S_2)$	$X_3^*(S_2)$	$f_2(X_2)+$ $Z_3^*(S_2)$	$Z_2^*(S_1)$	$X_2^*(S_1)$	$f_1(X_1)+$ $Z_2^*(S_1)$	$Z_1^*(S_0)$	$X_1^*(S_0)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0 1	1 0	0+4=4 3+0=3	4	0	0+4=4 6+0=6	6	1	0+6=6 8+0=8	8	1
2	0 1 2	2 1 0	0+6=6 3+4=7 4+0=4	7	1	0+7=7 6+4=10 9+0=9	10	1	0+10=10 8+6=14 10+0=10	14	1
3	0 1 2 3	3 2 1 0	0+8=8 3+6=9 4+4=8 7+0=7	9	1	0+9=9 6+7=13 9+4=13 11+0=11	13	1 2	0+13=13 8+10=18 10+6=16 11+0=11	18	1
4	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0+13=13 3+8=11 4+6=10 7+4=11 11+0=11	13	0	0+13=13 6+9=15 9+7=16 11+4=15 13+0=13	16	2	0+16=16 8+13=21 10+10=20 11+6=17 12+0=12	21	1
5	0 1 2 3 4 5	5 4 3 2 1 0	0+16=16 3+13=16 4+8=12 7+6=13 11+4=15 18+0=18	18	5	0+18=18 6+13=19 9+9=18 11+7=18 13+4=17 15+0=15	19	1	0+19=19 8+16=24 10+13=23 11+10=21 12+6=18 18+0=18	24	1

2 крок. Умовна оптимізація проведена в таблиці при k = 2. Для всіх можливих значень S_1 значення $Z_2^*(S_1)$ и $X_2^*(S_1)$ знаходяться в стовпцях 8 і 9 відповідно; перші доданки в стовпці 7 – значення $f2(X)$ взяті з умови, другі доданки взяті з шпальти 5 при $S_2=S_1-X_2$.

1 крок. Умовна оптимізація проведена в таблиці при k=1 для $S_0=5$.

Якщо $X_1=0$, то $S_1= 5$; прибуток, отриманий від чотирьох підприємств за умови, що $S_1= 5$ засобів між рештою трьома підприємствами будуть розподілені оптимально, дорівнює $f_1(0)+Z_2^*(5)=0+19=19$.

Якщо $X_1=0$, то $S_2= 4$; сумарний прибуток за умови, що S_2= 4 засобів між рештою трьома підприємствами будуть розподілені оптимально, дорівнює $f_1(0)+Z_2^*(5)=0+19=19$.

Аналогічно,

при $X_1=2$, $S_2=3$ и $f_1(2)+Z_2^*(3)=10+13=23$;

при $X_1=3$, $S_2=2$ и $f_1(3)+Z_2^*(2)=11+10=21$;

при $X_1=5$, $S_2=0$ и $f_1(5)+Z_2^*(0)=18+0=18$;

Порівнюючи отримані значення, отримаємо $Z_1^*(5)=24=Z_{\max}$ при $X_1^*=X_1^*(5)=1$.

Обчислюючи, отримаємо $S_1^*=5-1=4$, а по таблиці в стовпці 9 знаходимо $X_2^*=X_2^*(4)=2$. Далі знаходимо $S_2^*=4-2=2$, а в стовпці 6 $X_3^*=X_3^*(2)=1$. Нарешті, $S_3^*=2-1=1$ і $X_4^*=X_4^*(1)=1$. Оптимальне рішення $X^*=(1;2;1;1)$.

*Відповідь***.** Максимум сумарного прибутку дорівнює 24 у.о. за умови, що 1-го підприємству виділено на 1 у.о .; 2-го підприємству виділено 2 у.о .; 3-ому підприємству - 1 у.о .; В 4-му підприємству - 1 у.о.

Реалізація завдання в MS Excel

1. Введення вихідних даних в таблицю показаний на рис. 1.

X	f1(X)	f2(X)	f3(X)	f4(X)
0	0	0	0	0
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

			k = 3					k = 2					k = 1				
Sk-1	Xk	Sk	f3(X)	Z4(S3)	f3(X)+Z4(S3)	Z3(S2)	X3(S2)	f2(X)	Z3(S2)	f2(X)+Z3(S2)	Z2(S1)	X2(S1)	f1(X)	Z2(S1)	f1(X)+Z2(S1)	Z1(S0)	X1(S0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0															
	0	1															
1	1	0															
	0	2															
	1	1															
2	2	0															
	0	3															
3	1	2															
	2	1															
	3	0															
	0	4															
	1	3															
4	2	2															
	3	1															
	4	0															
	0	5															
	1	4															
5	2	3															
	3	2															
	4	1															
	5	0															

Рис.1. Введення вихідних даних в осередку робітничого листа MS Excel

2. Порядок заповнення елементів таблиці:

1). У осередок **E15** введемо формулу ИНДЕКС($B$3:$F$8; ПОИСКПОЗ($C15; $B$3: $B$8); G$12 + 1) і скопіюємо формулу в діапазоні осередків з E15 до E35.

2). У осередок **F15** введемо формулу

ИНДЕКС ($B$3: $F$8; ПОИСКПОЗ ($D15; $B$3: $B$8);5) і скопіюємо формулу в діапазон комірок з F15 до F35.

3). У осередок **G15**введемо формулу E15+F15 і скопіюємо формулу в діапазон: G15-G35.

4). Знаходимо максимальне значення для кожного стану від 0 до 5, для цього в клітинку **H15** введемо формулу МАКС(G15); після введення формули в осередок **H16** необхідно змінити діапазон з G16 на G 16:G17 і т.д. по всьому стовпчика до осередку H30 (рис.2,а).

	A	B	C	D	E	F	G	H
12					k	=	3	
13		Sk-1	Xk	Sk	f3(X)	Z4(S3)	f3(X)+Z4(S3)	Z3(S2)
14		1	2	3	4	5	6	7
15		0	0	0	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C15;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D15;$B$3:$B$8);5)	=E15+F15	=МАКС(G15)
16			0	1	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C16;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D16;$B$3:$B$8);5)	=E16+F16	=МАКС(G16:G17)
17		1	1	0	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C17;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D17;$B$3:$B$8);5)	=E17+F17	
18			0	2	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C18;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D18;$B$3:$B$8);5)	=E18+F18	=МАКС(G18:G20)
19			1	1	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C19;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D19;$B$3:$B$8);5)	=E19+F19	
20		2	2	0	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C20;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D20;$B$3:$B$8);5)	=E20+F20	
21			0	3	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C21;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D21;$B$3:$B$8);5)	=E21+F21	=МАКС(G21:G24)
22			1	2	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C22;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D22;$B$3:$B$8);5)	=E22+F22	
23			2	1	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C23;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D23;$B$3:$B$8);5)	=E23+F23	
24		3	3	0	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C24;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D24;$B$3:$B$8);5)	=E24+F24	
25			0	4	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C25;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D25;$B$3:$B$8);5)	=E25+F25	=МАКС(G25:G29)
26			1	3	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C26;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D26;$B$3:$B$8);5)	=E26+F26	
27			2	2	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C27;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D27;$B$3:$B$8);5)	=E27+F27	
28			3	1	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C28;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D28;$B$3:$B$8);5)	=E28+F28	
29		4	4	0	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C29;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D29;$B$3:$B$8);5)	=E29+F29	
30			0	5	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C30;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D30;$B$3:$B$8);5)	=E30+F30	=МАКС(G30:G35)
31			1	4	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C31;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D31;$B$3:$B$8);5)	=E31+F31	
32			2	3	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C32;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D32;$B$3:$B$8);5)	=E32+F32	
33			3	2	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C33;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D33;$B$3:$B$8);5)	=E33+F33	
34			4	1	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C34;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D34;$B$3:$B$8);5)	=E34+F34	
35		5	5	0	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($C35;$B$3:$B$8);G$12+1)	=ИНДЕКС($B$3:$F$8;ПОИСКПОЗ($D35;$B$3:$B$8);5)	=E35+F35	
36								
37								

Рис. 2,а. Вид робочого листа з формулами, *k*=3.

3. Знаходимо значення управління X_k, якому відповідає максимальне значення функції Z_k, для цього в клітинку **I15** введемо формулу ИНДЕКС($C15:G15; ПОИСКПОЗ (H15;G15;0);1), скопіюємо формулу в клітинку **I16** і збільшимо діапазон, в результаті в комірці **I16**отримаємо: ИНДЕКС($C16:G17,ПОИСКПОЗ (H16;G16:G17;0); 1). Далі скопіюємо формулу в комірки **I18, I21, I25, I30**, поступово збільшуючи діапазон (рис. 2,б)

	I	J	K	L
12		k	=	2
13	X3(S2)	f2(X)	Z3(S2)	f2(X)+Z3(S2)
14	8	9	10	11
15	=ИНДЕКС($C15:G15;ПОИСКПОЗ(H15;G15;0);1)			
16	=ИНДЕКС($C16:G17;ПОИСКПОЗ(H16;G16:G17;0);1)			
17				
18	=ИНДЕКС($C18:G20;ПОИСКПОЗ(H18;G18:G20;0);1)			
19				
20				
21	=ИНДЕКС($C21:G24;ПОИСКПОЗ(H21;G21:G24;0);1)			
22				
23				
24				
25	=ИНДЕКС($C25:G29;ПОИСКПОЗ(H25;G25:G29;0);1)			
26				
27				
28				
29				
30	=ИНДЕКС($C30:G35;ПОИСКПОЗ(H30;G30:G35;0);1)			
31				
32				

Рис. 2,б Права частина робочого аркуша з формулами, *k*=3

4. Виділяємо діапазон E15:I35, виконуємо команду *Копіювати*, встановлюємо курсор в осередок J15 і виконуємо команду *Вставити*.

5. Змінимо формулу функції $Z_3(S_2)$. В осередку K15, K16, K18, K21, K25, K30 введемо відповідно максимальні значення попереднього кроку, що знаходяться в осередках H15, H16, H18, H21, H25, H30. В інші осередки помістимо значення, що стоять в цьому ж стовпці і відповідні попереднім S_k:

У осередок K17 копіюємо значення осередки K15;

в осередку K19 і K20 - значення K16 і K17;

в K22:K24 – значення K18: K20;

в K26: K29 - значення K21: K24;

в K31: K35 - значення K25: K29;

В результаті отримаємо:

В результаті отримаємо:

Sk-1	Xk	Sk	f3(X)	Z4(S3)	f3(X)+Z4	Z3(S2)	X3(S2)
			k	=	3		
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	4	4	4	0
1	1	0	3	0	3		
	0	2	0	6	6	7	1
	1	1	3	4	7		
2	2	0	4	0	4		
	0	3	0	8	8	9	1
3	1	2	3	6	9		
	2	1	4	4	8		
	3	0	7	0	7		
	0	4	0	13	13	13	0
	1	3	3	8	11		
4	2	2	4	6	10		
	3	1	7	4	11		
	4	0	11	0	11		
	0	5	0	16	16	18	5
	1	4	3	13	16		
5	2	3	4	8	12		
	3	2	7	6	13		
	4	1	11	4	15		
	5	0	18	0	18		

Рис. 3. Результат виконання першого кроку (k=3)

6. Виділяємо діапазон комірок J15:N35, виконуємо команду *Копіювати*, встановлюємо курсор в осередок O15, виконуємо команду *Вставити*. В результаті отримуємо заповнену таблицю з рішенням для k=1 (рис. 5).

7. Пояснимо отримані результати: $Z_1^*(5) = 24 = Z_{max}$ при $X_1^* = X_1^*(5) = 1$. Обчислюючи, отримаємо $S_1^* = 5 - 1 = 4$, а по таблиці в стовпці 12 знаходимо $X_2^* = X_2^*(4) = 2$. Далі визначаємо $S_2^* = 4 - 2 = 2$, а з шпальти 6 $X_3^* = X_3^*(2) = 1$. Нарешті, $S_3^* = 2 - 1 = 1$ і $X_4^* = X_4^*(1) = 1$. Таким чином, оптимальне значення $X^* = (1;2;1;1)$, а значення функції F_{max}=*24* у.о., що узгоджується з даними, отриманими вручну.

X	f1(X)	f2(X)	f3(X)	f4(X)
0	0	0	0	0
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Sk-1	Xk	Sk	f3(X)	Z4(S3)	f3(X)+Z4(S3)	Z3(S2)	X3(S2)	f2(X)	Z3(S2)	f2(X)+Z3(S2)	Z2(S1)	X2(S1)
			k	=	3			k	=	2		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	4	4	4	0	0	4	4	6	1
1	1	0	3	0	3			6	0	6		
	0	2	0	6	6	7	1	0	7	7	10	1
	1	1	3	4	7			6	4	10		
2	2	0	4	0	4			9	0	9		
	0	3	0	8	8	9	1	0	9	9	13	1
3	1	2	3	6	9			6	7	13		
	2	1	4	4	8			9	4	13		
	3	0	7	0	7			11	0	11		
	0	4	0	13	13	13	0	0	13	13	16	2
	1	3	3	8	11			6	9	15		
4	2	2	4	6	10			9	7	16		
	3	1	7	4	11			11	4	15		
	4	0	11	0	11			13	0	13		
	0	5	0	16	16	18	5	0	18	18	19	1
	1	4	3	13	16			6	13	19		
5	2	3	4	8	12			9	9	18		
	3	2	7	6	13			11	7	18		
	4	1	11	4	15			13	4	17		
	5	0	18	0	18			15	0	15		

Рис. 4. Результат виконання другого кроку (k=2)

X	f1(X)	f2(X)	f3(X)	f4(X)
0	0	0	0	0
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

			k	=	3	k			=	2			k	=	1		
Sk-1	Xk	Sk	f3(X)	Z4(S3)	f3(X)+Z4(S3)	Z3(S2)	X3(S2)	f2(X)	Z3(S2)	f2(X)+Z3(S2)	Z2(S1)	X2(S1)	f1(X)	Z2(S1)	f1(X)+Z2(S1)	Z1(S0)	X1(S0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	4	4	4	0	0	4	4	6	1	0	6	6	8	1
	1	0	3	0	3			6	0	6			8	0	8		
2	0	2	0	6	6	7	1	0	7	7	10	1	0	10	10	14	1
	1	1	3	4	7			6	4	10			8	6	14		
	2	0	4	0	4			9	0	9			10	0	10		
3	0	3	0	8	8	9	1	0	9	9	13	1	0	13	13	18	1
	1	2	3	6	9			6	7	13			8	10	18		
	2	1	4	4	8			9	4	13			10	6	16		
	3	0	7	0	7			11	0	11			11	0	11		
4	0	4	0	13	13	13	0	0	13	13	16	2	0	16	16	21	1
	1	3	3	8	11			6	9	15			8	13	21		
	2	2	4	6	10			9	7	16			10	10	20		
	3	1	7	4	11			11	4	15			11	6	17		
	4	0	11	0	11			13	0	13			12	0	12		
5	0	5	0	16	16	18	5	0	18	18	19	1	0	19	19	24	1
	1	4	3	13	16			6	13	19			8	16	24		
	2	3	4	8	12			9	9	18			10	13	23		
	3	2	7	6	13			11	7	18			11	10	21		
	4	1	11	4	15			13	4	17			12	6	18		
	5	0	18	0	18			15	0	15			18	0	18		

Рис.6. Результат виконання третього кроку (k= 1)

3. Варіанти індивіді дуальних завдань

1. Планується діяльність чотирьох промислових підприємств на черговий рік. Початкові кошти $S_0=5$ у.о. Розміри вкладення в кожне підприємство кратні 1 у.о. Засоби X, виділені k-ому підприємству (k=1,5), приносить в кінці року прибуток. Функції $f_k(X)$ задані таблично:

X	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$	$f_4(X)$
1	2	10	21	0
2	9	11	25	20
3	1 0	13	29	25
4	12	14	39	30
5	2 0	18	49	40

Визначити, яка кількість коштів потрібно виділити кожному підприємству, щоб сумарний прибуток була найбільшою.

2. Планується діяльність трьох промислових підприємств на черговий рік. Початкові кошти: $S_0=9$ у.о. Розміри вкладення в кожне підприємство кратні 1 у.о. Засоби X, виділені k-ому підприємству ($k=1,3$), приносить в кінці року прибуток $f_k(X)$. Функції $f_k(X)$ задані таблично:

X	$f_1(X)$	$f_2(X)$	$f_3(X)$
1	5	7	6
2	9	9	10
3	12	11	13
4	14	13	15
5	15	16	16
6	18	19	18
7	20	21	21
8	24	22	22

9	27	25	25

Визначити, яка кількість коштів потрібно виділити кожному підприємству, щоб сумарний прибуток, було найбільшим.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 8. Системи масового обслуговування

Практичне заняття №8. Моделювання одноканальної СМО

Навчальна мета заняття: знайомство з системою імітаційного моделювання GPSS World, підготовкою завдання на моделювання, виконанням аналізу і обробкою результатів моделювання.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Система імітаційного моделювання загального застосування
2. Завдання на моделювання одноканальної СМО
3. Порядок виконання роботи

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Система імітаційного моделювання загального застосування

GPSS (General Purpose Simulation System - Система імітаційного моделювання загального застосування) призначена для опису і дослідження дискретних моделей систем масового обслуговування (СМО), а також додатково включає процедурну мову програмування PLUS (Programming Language Under – мова програмування для моделювання), який може бути використаний при побудові імітаційних моделей.

Обслуговуючи заявки, звані *транзактами*, являють собою одиниці досліджуваних потоків. Функціонування СМО представляється як процес проходження транзактів через структуру імітаційної моделі.

Студентська версія системи GPSS World Student Version може бути завантажена з сайту компанії Minuteman Software: www.minutemansoftware /download. При вивченні курсу пропонується використовувати саме цю версію системи, що не порушує авторські права розробника.

За замовчуванням система встановлюється в каталог C: \Program Files\Minuteman Software \ GPSS World Student Version. Принципи функціонування інтерфейсу системи GPSS World подібні всім Windows-додаткам. Головне вікно системи (рис. 1) включає в себе головне меню і систему випадають і спливаючих меню.

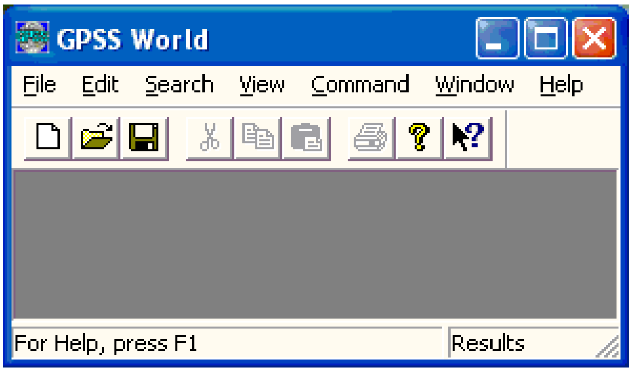


Рис. 1. Головне вікно GPSS World

Пункт головного меню File (Файл) використовується для роботи з файлами моделей і документами. Також можуть бути доступними наступні команди: New (Створити), Open...(Відкрити), Close (Закрити), Save (Зберегти), Save As ...(Зберегти як), Print... (Друк), Internet , Resent File (Останній файл), Exit (Вихід).

Пункт Edit (Редагування) містить наступні команди: Undo (Скасувати), Cut (Вирізати), Copy (Копіювати), Insert (Вставити), Insert line (Вставити рядок), Delete line (Видалити рядок), Font ... (Шрифт), Expression Window ... (Вікно вираження), Plot Window... (Вікно графіка), Insert GPSS Blocks... (Вставити блок), Insert Experiment (Вставити експеримент), Setting (Установки).

Пункт Search (Пошук) містить команди: Find/Replace (Знайти/Змінити), Go to Line (Перейти до рядка), Next Bookmark (Наступна закладка), Mark (Встановити мітку), UnMark (Видалити мітку), UnMark All (Видалити все мітки), Select to Bookmark (Виділити до позначки), Next Error (Наступна помилка), Previous Error (Попередня помилка).

Пункт View (Перегляд) містить команди, які відкривають різні вікна, панелі або меню: Notices (Повідомлення), Toolbar (Панель інструментів), Entity Details (Детальний уявлення), Simulation Clock (годинник моделювання).

Пункт Command містить команди з управління процесом трансляції та моделювання: Create Simulation (Створити здійсниму модель), Retranslate (ПеретранслІровать), Repeat Last Command (Повторити останню команду), CONDUCT (Управління - для експерименту), START (Пуск), STEP1 (Покрокове виконання), HALT (Зупинити), CONTINUE (Продовжити), CLEAR (Очистити), RESET (Скидання), SHOW ... (Показати), Custom ... (Введення команд управління користувачем).

Пункт головного меню Window (Вікно) містить команди з виведення і розміщення вікон: Cascade (Каскад), Tile (Мозаїка), Simulation Window (Вікно моделювання - спливаюче меню дозволяє вивести вікна з різною інформацію про процеси), Simulation Snapshot (Знімок моделювання).

Введення моделі може виконуватися як в режимі клавішного набору, так і за допомогою команди Insert GPSS Blocks... пункту Edit . Вибір потрібного блоку (рис.2) викликає діалогове вікно, в якому можна заповнити параметри шаблону цього блоку.

Рис. 2 Діалогове вікно вибору блоку GPSS для вставки в модель

Процедура моделювання виконується по команді Create Simulation з пункту Command головного меню.

Блок генерації транзактов.

GENERATE A,B,C,D,E

A - середній інтервал часу між послідовними надходженнями транзактів (ціле або десяткова дріб, як роздільник використовується точка);

B - розкид інтервалу часу щодо A (ціле або десяткова дріб);

C - час появи першого транзакта;

D – кількість транзактів, що генеруються;

E – пріоритет транзактів, що генеруються.

Тут доречно обумовити правила визначення модельного часу. Зазвичай таймер модельного часу на початку процесу моделювання приймають рівним нулю. Величину реального часу, відповідного одиниці модельного, вибирають з урахуванням порівнянності її з величиною періоду моделювання. Наприклад, при моделюванні обслуговування клієнтів банку за одиницю модельного часу можна прийняти 1 хв., А при моделюванні процесу капітального ремонту складного обладнання - 1 годину або 1 зміну.

Розглянемо ряд прикладів використання блоку:

`GENERATE 20,3,100,10,2` - генерація 10 заявок, що мають 2-й рівень пріоритету, час появи між якими розподілено рівномірно в діапазоні від 17 до 23 одиниць часу. Перша заявка з'являється на 100-й одиниці часу.

`GENERATE 28,5` - обмежень по числу заявок немає, рівень пріоритету - 0, заявки з'являються рівномірно з інтервалом від 23 до 33 одиниць часу. Зміщення часу появи першої заявки немає.

`GENERATE 12 ,,, 5,2` - з'являться 5 заявок з пріоритетом 2 і інтервалом 12 одиниць часу.

Блок видалення транзактів.

TERMINATE A - блок видалення транзакта. Виробляє зменшення лічильника завершений подій на величину A наступним чином: Сч=Сч-A. При досягненні Сч= 0 моделювання припиняється. За замовчуванням A=0, при цьому блок тільки видаляє транзакт.

Блоки заняття і звільнення приладів.

SEIZE A - блок заняття приладу,

A - ім'я або номер приладу, що підлягає заняття транзактів.

RELEASE A - блок звільнення приладу,

A - ім'я або номер приладу, що вивільняється.

В якості імен приладів, черг, багатоканальних пристроїв, змінних і констант можна використовувати імена блоків, команд і стандартних числових атрибутів. Ім'я повинно починатися з символу, що не перевищувати 250 символів і не містити спеціальних символів.

Блок затримки транзактов.

ADVANCE A,B - блок затримки транзактів, параметри блоку відповідають параметрам блоку GENERATE.

Для запуску моделі на виконання використовується команда START A, де операнд A являє собою початкове значення лічильника завершений подій Сч.

Як приклади для моделювання розглянемо одно канальний безпріорітетна СМО з необмеженою довжиною черги.

На рис. 3 наведено зовнішній вигляд вікна GPSS World після виконання процедури моделювання. У вікні JOURNAL наведено протокол процесу компіляції моделі і моделювання. При наявності синтаксичної помилки в тексті моделі сюди виводиться відповідний рядок і опис помилки. У вікні REPORT наводиться звіт, куди збирається стандартна статистична інформація в процесі моделювання.

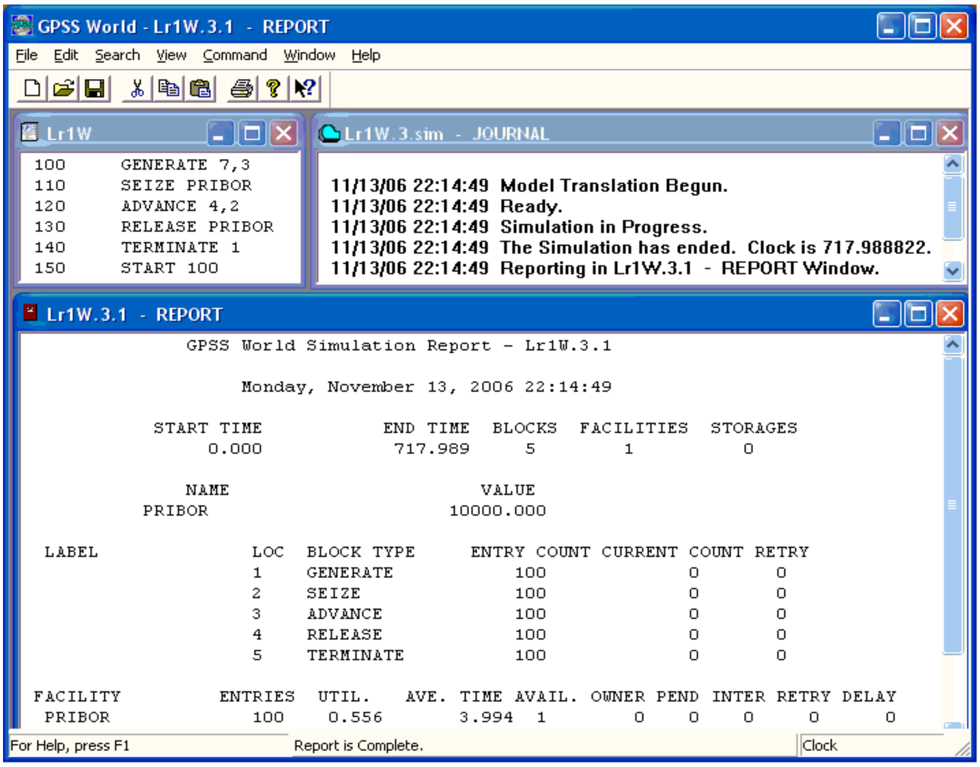


Рис. 3. Вікна GPSS World після виконання моделювання

Сюди включені наступні *показники моделювання системи*:

START TIME - час початку моделювання системи;

END TIME - час закінчення моделювання системи;

BLOCKS - число блоків в моделі;

FACILITIES - число пристроїв (обслуговуючих приладів);

STORAGES - число пристроїв пам'яті;

NAME - призначені користувачем імена;

VALUE - числові значення, що призначені в іменах (зазвичай починаються з 10000).

Вихідні статистичні дані для кожного з блоків містять:

LABEL - мітка блоку, якщо вона є;

LOC - ім'я або номер блоку;

ENTRY COUNT - загальні показання лічильників числа входів транзактів в блок;

CURRENT COUNT - поточні показання лічильників числа входів;

RETRY – число транзактів, які очікують особливі умови, що залежить від стану цього об'єкта-пристрої.

Вихідні статистичні дані по пристроях :

FACILITY - номер (ім'я) пристрої;

ENTRIES - число входів або обслуговувань пристрої;

UTIL - коефіцієнт використання пристрою (відсоток часу);

AVE.TIME - середній час одного обслуговування;

AVAIL . - доступність в кінці моделювання (1 - доступний , 0 - недоступний);

OWNER - можливе число входів;

`PEND` – число транзактів, які очікують зняття переривання з пристрою, коли воно перебуває в стані переривання;

`INTER` – число транзактів, які перебували в пристрої в момент переривання;

`RETRY` – число транзактів, які очікують особливого умови, що залежить від стану пристрою;

`DELAY` – число транзактів, які очікують зайняти пристрій.

Імітаційна модель в GPSS записується як сукупність блоків з відповідними значеннями операндів. Розглянемо ряд таких блоків, що дозволяють описати модель простий СМО.

2. Завдання на моделювання одноканальної СМО

Завдання 1. Скласти модель процесу обслуговування 100 клієнтів на розрахункових операцій, надходження яких підпорядковується рівномірному закону з інтервалом [4 ... 10] хвилин, а обслуговування - рівномірному закону з інтервалом [2...6] хвилин. Знайдемо середній інтервал часу між послідовними надходженнями транзактів A і розкид інтервалу часу B щодо середнього інтервалу A: для моделювання заявок A=(4+10)/2=7, B=A-4=10-A=7-4=10-7=3; для обслуговування заявок A=(2+6)/2=4, B=A-2=6-A=4-2=6-4=2.

Тобто розкид надходження заявок (генерації транзактів) по рівномірному закону з інтервалом [4...10] одиниць часу можна описати як середину інтервалу ± розкид інтервалу часу щодо середини: 7±3 одиниці часу. Відповідно, для рівномірного розподілу часу обслуговування інтервал [2...6] можна описати як 4±2.

Модель на мові GPSS буде виглядати так:

```
100 GENERATE 7,3 ;генерація транзакта
110 SEIZE PRIBOR ;заняття приладу
120 ADVANCE 4,2 ;затримка транзакта
130 RELEASE PRIBOR ;звільнення приладу
140 TERMINATE 1 ;знищення транзакта і зменшення
;на одиницю лічильника числа завершень
150 START 100 ;початок моделювання з числом повторень 100.
```

Результати роботи моделі наведені на рис. 3. З них видно, що при обслуговуванні 100 клієнтів, що надходять із зазначеним часом, завантаження касира склала 55,6%, а середній час обслуговування одного клієнта - 3,994 хв. Процес обслуговування 100 клієнтів зайняв 717,989, тобто майже 718 хв.

Програма на мові GPSS складається з пронумерованих операторів, розташованих і виконуються в порядку цих номерів. Оператори управління моделюванням не нумеруються. Система GPSS World не вимагає обов'язкової нумерації рядків. Нумерація може використовуватися для зручності сприйняття тексту моделі. Символ точки з комою «;» служить для вказівки текстового коментаря.

Завдання 2. Розглянемо роботу моделі завдання 1, але не для моделювання обслуговування 100 клієнтів, а протягом 10 годин, тобто з модельним часом моделювання $T_{мод}$= 10год * 60хв = 600. У разі необхідності моделювання за чітко вказаний проміжок часу в модель потрібно запровадити сегмент таймера, що складається з двох блоків `GENERATE <час моделювання>` і `TERMINATE 1` (рядки 150 і 160). При цьому ми прибрали 1 у блоку `TERMINATE` в рядку 140, тобто цей блок тепер працює тільки на знищення транзакта, а закінчення процедури моделювання визначається таймером. У рядку 170 команди `START` значенням параметра є 1, тому що зменшення лічильника завершений відбувається 1 раз в таймері (рядок 160). Результати наведені на рис. 4.

```
100 GENERATE 7,3
110 SEIZE PRIBOR
120 ADVANCE 4,2
130 RELEASE PRIBOR
140 TERMINATE
150 GENERATE 600
160 TERMINATE 1
170 START 1
```

За результатами видно, що за 10 годин було обслужено 83 клієнта, завантаження касира склала 55,2%, а середній час обслуговування одного клієнта - 3,991 хв.

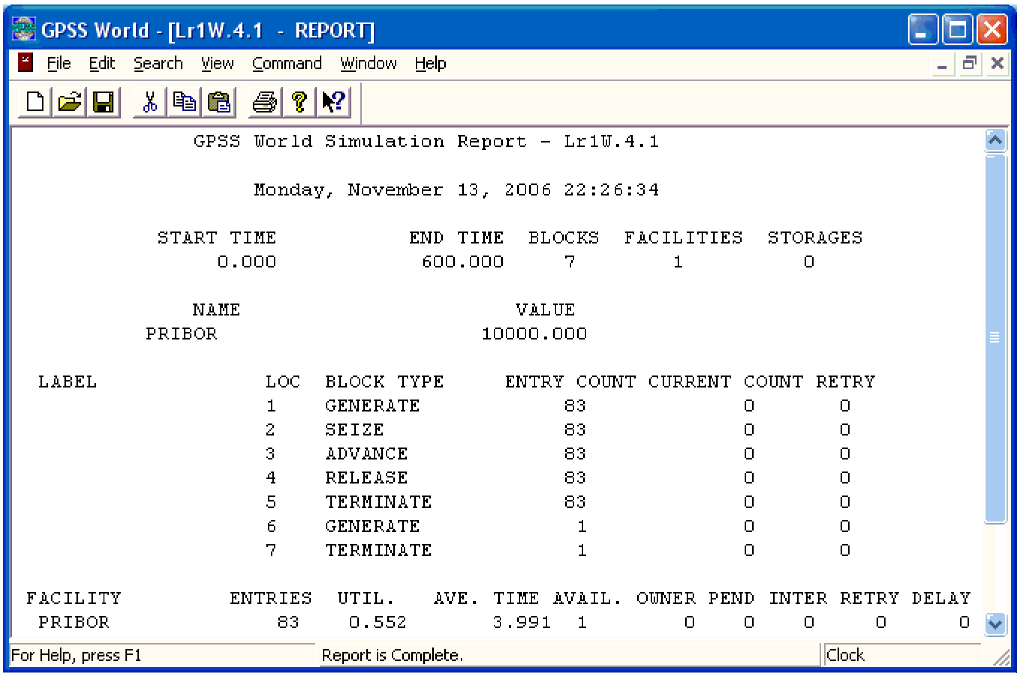


Рис. 4. Вікно звіту після моделювання за фіксований час

3. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитися з описом роботи.

2. Отримати варіант завдання у викладача (інтервали часу надходження заявок, інтервали часу обслуговування, число заявок і час роботи про обслуговуючих пристрої) (табл. 1).

3. Визначити середнє значення і розкид часу генерації транзактів , середнє значення і розкид часу обслуговування приладом.

4. Підготувати опису на мові GPSS і виконати моделювання процесу проходження фіксованого числа заявок через пристрій, а також протягом зазначеного часу (відповідно до завдань1 і 2).

5. Виконати аналіз результатів.

6. Підготувати звіт про роботу з поданням і поясненням отриманих результатів.

Таблиця 1. Варіанти завдань для виконання роботи

Номер варіанта	Час надходження заявки, хв.	Час обслуговування заявки, хв.	Число заявок	Час роботи приладу, ч.
1	2...12	2...10	200	6
2	4...16	4...10	130	8
3	2...10	2...6	400	6
4	3...9	1...5	350	7
5	1...7	2...6	200	5
6	2...8	4...8	100	8
7	5...11	3...7	230	6
8	6...12	6...10	200	7
9	2...12	2...8	220	8
10	4...10	4...6	190	6
11	7...11	2...4	180	8
12	3...13	2...12	210	7
13	4...14	3...13	250	6
14	6...12	5...11	200	5
15	8...16	7...15	190	8
16	5...15	4...14	150	7
17	7...13	6...12	340	9
18	4...12	3...11	220	5
19	3...11	2...10	110	7
20	3...15	2...14	160	8
21	6...14	5...13	230	6
22	6...16	5...15	120	7
23	1...9	2...8	300	8
24	2...12	1...11	200	6
25	2...10	1...9	140	5

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 8. Системи масового обслуговування

Практичне заняття №9. Моделювання СМО з чергою

Навчальна мета заняття: вивчення найпростіших засобів дослідження стану черг, а також можливостей графічного і табличного представлення вихідних даних і результатів моделювання.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Правила імітаційного моделювання СМО з чергою
2. Завдання на моделювання СМО з чергою
3. Порядок виконання роботи

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Правила імітаційного моделювання СМО з чергою

Якщо пристрій не може негайно обслужити транзакт, що підійшов (наприклад, обслуговуючий прилад зайнятий, або пам'ять переповнена), транзакт міститься в чергу. Збір і обробку статистичних даних про черги можна провести за допомогою блоків QUEUE і DEPART.

Блоки заняття і звільнення черги.

QUEUE A, B - блок заняття черги

A - ім'я черги;

B - кількість місць у черзі, займаних транзактом (за замовчуванням 1).

DEPART A, B - блок звільнення черги

A - ім'я черги;

B - кількість місць у черзі,звільнених транзактом (за замовчуванням 1).

Блок QUEUE може бути поміщений перед будь-яким блоком моделі, в якому може виникнути затримка. Необхідно пам'ятати, що GPSS автоматично організовує чергу до зайнятого пристрою незалежно від присутності блоку QUEUE в моделі.

Вихідні статистичні дані по кожній черзі:

`QUEUE` - ім'я або номер черги;

`MAX` - максимальна довжина черги транзактів за час моделювання;

`CONT` - довжина черги в кінці періоду моделювання;

`ENTRY` - число входів в чергу;

`ENTRY (0)` - число входів в чергу без подальшого очікування (нульові входи);

`AVE.CONT` - середня довжина черги (середнє число входів за період моделювання);

`AVE.TIME` - середній час перебування транзактів в черзі;

`AVE.(- 0)` - середній час перебування в черзі при обліку тільки ненульових входів;

`RETRY` – число транзактів, які очікують особливого умови, що залежить від стану цього об'єкта-черзі.

Арифметичні змінні.

Арифметичні вирази є комбінаціями математичних операторів, бібліотечних функцій, стандартних числових атрибутів (СЧА, Додаток А) і констант, що задовольняють правилам елементарної алгебри. При цьому, як і в мовах програмування, в GPSS можна використовувати змінні основних типів: цілого, дійсного і логічного (булевого).

Опис змінних:

ІЗ VARIABLE АВ - оператор опису цілої змінної;

ІЗ FVARIABLE АВ - оператор опису дійсної змінної;

ІЗ BVARIABLE ЛВ - оператор опису булевої змінної;

де ІЗ - ім'я змінної, АВ - арифметичне вираження, ЛВ - логічне вираження.

Для запису виразів використовуються такі арифметичні оператори: "+" - додавання;"-" - віднімання; "#" - множення; "/" - ділення; "\" - цілочисельне ділення (з відкиданням залишку); "^" - піднесення до степеня; "@" - розподіл по модулю, при якому приватне відкидається, а залишок вважається позитивним і є результатом (цілочисельний залишок). Остання операція визначена тільки для VARIABLE.

Ієрархія обчислень стандартна: ступеня, потім множення і ділення, потім цілочисельний залишок і в останню чергу додавання, віднімання. Порядок обчислення може бути змінений за допомогою круглих дужок.

Звернення до арифметичної змінної проводиться за допомогою ВЧА "V", після якого записується числове ім'я змінної або через знак "$" - символьне ім'я.

Наведемо приклад визначення змінної:

```
MYVAR FVARIABLE 2#(Q$OCHER1+V$VASYA)^2
```

Замість символу "#" для позначення множення можна використовувати звичний "*", але для цього в діалоговому вікні SETTINGS на вкладці Simulation потрібно позначити Switch # and *.

Зберігаючи значення.

Числову інформацію в моделі можна зберегти, а потім вивести в звіт за допомогою постійних осередків пам'яті. У GPSS ці осередки називаються зберігаються величинами і відносяться до ВЧА. Їх значення можна задати, а потім змінювати в процесі виконання моделі.

За замовчуванням значення зберігаючи величини дорівнюються нулю. При необхідності користувач може задати певні початкові значення за допомогою оператора INITIAL:

INITIAL A, B – оператор завдання початкового значення величини, що зберігається;

A - ім'я зберігається величини, якої задається початкове значення,

B - задається початкове значення.

Наприклад, потрібно величині STANOK, що зберігається, задати значення 5:

```
INITIAL X$STANOK, 5
```

Тут `X$` - СЧА, який вказує, що `STANOK` величина, що зберігається.

Значення величини, що зберігається, осередку змінюється в блоці SAVEVALUE, а матриці - MSAVEVALUE.

SAVEVALUE A, B - блок зміни зберігається величини;

A - ім'я або номер змінною осередки,

B - величина, яка використовується в процесі модифікації.

Блок SAVEVALUE може бути використаний як в режимі заміщення, так і в режимах накопичення і зменшення значення операнда A.

Приклад режиму заміщення:

`SAVEVALUE STANOK,N$OBS1` – величина X$STANOK отримає значення N$OBS1 (число входів транзактів в блок OBS1).

Приклад режиму накопичення:

`SAVEVALUE SUMMA+,2` – величина X$ SUMMA збільшиться на 2.

Приклад режиму зменшення:

`SAVEVALUE OSTATOK-,X$RASHOD` – величина X$OSTATOK зменшиться на X $ RASHOD.

Побудова таблиць розподілів аргументів.

GPSS дозволяє будувати статистичні таблиці для отримання частотних розподілів ряду аргументів, якими можуть бути деякі СЧА (наприклад, часу затримки транзакта в окремих частинах моделі; довжин черг; вмісту накопичувачів тощо.). У кожної таблиці є певні області значень аргументу. Число влучень аргументу в кожну з цих областей реєструється системою автоматично. Результати можуть бути виведені в табличній формі.

Для опису таблиць використовуються оператори TABLE і QTABLE.

IT TABLE A, B, C, D - оператор опису таблиці;

де IT - ім'я таблиці,

A - ім'я СЧА, значення якого табулюрується,

B- верхня межа першого (відкритого: від - ∞до значення B включно) інтервалу таблиці,

C - ширина інтервалів таблиці,

D - кількість інтервалів таблиці, збільшене на 2 (включаючи відкриті лівий і правий).

IT QTABLE A, B, C, D - оператор опису таблиці часу перебування в черзі,

A - ім'я черги.

При входженні транзакта в блок TABULATE в таблицю, задану операндом A, заноситься значення СЧА, яке описане операндом A оператора TABLE.

TABULATE A, B - блок табулювання ,

A - ім'я таблиці, в яку заноситься табулювана величина,

B - ваговий коефіцієнт, що задає число раз занесення величини в таблицю при кожному вході в блок (за замовчуванням дорівнює 1).

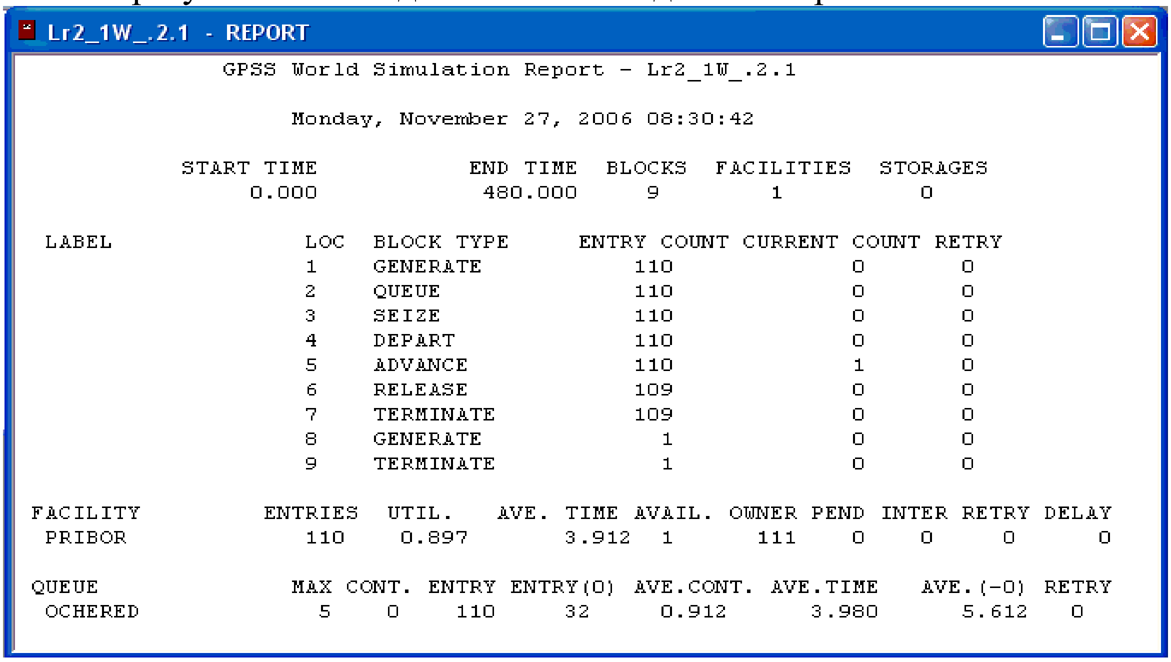
2. Завдання на моделювання СМО з чергою

Завдання 1. Отримати статистичні дані про черги клієнтів, які очікують обслуговування на розрахункової операції. Надходження клієнтів підпорядковується рівномірному закону з інтервалом [1.3 ... 7.1] (4.2 ± 2.9) хвилин, а обслуговування - рівномірному закону з інтервалом [1.7 ... 6.1] (3.9±2.2) хвилин. Провести моделювання 8 годин робочого часу.

```
100 GENERATE 4.2,2.9 ; генерація транзакта
105 QUEUE OCHERED
110 SEIZE PRIBOR
```

```
115 DEPART OCHERED
120 ADVANCE 3.9, 2.2
130 RELEASE PRIBOR
140 TERMINATE
141 * BLOK2 - таймер
150 GENERATE 480
160 TERMINATE 1
170 START 1
```

Звіт за результатами моделювання наводиться на рис. 1.



```
Lr2_1W_.2.1 - REPORT

              GPSS World Simulation Report - Lr2_1W_.2.1

                   Monday, November 27, 2006 08:30:42

           START TIME           END TIME  BLOCKS  FACILITIES  STORAGES
                0.000            480.000     9         1          0

  LABEL                  LOC  BLOCK TYPE     ENTRY COUNT CURRENT COUNT RETRY
                         1    GENERATE           110             0       0
                         2    QUEUE              110             0       0
                         3    SEIZE              110             0       0
                         4    DEPART             110             0       0
                         5    ADVANCE            110             1       0
                         6    RELEASE            109             0       0
                         7    TERMINATE          109             0       0
                         8    GENERATE             1             0       0
                         9    TERMINATE            1             0       0

 FACILITY          ENTRIES  UTIL.   AVE. TIME AVAIL. OWNER PEND INTER RETRY DELAY
  PRIBOR              110   0.897      3.912  1       111    0    0     0     0

 QUEUE                MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME   AVE.(-0) RETRY
  OCHERED              5    0    110     32     0.912     3.980      5.612   0
```

Рис.1. Вікно звіту з висновком характеристик черги

За 8 годин було обслужено 109 клієнтів, один знаходиться на обслуговуванні в момент закінчення моделювання, разом 110. Завантаження касира склала 89,7%, а середній час обслуговування одного клієнта - 3,912 хв.

Максимальна довжина черги клієнтів на обслуговуванні була 5 осіб. 32 клієнта з 110 не очікували в черзі, тобто до моменту їх надходження касир був вільний. Середня довжина черги склала 0,912. Середній час знаходження клієнта в черзі 3,98 хв (з урахуванням всіх 110 клієнтів). Середній час очікування в черзі 5,612 хв (з урахуванням тільки клієнтів, які перебували в черзі: 110-32 = 78 клієнтів).

<u>Завдання 2</u>. Отримати таблицю розподілу на 2000 випадкових чисел по рівномірному закону в інтервалі від 5 до 15 (10 ± 5).

```
10 MYVAR VARIABLE C1-X1
11 GENERATE 10,5  ;  генерація транзактів по рівномірному закону
12 TABULATE TAB1  ;  блок табулювання часу
13 SAVEVALUE 1,C1  ;  збереження в осередку 1 поточного часу
14 TERMINATE 1  ;  видалення транзакта
15 TAB1 TABLE V$MYVAR,5,2,12
16 START 2000
```

Тут використані наступні стандартні числові атрибути:

`C1` - значення відносного часу,

`X`- значення величини, що зберігається (X1- величина, збережена в осередку 1.

Детальніше про список стандартних числових атрибутів в додатку Б.

У моделі значення змінної MYVAR обчислюються як різниця поточного значення часу моделювання і попереднього, що зберігається в осередку 1. Таблиця TAB1 являє собою таблицю частот попадання генерованих транзактів в інтервали тимчасової осі від 5 до 15 з кроком 2.

Результати моделювання наведені на рис. 2.

У звіті виводиться наступна інформація про таблиці:

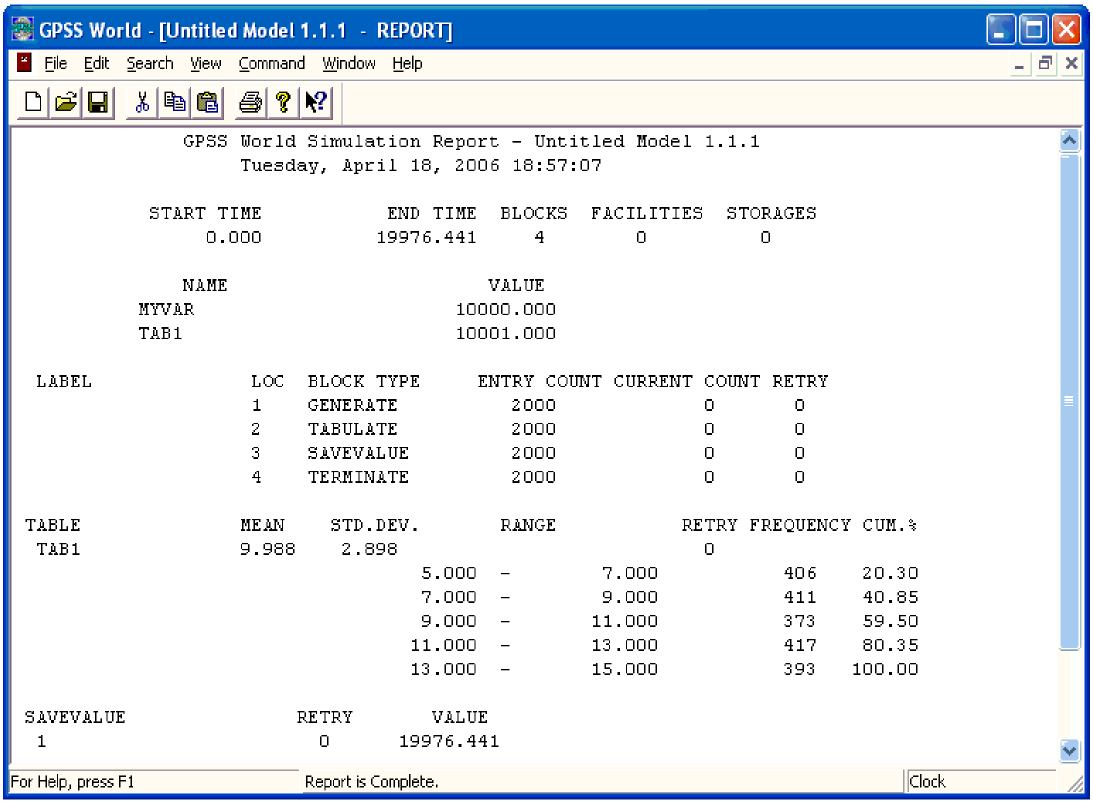
`TABLE` - ім'я або номер таблиці;

`MEAN` - середнє значення аргументу;

`STD.DEV` - стандартне відхилення;

`RETRY` – число транзактів, які очікують особливі умови, що залежать від стану цього об'єкта-черзі;

`RANGE` - діапазон інтервалу;




```
              GPSS World Simulation Report - Untitled Model 1.1.1
                   Tuesday, April 18, 2006 18:57:07

           START TIME           END TIME  BLOCKS  FACILITIES  STORAGES
                0.000           19976.441    4         0          0

              NAME                       VALUE
           MYVAR                       10000.000
           TAB1                        10001.000

 LABEL              LOC  BLOCK TYPE     ENTRY COUNT CURRENT COUNT RETRY
                    1    GENERATE          2000             0       0
                    2    TABULATE          2000             0       0
                    3    SAVEVALUE         2000             0       0
                    4    TERMINATE         2000             0       0

TABLE              MEAN    STD.DEV.       RANGE           RETRY FREQUENCY CUM.%
 TAB1              9.988    2.898                             0
                                   5.000  -       7.000              406    20.30
                                   7.000  -       9.000              411    40.85
                                   9.000  -      11.000              373    59.50
                                  11.000  -      13.000              417    80.35
                                  13.000  -      15.000              393   100.00

SAVEVALUE               RETRY       VALUE
 1                        0       19976.441
```

Рис.2. Вікно звіту з висновком табличних даних

`FREQUENCY` - частота потрапляння в інтервал;

`CUM.%` - накопичена відносна частота.

Про зберігаються величинах виводиться наступна інформація:

`SAVEVALUE` - ім'я або номер об'єкта-осередки;

RETRY – число транзактів, які очікують особливі умови, що залежить від стану цього об'єкта-осередки;

VALUE - значення об'єкта-осередки в кінці моделювання.

<u>Завдання 3</u>**.** Скласти модель процесу обслуговування заявок, надходження яких підпорядковується рівномірному закону з інтервалом [1...7] (4 ± 3) одиниць часу, а обслуговування - рівномірному закону інтервалом [2...6] (4 ± 2) одиниць часу. Отримати також статистичні дані про черги заявок, які очікують заняття приладу. Моделювати процес протягом 600 одиниць часу.

Увага! Висновок таблиць часу очікування в черзі відбувається незалежно від наявності блоку TABULATE.

```
10 TAB1 QTABLE OCHERED,0,2,12
100 GENERATE 4,3
105 QUEUE OCHERED
110 SEIZE PRIBOR
115 DEPART OCHERED
120 ADVANCE 4,2
130 RELEASE PRIBOR
140 TERMINATE
145 * BLOK2 - таймер
150 GENERATE 600
160 TERMINATE 1
170 START 1
```

```
              GPSS World Simulation Report - Lr2_2W_new.10.1
                   Tuesday, April 11, 2006 03:18:38
           START TIME           END TIME  BLOCKS  FACILITIES  STORAGES
                0.000            600.000     9        1          0

  LABEL              LOC  BLOCK TYPE     ENTRY COUNT CURRENT COUNT RETRY
                     1    GENERATE           152             0       0
                     2    QUEUE              152             6       0
                     3    SEIZE              146             0       0
                     4    DEPART             146             0       0
                     5    ADVANCE            146             1       0
                     6    RELEASE            145             0       0
                     7    TERMINATE          145             0       0
                     8    GENERATE             1             0       0
                     9    TERMINATE            1             0       0

 FACILITY     ENTRIES  UTIL.   AVE. TIME AVAIL.  OWNER PEND INTER RETRY DELAY
  PRIBOR         146    0.973      3.997  1        147    0     0     0     6

 QUEUE           MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME   AVE.(-0) RETRY
  OCHERED         10    6    152      8     4.884     19.281     20.352   0

 TABLE           MEAN    STD.DEV.       RANGE           RETRY FREQUENCY CUM.%
  TAB1          19.556   12.260                            0
                                      -        0.000              8     5.48
                                0.000 -        2.000              6     9.59
                                2.000 -        4.000              6    13.70
                                4.000 -        6.000              6    17.81
                                6.000 -        8.000             12    26.03
                                8.000 -       10.000             10    32.88
                               10.000 -       12.000              4    35.62
                               12.000 -       14.000              5    39.04
                               14.000 -       16.000              6    43.15
                               16.000 -       18.000              3    45.21
                               18.000 -       20.000              6    49.32
                               20.000 -                          74   100.00
```

Побудова гістограм.

Табличні значення можна представити у вигляді стовпчастих гістограм, де по осі абсцис відкладені інтервали, а по осі ординат - частоти потрапляння в ці інтервали. Для цього вибираємо пункт Window головного меню і пункт Simulation Window меню, що випадає. Потім вибираємо пункт Table Window (Вікно таблиці) спливаючого меню. З'являється діалогове вікно Open Table Window - рис. 3, в якому система пропонує ім'я однієї з таблиць. Якщо в моделі кілька таблиць, потрібне ім'я можна знайти в списку, що випадає.

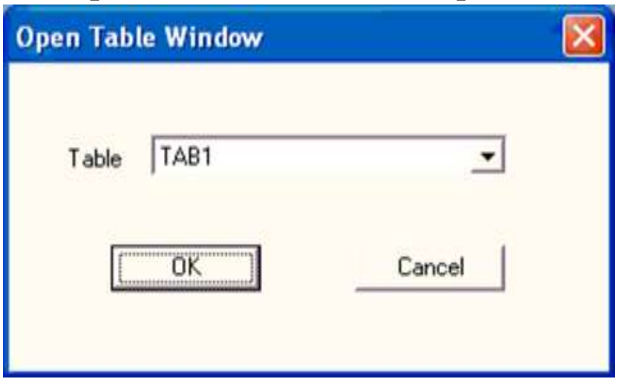


Рис. 3Діалогове вікно Open Table Window

Гістограми для завдань 2. і 3 приведені на рис. 4 і 5 відповідно.

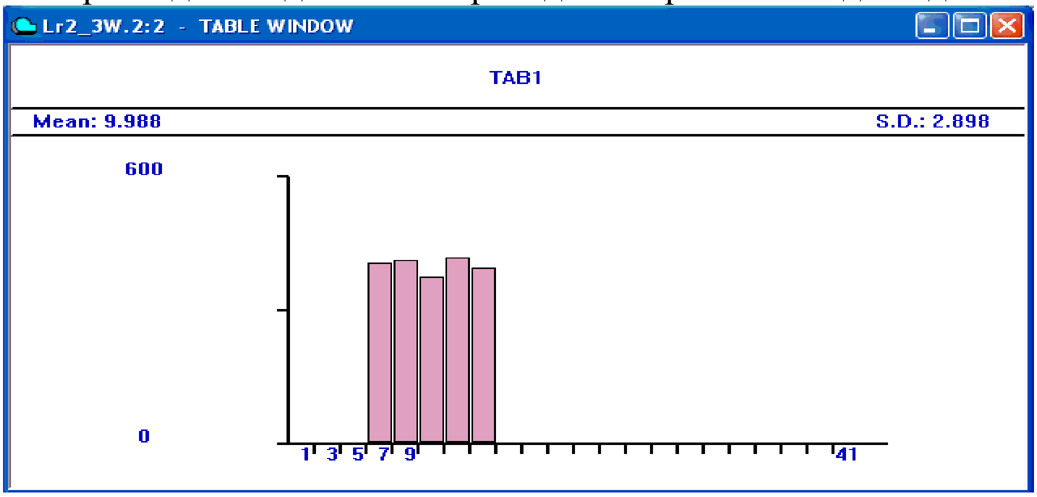


Рис.4. Вікно Table Window для завдання 2

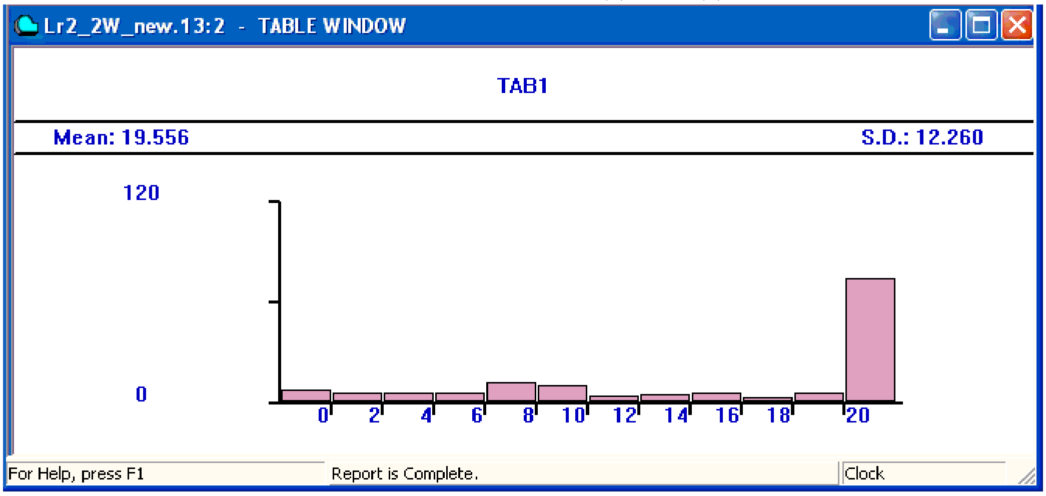


Рис. 5Вікно Table Window для завдання 3

3. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитися з описом роботи.

2. Отримати варіант завдання у викладача (інтервали часу надходження заявок, інтервали часу обслуговування, число заявок і час роботи обслуговуючого пристрою, параметри для побудови таблиці одно мірного розподілу) (табл. 1).

3. Підготувати опису на мові GPSS і виконати моделювання процесу проходження заявок через пристрій протягом зазначеного часу (відповідно до завдання 1).

4. Виконати аналіз статистичних даних про черги заявок і завантаженні обслуговуючого приладу при різному співвідношенні часів генерації і обслуговування заявок, побудувати графіки довжини черги.

5. Побудувати таблицю частот попадання в інтервали генерованих чисел при рівномірному законі розподілу (завдання 2), самостійно підібравши величину і кількість інтервалів.

6. Побудувати таблицю і гістограму часів очікування в черзі (згідно завданням 3). Брати ту ж модель, що і в пункті 3 поточного порядку виконання, самостійно підібравши величину і кількість інтервалів.

7. Підготувати звіт про роботу з поданням і поясненням отриманих результатів.

Таблиця 1. Варіанти завдань для виконання роботи

Номер варіанта	Час надходження заявки, хв.	Час обслуговування заявки, хв.	Час роботи приладу, год .	Інтервал для генерування випадкових чисел	Кількість випадкових чисел
1	2 ... 11	4 ... 10	6	0 ... 1000	100
2	4 ... 17	6 ... 15	8	100 ... 200	300
3	2 ... 10	4 ... 9	6	50 ... 100	200
4	3 ... 8	1 ... 8	7	0 ... 50	400
5	1 ... 7	2 ... 6	5	25 ... 75	600
6	2 ... 8	3 ... 8	8	100 ... 300	500
7	13 ... 20	13 ... 18	6	0 ... 10	700
8	6 ... 11	6 ... 10	7	20 ... 120	900
9	2 ... 12	3 ... 10	8	10 ... 80	800
10	4 ... 10	3 ... 12	6	5 ... 15	1000
11	7 ... 10	2 ... 14	8	0 ... 200	1200
12	3 ... 14	2 ... 13	7	80 ... 180	1100
13	4 ... 15	3 ... 14	6	50 ... 200	500
14	6 ... 12	5 ... 12	5	40 ... 80	700
15	8 ... 16	8 ... 15	8	100 ... 500	650
16	5 ... 15	4 ... 15	7	70 ... 100	600
17	7 ... 12	6 ... 13	9	25 ... 105	700

18	4 ... 13	5 ... 14	5	400 ... 650	850
19	3 ... 11	2 ... 11	7	300 ... 420	900
20	3 ... 15	2 ... 14	8	200 ... 500	1100
21	7 ... 14	5 ... 15	6	100 ... 1000	1000
22	6 ... 16	7 ... 15	7	15 ... 35	1200
23	1 ... 9	3 ... 8	8	200 ... 640	1300
24	2 ... 13	1 ... 14	6	30 ... 60	800
25	12 ... 20	10 ... 21	9	40 ... 100	1000

Додаток А. Основні стандартні числові атрибути

У стандартних числових атрибутах (СЧА), в оригіналі Standard Number Attribute (SNA) GPSS розміщує інформацію про об'єкти моделі. Значення СЧА можуть бути використані при роботі з моделлю, частина з них можуть бути програмно змінені. Значення СЧА може бути арифметичним або логічним. Формат запису при використанні: СЧА <числове ім'я об'єкта> або СЧА$<символьне ім'я об'єкта>.

Наприклад:

S1 - поточний зміст багатоканального пристрою з ім'ям 1;

Q$ CHERGA - поточна довжина черги з ім'ям CHERGA.

Таблиця 2. Перелік основних стандартних числових атрибутів

об'єкт	ВЧА	призначення
блоки	N W	Лічильник входів Лічильник поточного вмісту
час	AC1 C1	Значення абсолютного часу Значення відносного часу моделювання
Генератори випадкових чисел	RN	При використанні в якості аргументу функції представляються дійсним числом в діапазоні 0,000000-0,999999, в інших випадках - цілим числом від 0 до 999
транзакти	P PR M1 MP A1 MB	Значення параметра значення пріоритету Час перебування в моделі Час з моменту входу в блок Об'єднаний набір активних вимог Повертає 1, якщо є вимога в блоці, яке знаходиться в тому ж наборі, що і активне вимога. Інакше повертає 0
Матриці зберігаються величин	MX (i, j)	Величина елемента, що стоїть в i-му рядку і j-му стовпці
змінні	BV V	Значення булевої змінної Значення арифметичної змінної
величини	X	Значення зберігається величини

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 8. Системи масового обслуговування

Практичне заняття №10. Моделювання багатоканальної СМО

Навчальна мета заняття: вивчення засобів GPSS World для побудови імітаційних моделей багатоканальних систем з різним характером утворення черги.

Кількість годин: 6 год.

Навчальні питання

1. Правила моделювання багатоканальної СМО
2. Завдання на моделювання багатоканальної СМО
3. Порядок виконання роботи

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Правила моделювання багатоканальної СМО

У даній роботі будуть розглянуті кілька завдань багатоканальних СМО з однорідними і неоднорідними каналами, які мають різний характер утворення черги. Однорідні паралельно працюючи канали обслуговування можна представити як багатоканальні пристрої, які описувані оператором STORAGE. Розглянемо також додаткові засоби управління потоками заявок в моделі.

Опис накопичувача, що має обмежену ємність:

ІП STORAGE A

де ІП - ім'я багатоканального пристрою (накопичувач, пам'ять), A - ємність пристрою.

Наприклад:

`Bench STORAGE 3` - накопичувач з ім'ям Bench ємністю 3 одиниці.

Блоки заняття і звільнення багатоканального пристрою:

ENTER A, B - блок заняття багатоканального пристрою (пам'яті),

LEAVE A, B - блок звільнення багатоканального пристрою (пам'яті),

A - ім'я багатоканального пристрою (може бути виразом, СЧА),

B - займана (що звільняється) ємність пристрою.

Наприклад:

`ENTER Bench,1` - зайняти в накопичувачі з ім'ям Bench 1 одиницю ємності;

`LEAVE Sofa,2` - звільнити в накопичувачі з ім'ям Sofa 2 одиниці ємності.

Вихідні статистичні дані для багатоканальних пристроїв містять:

`STORAGE` - номер (ім'я) пристрої;

`CAP.` - ємність багатоканального пристрою;

`REM.` - невикористана ємність (на момент кінця моделювання);

`MIN.` - мінімальне число одиниць ємності багатоканального пристрою, використаного під час моделювання;

`MAX.` - максимальне число одиниць ємності багатоканального пристрою, використаного під час моделювання;

`ENTRIES` - число входів в багатоканальному пристрій за період моделювання;

`AVL.` - доступність в кінці моделювання (1 - доступний , 0 - недоступний);

`AVE.C.` - середня кількість транзактів в багатоканальному пристрої;

`UTIL.` - коефіцієнт використання пристрою (відсоток часу);

`RETRY` – число транзактів, які очікують особливі умови, що залежить від стану пристрою;

`DELAY` – число транзактів, які очікують зайняти пристрій.

Перевірка стану пристроїв, приладів і логічних перемикачів.

Блок перевірки стану елементів GATE використовується в трьох режимах:

- перевірка багатоканальних пристроїв і приладів;
- перевірка стану логічних перемикачів;
- перевірка стану парності.

Розглянемо синтаксис блоку GATE.

GATE O A, B - блок перевірки стану елементів,

O - логічний покажчик, що задає умову перевірки:

для перевірки багатоканальних пристроїв і приладів:

U - перевірка зайнятості приладу,

NU - перевірка незайнятості приладу,

I - перевірка приладу на використання захопленням,

NI - перевірка приладу на невикористання захопленням,

SF – перевірка наповненості багатоканального пристрою (пам'ять заповнена),

SNF – перевірка незаповненості багатоканального пристрою,

SE - перевірка того, що багатоканального пристрій порожньо,

SNE - перевірка того, що багатоканального пристрій не порожньо;

для перевірки стану логічних перемикачів:

LS - логічний перемикач "встановлено",

LR - логічний перемикач "скинутий";

A - ім'я багатоканального пристрою, приладу або логічного перемикача;

B - ім'я блоку, в який передається транзакт, якщо умова O не виконується.

Наприклад:

`GATE NU PRIBOR, OUT` - якщо умова NU (Non Used) не виконується, тобто прилад зайнятий, то транзакт переходить на блок з ім'ям `OUT`. В іншому випадку транзакт переходить на наступний за `GATE` блок моделі;

`GATE SNF Bench, OUT`- якщо умова SNF (Storage No Full) не виконується (накопичувач `Bench` заповнений), то транзакт відправляється на блок з ім'ям `OUT`. Якщо ж умова виконується (в накопичувачі ще є місця) – транзакт переходить на наступний за `GATE` блок моделі.

Передача транзактов.

Часто виникає необхідність передачі транзакта в інший блок по якомусь умові, безумовним чином або з певною ймовірністю. Для цього може бути використаний блок TRANSFER в цілому в 9 режимах. Частина з них ми розглянемо.

TRANSFER, B - блок передачі транзактів, безумовний режим,

B - ім'я блоку, куди передається транзакт.

TRANSFER A, B, C - блок передачі транзактів, статистичний режим,

A - ймовірність передачі транзакта в блок C,

B - ім'я блоку, куди передається транзакт з ймовірністю (1-A),

C - ім'я блоку, куди передається транзакт з ймовірністю A.

TRANSFER BOTH, B, C - блок передачі транзактів, умовний режим,

BOTH - ключове слово, що позначає режим, коли транзакт намагається спочатку увійти в блок B і, коли це неможливо, то в блок C.

Якщо неможливий вхід і в блок C, то транзакт залишається в блоці TRANSFER до тих пір, поки не зможе увійти в один з блоків B або C.

TRANSFER ALL, B , C , D - блок передачі транзактов , умовний режим,

ALL - ключове слово, що позначає режим, коли транзакт послідовно намагається увійти в блоки з номерами від B до C з кроком, рівним D. Якщо це неможливо, то залишається в блоці TRANSFER до тих пір, поки не зможе увійти в один з блоків,

B - номер або ім'я першого блоку, куди транзакт намагається увійти,

C - номер або ім'я останнього блоку, куди транзакт намагається увійти,

D - значення кроку.

Наприклад:

TRANSFER ,OUT - безумовна передача управління блоку з міткою OUT;

TRANSFER .25,STANOK1,OUT – транзакт з ймовірністю 0.25 переходить до блоку з міткою OUT і з ймовірністю 0.75 до блоку з міткою STANOK1;

TRANSFER BOTH,STANOK1,STANOK2 – транзакт переходить до блоку з міткою STANOK1, якщо це неможливо, то до блоку з міткою STANOK2, якщо і це неможливо, то транзакт затримується до наступного моменту дискретного модельного часу, в який повторюються зазначені спроби переходу;

TRANSFER ALL, Place1, Place2,2 – транзакт переходить до блоку з міткою Place1, якщо це неможливо, то до 2-го після зазначеного Place1 блоку. При неможливості входу перевіряються всі блоки від Place1 до Place2 з кроком 2.

Керуючі команди для повторення сеансу моделювання.

При дослідженні моделі може виникнути необхідність багаторазових прогонів моделі при зміні її параметрів. Крім того, під час підрахунку статистичних характеристик часто бажано відкинути початковий період до досягнення системою стаціонарного стану. Для цього в GPSS використовуються керуючі команди CLEAR і RESET.

CLEAR - обнуляє всі статистичні лічильники величини, що зберігаються, видаляє всі транзакти з моделі, таймери абсолютного і відносного модельного часу. Поточна модель повертається в початковий стан, але зі зміненими при необхідності параметрами.

RESET - обнуляє всі статистичні лічильники і зберігаються величини, не видаляючи транзакти з моделі. При цьому встановлюється початок вимірюваного сеансу моделювання (відносне модельне час обнуляється). Таймер ж абсолютного модельного пір не обнуляється.

Порівняння значень атрибутів.

Для порівняння значень двох стандартних числових атрибутів і вибору напрямку руху транзакта в залежності від результату може бути використаний блок TEST.

TEST XA, B, C - блок порівняння атрибутів;

A - ім'я першого стандартного числового атрибута;

B - ім'я другого стандартного числового атрибута;

C - ім'я блоку, в який передається транзакт, якщо умова X не виконується;

X - оператор відносини, що задає умови вибору:

G-A>B;

GE-A≥B;

E-A=B;

NE-A≠B;

L-A<B;

LE-A≤B.

Якщо операнд C присутній, блок працює в режимі умовного переходу, якщо операнд C відсутня, то в режимі відмови. У режимі відмови транзакт затримується перед блоком TEST до виконання умови, заданого оператором відносини.

Наприклад:

`TEST LE S$OCHER1,S$OCHER2,KPRIBORY2` - перевірка в режимі умовного переходу. Якщо поточний зміст багатоканального пристрою OCHER1 менше або дорівнює поточного вмісту OCHER2, транзакт входить в блок, наступний за блоком TEST. В іншому випадку транзакт направляється в блок KPRIBORY2.

`TEST GE Q$OCHERED1,Q$OCHERED2` - перевірка в режимі відмови. Транзакт не зможе увійти в блок TEST, поки довжина черги OCHERED1 не стане більше або дорівнює довжині черги OCHERED2.

2. Завдання на моделювання багатоканальної СМО

<u>Завдання 1</u>. Промоделювати багатоканальну СМО з необмеженою чергою. На вокзалі є 2 квиткові каси, час обслуговування в яких розподілено рівномірно в інтервалі [10.7 ... 19.5] (15.1 ± 4.4) хв. Пасажири підходять по рівномірному закону розподілу з інтервалом [5.6 ... 10] (7.8 ± 2.2) хв і стають в одну загальну чергу. Час моделювання 8 годин. Для опису обслуговуючих приладів (кас) використовуємо багатоканальне пристрій типу STORAGE ємністю 2. Результати моделювання представлені на рис. 1.

```
20 KASY STORAGE 2
100 GENERATE 7.8,2.2
102 QUEUE QKASY ;блок заняття черги
105 ENTER KASY ;блок заняття багатокан. пристрою
110 DEPART QKASY ;блок звільнення черги
120 ADVANCE 15.1,4.4
125 LEAVE KASY;блок звільнення багатокан. пристрою
140 TERMINATE
145 GENERATE 480
150 TERMINATE 1
170 START 1
```

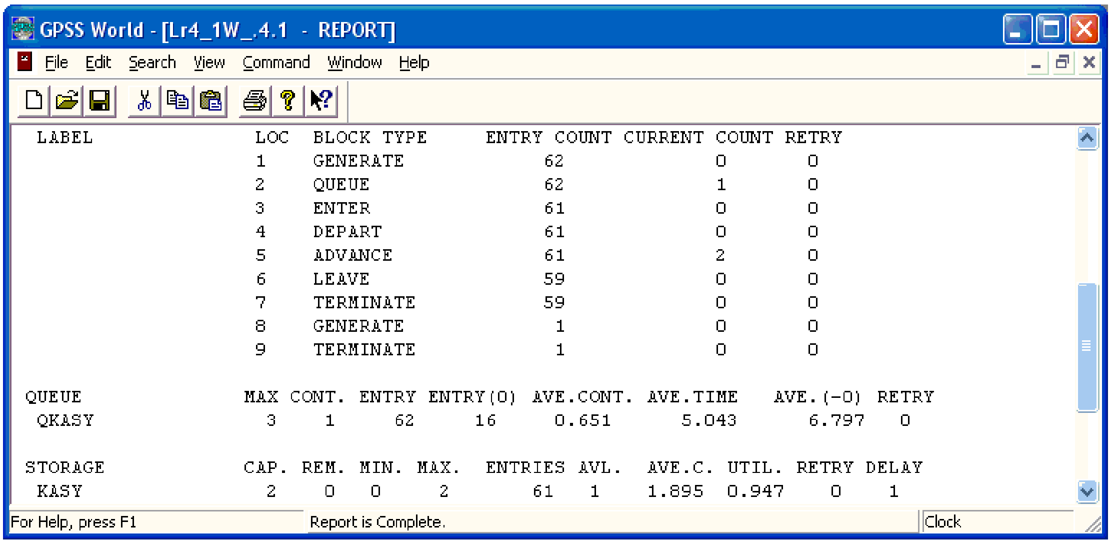


Рис. 1. Результати моделювання багатоканальної СМО з необмеженою довжиною черги

За

8 годин було обслужено 59 клієнтів, два знаходиться на обслуговуванні в момент скінчення моделювання і один в черзі, разом 62. Завантаження касирів склала 94 , 7%, а середній час обслуговування одного клієнта - 1,895 хв.

Максимальна довжина черги клієнтів на обслуговування була 3 чоловік. 16 клієнта з 62 не очікували в черзі, тобто до моменту їх надходження касир був вільний. Середня довжина черги склала 0,651. Середній час знаходження клієнта в черзі 5,043 хв (з урахуванням всіх 62 клієнтів). Середній час дожидання в черзі 7,797 хв (з урахуванням тільки клієнтів, які перебували в черзі: 62-16 = 46 клієнтів).

<u>*Завдання 2.*</u> Промоделювати багатоканальну СМО з відмовами (черга взагалі не створюється, якщо прилад зайнятий - заявка залишає систему), підрахувати заявки, які покинули систему. Тобто якщо підійшов пасажир бачить, що обидві каси зайняті, він йде на автовокзал. Тут використовуємо перевірку на незайнятість (незаповненою) багатоканального пристрою блоком GATE. Якщо умова SNF не виконується (всі каси зайняті), то переходимо на блок з ім'ям NEVLEZ. Тут виробляємо підрахунок пішли на автовокзал потенційних пасажирів в черзі з ім'ям WYLET. Потім все заявки, як обслужених, так і не обслужених, відправляються на блок TERMINATE з ім'ям OUT. Результати моделювання представлені на рис. 2.

```
20 KASY STORAGE 2
100 GENERATE 7.8,2.2
    101 GATE SNF KASY,NEVLEZ
    105 ENTER KA SY
    120 ADVANCE 15.1,4.4
    125 LEAVE KASY
    131 TRANSFER,OUT
    132 NEVLEZ QUEUE WYLET
    133 DEPART WYLET
    141 OUT TERMINATE
```

Lr4_2W_.4.1 - REPORT

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	61	0	0
	2	GATE	61	0	0
	3	ENTER	47	0	0
	4	ADVANCE	47	2	0
	5	LEAVE	45	0	0
	6	TRANSFER	45	0	0
NEVLEZ	7	QUEUE	14	0	0
	8	DEPART	14	0	0
OUT	9	TERMINATE	59	0	0
	10	GENERATE	1	0	0
	11	TERMINATE	1	0	0

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
WYLET	1	0	14	14	0.000	0.000	0.000	0

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY	DELAY
KASY	2	0	0	2	47	1	1.463	0.732	0	0

Рис. 2. Результати моделювання багатоканальної СМО з відмовами

У нашому випадку з 61 заявки, що з'явилася в системі, обслужені 45, 2 обслуговувалися на момент закінчення моделювання, 14 заявок покинули систему, отримавши відмову через зайнятість обох приладів в момент їх появи.

Завдання 3. Промоделювати багатоканальну СМО з обмеженою довжиною черги. Якщо чергу заповнена, то заявка залишає систему. Тобто якщо підійшов пасажир бачить, що обидві каси зайняті і черга має певну довжину (наприклад, 2 людини), він йде на автовокзал. Перевірку черзі на незаповненою виконаємо за допомогою блоку GATE. Якщо умова SNF (в черзі менше 2 осіб) не виконується, то переходимо на блок з ім'ям NEVLEZ. Виробляємо підрахунок пішли на автовокзал потенційних пасажирів в черзі з ім'ям WYLET. Результати моделювання представлені на рис. 3.

```
20 KASY STORAGE 2
25 OCHERED STORAGE 2
100 GENERATE 7.8,2.2
101 GATE SNF OCHERED,NEVLEZ
105 ENTER OCHERED
110 ENTER KASY
115 LEAVE OCHERED
120 ADVANCE 15.1, 4.4
125 LEAVE KASY
131 TRANSFER, OUT
132 NEVLEZ QUEUE WYLET
133 DEPART WYLET
141 OUT TERMINATE
```

Lr4_3W_.6.1 - REPORT

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	62	0	0
	2	GATE	62	0	0
	3	ENTER	61	0	0
	4	ENTER	61	0	0
	5	LEAVE	61	0	0
	6	ADVANCE	61	2	0
	7	LEAVE	59	0	0
	8	TRANSFER	59	0	0
NEVLEZ	9	QUEUE	1	0	0
	10	DEPART	1	0	0
OUT	11	TERMINATE	60	0	0
	12	GENERATE	1	0	0
	13	TERMINATE	1	0	0

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
WYLET	1	0	1	1	0.000	0.000	0.000	0

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY	DELAY
KASY	2	0	0	2	61	1	1.891	0.945	0	0
OCHERED	2	2	0	2	61	1	0.492	0.246	0	0

Рис.3. Результати моделювання багатоканальної СМО з обмеженою довжиною черги

У цій ситуації з 62 з'явилися заявок тільки одна покинула систему через зайнятість обох кас і заповнення черги. 2 пасажира в кінці моделювання обслуговуються в касах.

Завдання 4. Розглянемо ситуацію, коли в систему входить кілька потоків однотипних заявок. Нехай крім основного потоку пасажирів додається одномірний потік із залу очікування в інтервалі [15...25] (20±5) хв., а також рівномірні замовлення по телефону в інтервалі [25...35] (30±5) хв. Тут продемонстровано приклад без наявності черги. Всі три потоки заявок збирає блок GATE з ім'ям VHOD. Результати моделювання представлені на рис. 4.

```
20 KASY STORAGE 2
50 GENERATE 30,5
60 TRANSFER ,VHOD;безумовний перехід
70 GENERATE 20,5
80 TRANSFER ,VHOD
90 GENERATE 7.8, 2.2
100 VHOD GATE SNF KASY, NEVLEZ
110 ENTER KASY
120 ADVANCE 15.1, 4.4
125 LEAVE KASY
131 TRANSFER, OUT
132 NEVLEZ QUEUE WYLET
133 DEPART WYLET
141 OUT TERMINATE
```

```
 LABEL              LOC  BLOCK TYPE     ENTRY COUNT CURRENT COUNT RETRY
                     1   GENERATE           15             0        0
                     2   TRANSFER           15             0        0
                     3   GENERATE           22             0        0
                     4   TRANSFER           22             0        0
                     5   GENERATE           61             0        0
VHOD                 6   GATE               98             0        0
                     7   ENTER              49             0        0
                     8   ADVANCE            49             2        0
                     9   LEAVE              47             0        0
                    10   TRANSFER           47             0        0
NEVLEZ              11   QUEUE              49             0        0
                    12   DEPART             49             0        0
OUT                 13   TERMINATE          96             0        0
                    14   GENERATE            1             0        0
                    15   TERMINATE           1             0        0


QUEUE              MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME   AVE.(-0) RETRY
 WYLET               1    0     49      49    0.000      0.000      0.000    0


STORAGE            CAP. REM. MIN. MAX.  ENTRIES AVL.  AVE.C. UTIL. RETRY DELAY
 KASY                2    0    0     2      49    1   1.471  0.735    0     0
```

Рис. 4. Результати моделювання багатоканальної СМО з різним характером формування черги

Вхідний потік заявок включає: 15 заявок прийнятих по телефону, 22 заявки із залу очікування і 61 заявка з основної черзі, всього 98 заявок. З них було обслужено 49 і 49 заявок покинуло чергу.

3. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитися з описом роботи.
2. Отримати варіант завдання у викладача (1).
3. Підготувати опису на мові GPSS і виконати моделювання процесу проходження заявок через пристрій протягом зазначеного часу (відповідно до завдань 1-4).
4. Підготувати звіт про роботу з поданням і поясненням отриманих результатів.

Таблиця 1. Варіанти завдань для виконання роботи

Номер варіанта	Час надходження заявки з 1-го джерела, хв.	Час обслуговування заявки з 2-го джерела, хв.	Час надходження заявки з 3-го джерела, хв.	Час обслуговування заявки, хв	Час роботи приладу, год
1	2...11	12...16	20...26	2...10	10
2	4...16	6...17	10...20	2...8	9
3	2...10	4...12	9...14	2...6	8
4	3...9	5...11	3...13	1...5	9
5	1...7	2...12	4...10	2...6	8
6	2...8	5...11	3...12	4...8	7
7	5...11	8...11	2...10	3...7	6
8	7...12	3...13	1...7	6...10	8
9	2...12	6...21	1...5	2...8	5
10	4...10	4...8	3...12	4...6	7
11	7...11	4...6	5...17	2...4	6,5
12	3...13	5...11	3...8	2...12	8
13	4...14	4...7	11...21	3...13	9
14	7...12	11...17	7...11	5...11	8
15	8...16	7...12	4...8	7...15	7
16	5...15	2...12	2...7	4...14	9
17	7...13	4...16	3...7	6...12	8
18	4...12	6...14	5...12	3...11	7,5
19	3...11	6...11	7...19	2...10	8
20	4...15	5...13	3...7	2...14	7
21	6...14	4...17	5...11	5...13	8
22	6...16	7...11	4...7	5...15	6
23	1...9	3...11	6...14	2...8	7
24	2...12	20...24	2...7	1...11	12
25	2...10	4...7	3...15	1...9	9

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 9. Введення в економетричне моделювання

Практичне заняття №11. Реалізація методу найменших квадратів в MS Excel

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Реалізація метода найменших квадратів в MS Excel

2. Варіанти індивідуальних завдань

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf

2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf

3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf

4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/

5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf

6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

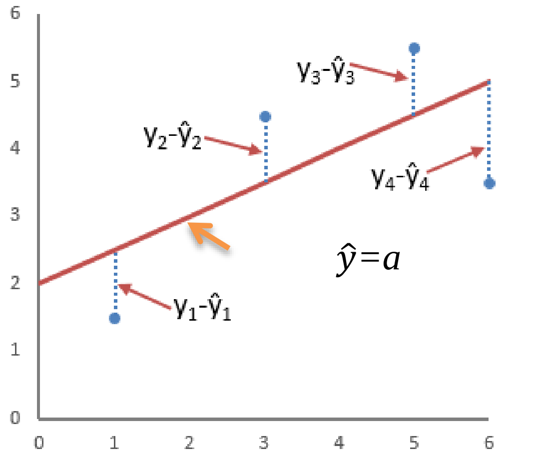


Рис.1. Відхилення фактичних значень параметра от лінії регресії

1. Реалізація метода найменших квадратів в MS Excel

Метод найменших квадратів - це математична процедура складання лінійного рівняння максимально відповідного набору впорядкованих пар шляхом знаходження значень для a і b коефіцієнтів в рівнянні прямої (лінійної) регресії

$$\hat{y} = A + b * x.$$

Мета методу найменших квадратів полягає в мінімізації загальної квадратичної помилки між значеннями y_i (фактичне значення результативної ознаки) і $\hat{y}_i$ (теоретичне значення результативної ознаки, знайдене з рівняння регресії):

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \quad \to \quad \min.$$

де n – число відхилень $(y_i-\hat{y}_i)$, $i=1,n$ від лінії регресії $\hat{y}=a+b*x$ максимально відповідає даним $(x_i,y_i), i=1,n$. Відхилення проілюстровані на рис. 1.

Приклад. Підприємство нарощує виробництво предметів споживання щомісяця. Дані по виробництву предметів споживання за перші 10 місяців дані в таблиці 1. За допомогою методу найменших квадратів визначити лінійне рівняння регресії максимально відповідне даним виробництва за перші 10 місяців, а також за цими даними за допомогою функції ТЕНДЕНЦІЯ MS Excel обчислити прогноз обсягу виробництва на майбутнє півріччя.

Таблиця 1. Обсяги виробництва

Месяц	Число предметов
1	8
2	6
3	10
4	6
5	10
6	13
7	9
8	11
9	15
10	17

Таблиця 2. Попередні розрахунки

Месяц	Число предметов			
x	y	xy	x²	y²
1	8	8	1	64
2	6	12	4	36
3	10	30	9	100
4	6	24	16	36
5	10	50	25	100
6	13	78	36	169
7	9	63	49	81
8	11	88	64	121
9	15	135	81	225
10	17	170	100	289
Σx=55	Σx=105	Σxy=658	Σx²=385	Σy²=1221

Для вирішення завдання виконуємо попередні розрахунки відповідно до даних таблиці 2 та за формулами знаходимо параметри a,b для рівняння регресії:

$$x_{\text{ср}} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$y_{\text{ср}} = \frac{105}{10} = 10.5$$

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10(658) - (55)(105)}{10(385) - (55)^2}$$

$$b = \frac{805}{825} = 0.976$$

$$a = y_{\text{ср}} - bx_{\text{ср}} = 10.5 - (0.976)5.5 = 5.13$$

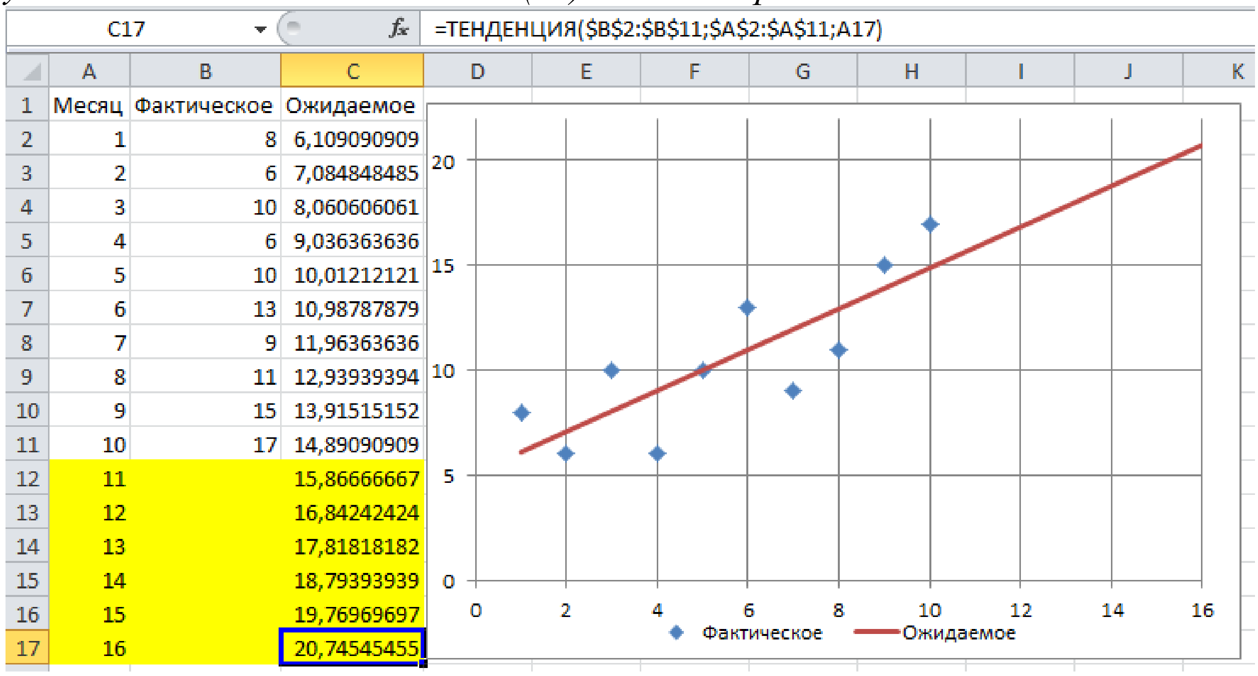
Рівняння лінійної регресії для обсягу виробництва предметів споживання в нашому прикладі буде визначатися таким виразом:

$\hat{y} = 5.13 + 0.976x.$

Оскільки рівняння має позитивний нахил 0.976, то обсяг виробництва предметів споживання в часі збільшується з середньою швидкістю до 1 предмета в місяць.

Дзвінок очікуваного (прогнозованого) значення обсягу виробництва предметів споживання на 16-ий місяць обчислюються з знайденого рівняння лінійної регресії:

$\hat{y} = 5.13 + 0.976x = 5.13 + 0.976\ (16) \approx 20.7 \approx 21$ *предмет*



	A	B	C
1	Месяц	Фактическое	Ожидаемое
2	1	8	6,109090909
3	2	6	7,084848485
4	3	10	8,060606061
5	4	6	9,036363636
6	5	10	10,01212121
7	6	13	10,98787879
8	7	9	11,96363636
9	8	11	12,93939394
10	9	15	13,91515152
11	10	17	14,89090909
12	11		15,86666667
13	12		16,84242424
14	13		17,81818182
15	14		18,79393939
16	15		19,76969697
17	16		20,74545455

Рис. 2. Фактичні та очікувані значення обсягів виробництва предметів споживання по місяцях

Результат розв'язання задачі за допомогою функції ТЕНДЕНЦІЯ в програмі MS Excel представлений на рис. 2. Тут представлені фактичні та очікувані значення обсягів виробництва по місяцях і їх графічна інтерпретація у вигляді упорядкованих фактичних обсягів виробництва (точки) і їх лінійної регресії (пряма) максимально наближеною за методом найменших квадратів.

2. Варіанти індивідуальних завдань

У цій таблиці p_1 - число букв в Вашому імені.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Фактичне	$8+p_1$	6	$10-p_1$	$6+p_1$	10	$13-p_1$	$9+p_1$	11	15	17

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 10. Парний регресійний аналіз

Практичне заняття №12. Типове завдання побудови парної регресії і аналізу її якості

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 6 год.

Навчальні питання

1. Типова задача побудови парної регресії і аналізу її якості
2. Варіанти індивідуальних завдань

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf

2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf

3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf

4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/

5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf

6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Типова задача побудови парної регресії і аналізу її якості

Завдання. По територіях регіонів наводяться дані по середньоденне прожитковий мінімум і середньоденна заробітна плата на одного працездатного жителя (таблиця 1).

Таблиця 1. Дані спостережень по регіонах

Регіон	Середньоденний прожитковий мінімум (х)	Середньоденна заробітна плата (у)
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159

12	115	173

<u>*Потрібно*</u>:

1. Побудувати лінійне рівняння парної регресії *y* по *x*.

2. Розрахувати лінійний коефіцієнт парної кореляції, коефіцієнт детермінації і середню помилку апроксимації.

3. Оцінити статистичну значущість рівняння регресії в цілому, параметрів регресії і кореляції за допомогою *F*-критерію Фішера і *t*-критерію Стьюдента.

4. Виконати прогноз заробітної плати *y* при прогнозному значенні середньодушового прожиткового мінімуму *x*, що становить 107% від середнього рівня.

5. Оцінити точність прогнозу, розрахувавши помилку прогнозу і його довірчий інтервал.

6. Виконати рішення задачі за допомогою функції *Регресія* пакета аналізу *MS Excel* і привести графічну інтерпретацію результатів рішення.

<u>Рішення</u>.

1. Для розрахунку параметрів рівняння лінійної регресії будуємо розрахункову таблицю 2.

Таблиця 2. Розрахункові дані для знаходження параметрів регресії

№	x	y	$y \cdot x$	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	$(y-\hat{y}_x)^2$	A_i
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	78	133	10374	6084	17689	148,78	–15,78	249,01	11,86
2	82	148	12136	6724	21904	152,46	–4,46	19,89	3,01
3	87	134	11658	7569	17956	157,06	–23,06	531,76	17,21
4	79	154	12166	6241	23716	149,70	4,30	18,49	2,79
5	89	162	14418	7921	26244	158,90	3,10	9,61	1,91
6	106	195	20670	11236	38025	174,54	20,46	418,61	10,49
7	67	139	9313	4489	19321	138,66	0,34	0,12	0,24
8	88	158	13904	7744	24964	157,98	0,02	0,00	0,01
9	73	152	11096	5329	23104	144,18	7,82	61,15	5,14
10	87	162	14094	7569	26244	157,06	4,94	24,40	3,05
11	76	159	12084	5776	25281	146,94	12,06	145,44	7,58
12	115	173	19895	13225	29929	182,82	–9,82	96,43	5,68
Итого	1027	1869	161808	89907	294377	1869,08	–0,08	1574,91	68,97
Среднее значение	85,58	155,75	13484,0	7492,25	24531,4	155,76	–	131,24	5,75
σ	12,97	16,53	–	–	–	–	–		–
σ^2	168,31	273,34	–	–	–	–	–		–

За формулами знаходимо параметри регресії

$$b=\frac{\overline{y\cdot x}-\overline{y}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}=\frac{13484-155,75\cdot 85,58}{7492,25-85,58^2}=\frac{154,915}{168,31}=0,92;$$

$$a=\overline{y}-b\cdot\overline{x}=155,75-0,92\cdot 85,58=77,02.$$

В результаті рівняння регресії:

$$y=77,02+0,92\cdot x.$$

Рівняння регресії дозволяє зробити висновок, що зі збільшенням середньодушового прожиткового мінімуму на 1 у.о. середньоденна заробітна плата зростає в середньому на 0,92 у.о.

Після знаходження рівняння регресії заповнюємо стовпці 7-10 таблиці 3.

2. Тісноту лінійного зв'язку оцініть парний коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,92 \cdot \frac{12,97}{16,53} = 0,722;$$

Оскільки значення коефіцієнта кореляції більше 0,7, то це говорить про наявність досить тісного лінійного зв'язку між ознаками.

Коефіцієнт детермінації: r^2_{xy}=0,521. Це означає, що 52% варіації заробітної плати (y) пояснюється варіацією фактора x - середньодушового прожиткового мінімуму.

Якість моделі визначає середня помилка апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum A_i = \frac{68,97}{12} = 5,75\%.$$

Якість побудованої моделі оцінюється як хороший, так як А не перевищує 10%.

3. Оцінку статистичної значущості рівняння регресії в цілому проведемо за допомогою F-критерію Фішера. Фактичне значення F-критерію складе

$$F_{\text{факт}} = \frac{r^2_{xy}}{1 - r^2_{xy}} \cdot (n-2) = \frac{0,521}{1 - 0,521} \cdot 10 = 10,88.$$

Табличне значення критерію при рівні значущості $\alpha = 5\%$ і ступенях свободи $k_1=1$ і $k_2=12\text{-}2=10$ становить $F_{табл}$= 4,96. Так як $F_{факт}=10,41>F_{табл}=4,96$, то рівняння регресії визнається статистично значущим.

Оцінку статистичної значущості параметрів регресії і кореляції проведемо за допомогою t-критерію Стьюдента і шляхом розрахунку довірчого інтервалу кожного з параметрів.

Табличне значення t-критерію для числа ступенів свободи $n\text{-}2=12\text{-}2=10$ і рівня значущості $\alpha=0,05$ складе $t_{табл}=2,23$.

Визначимо стандартні помилки m_a, m_b, m_{rxy}.

Попередньо визначимо залишкову дисперсію на одну ступінь свободи

$$S^2_{\text{ост}} = \frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{n-2} = \frac{1574,91}{10} = 157,49$$

Тоді стандартні помилки параметрів лінійної регресії і коефіцієнта кореляції складуть значення:

$$m_a = \sqrt{S^2_{\text{ост}} \frac{\sum x^2}{n^2\sigma_x^2}} = \sqrt{157,49 \cdot \frac{89907}{12^2 \cdot 164,94}} = 24,42;$$

$$m_b = \sqrt{\frac{S^2_{\text{ост}}}{n \cdot \sigma_x^2}} = \sqrt{\frac{157,49}{12 \cdot 164,94}} = 0,282;$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r^2_{xy}}{n-2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,521}{12-2}} = 0,219.$$

Використовуємо ці значення для зіставлення з параметрами регресії і коефіцієнтом кореляції по t-критерієм Стьюдента:

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{77,02}{24,42} = 3,15;$$

$$t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0,92}{0,282} = 3,26;$$

$$t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0,722}{0,219} = 3,30.$$

Фактичні значення *t*-Статистика перевершують табличне значення:

$t_a = 3,26 > t_{\text{табл}} = 2,3$; $t_b = 3,16 > t_{\text{табл}} = 2,3$; $t_{r_{xy}} = 3,25 > t_{\text{табл}} = 2,3$,

тому параметри *a, b* і r_{xy} не випадково відрізняються від нуля, а статистично значущі.

Розрахуємо довірчі інтервали для параметрів регресії *a* і *b*. Для цього визначимо граничну помилку для кожного показника:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a = 2,23 \cdot 24,42 = 54,46;$$

$$\Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b = 2,23 \cdot 0,282 = 0,63.$$

довірчі інтервали

$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 77,02 \pm 54,46$ и $22,56 \le a^* \le 131,48$;

$\gamma_b = b \pm \Delta_b = 0,92 \pm 0,63$ и $0,29 \le b^* \le 1,55$

Аналіз верхньої та нижньої меж довірчих інтервалів приводить до висновку про те, що з імовірністю $p=1-\alpha=0,95$ параметри *a* і *b*, перебуваючи в зазначених межах, не приймають нульових значень, тобто є статистично значущими і суттєво відмінні від нуля.

4. Отримані оцінки рівняння регресії дозволяють використовувати його для прогнозу. Якщо прогнозне значення прожиткового мінімуму становитиме: $x_0=\bar{x}*1,07=85,6*1,07=91,6$ *у.о.* Тоді індивідуальне прогнозне значення заробітної плати складе:

$\hat{y}=77,02+0,92\times91,6=161,29$ *у.о.*

5. Помилка прогнозу складе:

$$\Delta_{\hat{y}_0} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_0} = 2,23 \cdot 13,17 = 29,37.$$

Гранична помилка прогнозу, яка в *95%* випадків не буде перевищена, складе:

$$\Delta_{\hat{y}_0} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_0} = 2,23 \cdot 13,17 = 29,37.$$

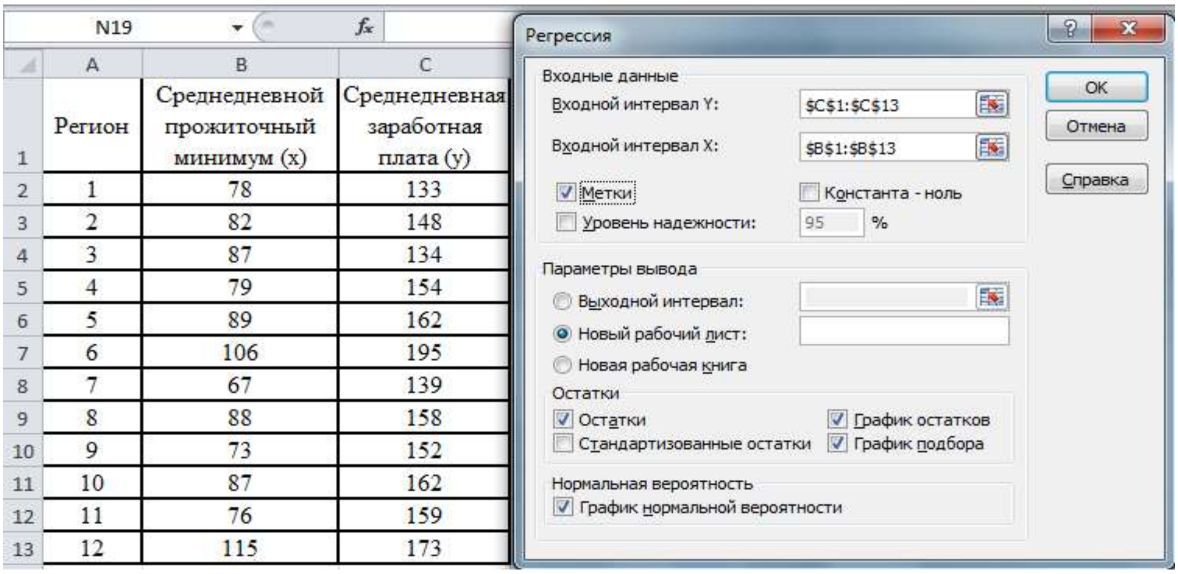
Довірчий інтервал прогнозу:

$\gamma_{\hat{y}_0} = \hat{y}_0 \pm \Delta_{\hat{y}_0} = 161,29 \pm 29,37$ и $131,92 \le y_0^* \le 190,66$.

Прогноз середньоденний заробітної плати є надійним ($p=1-\alpha=1-0,05=0,95$) і находиться в межах від *131,92 у.о.* до *190,66 у.о.*

6. С допомогою інструменту аналізу даних *Регресія* можна отримати результати регресійної статистики, дисперсійного аналізу, довірчих інтервалів, залишки і графіки підбору лінії регресії.

Для цього вводимо вихідні дані спостережень згідно рис. 2.5 і задаємо параметри функції *Регресія*.



	A	B	C
1	Регион	Среднедневной прожиточный минимум (x)	Среднедневная заработная плата (y)
2	1	78	133
3	2	82	148
4	3	87	134
5	4	79	154
6	5	89	162
7	6	106	195
8	7	67	139
9	8	88	158
10	9	73	152
11	10	87	162
12	11	76	159
13	12	115	173

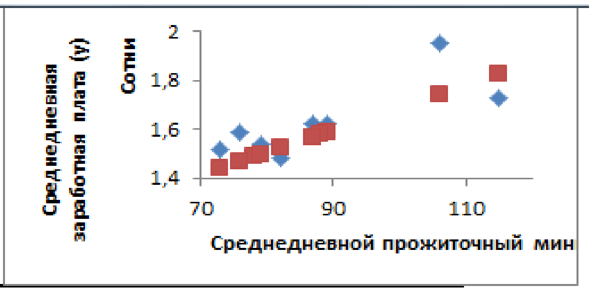
Рис.1. Введення вихідних даних параметрів регресії

Тут: *Вхідний інтервал Y* діапазон, що містить дані результативної ознаки; *Вхідний інтервал X* - діапазон, що містить дані ознаки-фактора; *Мітки* – прапорець, який вказує, містить перший рядок назви стовпців; *Константа-нуль* - прапорець, який вказує на наявність або відсутність вільного члена в рівнянні регресії; *Вихідний інтервал* - досить вказати ліву верхню клітинку майбутнього діапазону результату; *Новий робочий лист* - можна вказати довільне ім'я нового аркуша (або не вказувати, тоді результати виводяться на новостворений лист). Далі задаємо параметри виведення результатів.

Отримуємо наступні результати для розглянутого вище прикладу, представлені на рис. 2.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,72102521
R-квадрат	0,51987736
Нормированный R-квад	0,47186509
Стандартная ошибка	12,5495908
Наблюдения	12



Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Знач-ть F*
Регрессия	1	1705,3277	1705,328	10,82801	0,008142
Остаток	10	1574,9223	157,4922		
Итого	11	3280,25			

	Коэфф-ты	*Ст.ошибка*	*t-ста-ка*	*P-Знач-ие*	*Ниж.95%*	*Верх.95%*
Y-пересечение	76,9764852	24,211561	3,179328	0,009831	23,02976	130,9232
Среднедн. минимум (x)	0,92043055	0,2797156	3,290594	0,008142	0,297185	1,543676

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказ.(у)*	*Остатки*
1	148,770068	-15,770068
2	152,451791	-4,4517905
3	157,053943	-23,053943
4	149,690499	4,3095011
5	158,894804	3,1051956
6	174,542124	20,457876
7	138,645332	0,3546678
8	157,974374	0,0256262
9	144,167916	7,8320845
10	157,053943	4,9460567
11	146,929207	12,070793
12	182,825999	-9,8259988

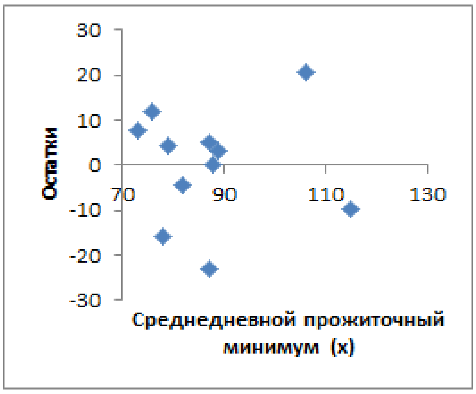


Рис. 2. Парний регресивний аналіз за допомогою функції *Регресія*

Звідки виписуємо, округляючи до 4 знаків після коми і переходячи до наших позначень:

Рівняння регресії:

$\hat{y}_x = 76,9765 + 0,9204x$.

Коефіцієнт кореляції:

$r_{xy} = 0,7210$.

Коефіцієнт детермінації:

$r_{xy}^2 = 0,5199$.

Фактичне значення F-критерію Фішера:

$F = 10,8280$

Число ступенів свободи (*df*):

Факторна $m=1$, залишкова $n-2=10$.

Залишкова дисперсія на одну ступінь свободи (*MS*):

$S_{ост}^2 = 157,4922$.

Корінь квадратний із залишкової дисперсії (стандартна помилка):

$S_{ост} = 12,5496$.

Стандартні помилки для параметрів регресії:

$m_a = 24,2116$, $\quad m_b = 0,2797$.

Фактичні значення t-критерію Стьюдента:

$t_a = 3{,}1793$, $t_b = 3{,}2906$.

Довірчі інтервали:

$23{,}0298 \le a^* \le 130{,}9232$,

$0{,}2972 \le b^* \le 1{,}5437$.

Таким чином, знайдені всі розглянуті вище параметри і характеристики рівняння регресії. Як бачимо, результати «ручного рахунку» від комп'ютерного відрізняються незначно (відмінності пов'язані з помилками округлення).

2. Варіанти індивідуальних завдань

По територіях регіонів наводяться дані середньоденний прожитковий мінімум і середньоденна заробітна плата на одного працездатного жителя (табл. 1). У цій таблиці р1 - число букв в повному імені, р2 - число букв у прізвищі.

Таблиця 3. Дані спостережень по регіонах

регіон	Середньоденний прожитковий мінімум (x)	Середньоденна заробітна плата (y)
1	$78+p_1$	$133+p_2$
2	$80+p_2$	148
3	87	$135+p_1$
4	79	154
5	106	$157+p_1$
6	$106+p_1$	195
7	67	139
8	98	$158+p_2$
9	$73+p_2$	152
10	87	162
11	86	$146+p_2$
12	$110+p_1$	173

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 11. Множинний регресійний аналіз

Практичне заняття №13. Типове завдання побудови множинної регресії і аналізу її якості

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 6 год.

Навчальні питання

1. Типова задача побудови множинної регресії і аналізу її якості
2. Варіанти індивідуальних завдань

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf

2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf

3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf

4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/

5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf

6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Типова задача побудови множинної регресії і аналізу її якості

Завдання. За 20 підприємствам (табл. 1) регіону вивчається залежність вироблення продукції на одного працівника y (тис. грн.) Від введення в дію нових основних фондів x_1(% від вартості фондів на кінець року) і від питомої ваги робітників високої кваліфікації в загальній чисельності робітників x_2(%).

Таблиця 1. Виробіток продукції на підприємствах на одного працівника

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7,0	3,9	10,0	11	9,0	6,0	21,0
2	7,0	3,9	14,0	12	11,0	6,4	22,0
3	7,0	3,7	15,0	13	9,0	6,8	22,0
4	7,0	4,0	16,0	14	11,0	7,2	25,0
5	7,0	3,8	17,0	15	12,0	8,0	28,0
6	7,0	4,8	19,0	16	12,0	8,2	29,0
7	8,0	5,4	19,0	17	12,0	8,1	30,0
8	8,0	4,4	20,0	18	12,0	8,5	31,0
9	8,0	5,3	20,0	19	14,0	9,6	32,0
10	10,0	6,8	20,0	20	14,0	9,0	36,0

Потрібно:

1. Побудувати лінійну модель множинної регресії. Записати стандартизоване рівняння множинної регресії. На основі стандартизованих коефіцієнтів регресії і середніх коефіцієнтів еластичності ранжувати фактори за ступенем їх впливу на результат.

2. Знайти коефіцієнти парної, приватної і множинної кореляції. Провести аналіз їх значень.

3. Знайти скоригований коефіцієнт множинної детермінації. Порівняти його із загальним коефіцієнтом детермінації.

4. За допомогою F-критерію Фішера оцінити статистичну надійність рівняння регресії і коефіцієнта детермінації $R^2_{yx_1x_2}$.

5. За допомогою *t*-критерію оцінити статистичну значущість коефіцієнтів чистої регресії.

6. За допомогою приватних *F*-критерію Фішера оцінити доцільність включення в рівняння множинної регресії фактора x_1 віслюку x_2 і фактора x_2 після x_1

7. Скласти рівняння лінійної парної регресії, залишивши лише один значущий фактор.

8. Знайти матрицю парних коефіцієнтів кореляції за допомогою інструменту аналізу даних *Кореляція* MS Excel.

9. Виконати рішення задачі за допомогою функції *Регресія* пакета аналізу MS Excel і привести графічну інтерпретацію результатів рішення.

Рішення.

Для зручності проведення розрахунків помістимо результати проміжних розрахунків в таблицю 2:

Таблиця 2. Розрахунок компонент для знаходження рівняння регресії

№	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y^2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	7,0	3,9	10,0	27,3	70,0	39,0	15,21	100,0	49,0
2	7,0	3,9	14,0	27,3	98,0	54,6	15,21	196,0	49,0
3	7,0	3,7	15,0	25,9	105,0	55,5	13,69	225,0	49,0
4	7,0	4,0	16,0	28,0	112,0	64,0	16,0	256,0	49,0
5	7,0	3,8	17,0	26,6	119,0	64,6	14,44	289,0	49,0
6	7,0	4,8	19,0	33,6	133,0	91,2	23,04	361,0	49,0
7	8,0	5,4	19,0	43,2	152,0	102,6	29,16	361,0	64,0
8	8,0	4,4	20,0	35,2	160,0	88,0	19,36	400,0	64,0
9	8,0	5,3	20,0	42,4	160,0	106,0	28,09	400,0	64,0
10	10,0	6,8	20,0	68,0	200,0	136,0	46,24	400,0	100,0
11	9,0	6,0	21,0	54,0	189,0	126,0	36,0	441,0	81,0
12	11,0	6,4	22,0	70,4	242,0	140,8	40,96	484,0	121,0
13	9,0	6,8	22,0	61,2	198,0	149,6	46,24	484,0	81,0
14	11,0	7,2	25,0	79,2	275,0	180,0	51,84	625,0	121,0
15	12,0	8,0	28,0	96,0	336,0	224,0	64,0	784,0	144,0
16	12,0	8,2	29,0	98,4	348,0	237,8	67,24	841,0	144,0
17	12,0	8,1	30,0	97,2	360,0	243,0	65,61	900,0	144,0
18	12,0	8,5	31,0	102,0	372,0	263,5	72,25	961,0	144,0
19	14,0	9,6	32,0	134,4	448,0	307,2	92,16	1024,0	196,0
20	14,0	9,0	36,0	126,0	504,0	324,0	81,0	1296,0	196,0
Сумма	192	123,8	446	1276,3	4581	2997,4	837,74	10828,0	1958,0
Ср. знач.	9,6	6,19	22,3	63,815	229,05	149,87	41,887	541,4	97,9

Знайдемо середньоквадратичні відхилення регресії і ознак:

$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{97,9 - 9,6^2} = \sqrt{5,74} = 2,396$;

$\sigma_{x_1} = \sqrt{\overline{x_1^2} - \bar{x}_1^2} = \sqrt{41,887 - 6,19^2} = \sqrt{3,571} = 1,890$;

$\sigma_{x_2} = \sqrt{\overline{x_2^2} - \bar{x}_2^2} = \sqrt{541,4 - 22,3^2} = \sqrt{44,11} = 6,642$.

1. Для знаходження параметрів лінійного рівняння множинної регресії

$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$

розрахуємо спочатку парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{yx_1} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{63,815 - 6,19 \cdot 9,6}{1,890 \cdot 2,396} = 0,970;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{229,05 - 22,3 \cdot 9,6}{6,642 \cdot 2,396} = 0,941;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{149,87 - 6,19 \cdot 22,3}{1,890 \cdot 6,642} = 0,943.$$

Знаходимо по готовим формулами коефіцієнти чистої регресії і параметр a:

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{2,396}{1,890} \cdot \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,946;$$

$$b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \cdot \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{2,396}{6,642} \cdot \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,0856;$$

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 = 9,6 - 0,946 \cdot 6,19 - 0,0856 \cdot 22,3 = 1,835.$$

В результаті отримаємо наступне рівняння множинної регресії:

$\hat{y} = 1,835 + 0,946 \cdot x_1 + 0,0856 \cdot x_2$.

Рівняння регресії показує, що при збільшенні введення в дію основних фондів на 1% (при незмінному рівні питомої ваги робітників високої кваліфікації) вироблення продукції на одного робітника збільшується в середньому на 0,946 тис. грн., А при збільшенні питомої ваги робітників високої кваліфікації в загальної чисельності робітників на 1% (при незмінному рівні введення в дію нових основних фондів) вироблення продукції на одного робітника збільшується в середньому на 0,086 тис. грн.

Після знаходження рівняння регресії складемо нову розрахункову таблицю 3 для визначення теоретичних значень результативного ознаки, остаточний дисперсії і середньої помилки апроксимації.

Залишкова дисперсія:

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n} = \frac{6,093}{20} = 0,305.$$

Середня помилка апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right| \cdot 100\% = \frac{95,437\%}{20} = 4,77\%.$$

Якість моделі, виходячи з відносних відхилень по кожному спостереженню, визнається хорошим, тому що середня помилка апроксимації перевищує 10%.

Коефіцієнти β_1 і β_2 стандартизованого рівняння регресії

$$\hat{t}_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon .$$

Таблиця 3. Розрахунок компонент регресійного аналізу

№	y	x_1	x_2	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$	A_i, %
1	7,0	3,9	10,0	6,380	0,620	0,384	8,851
2	7,0	3,9	14,0	6,723	0,277	0,077	3,960
3	7,0	3,7	15,0	6,619	0,381	0,145	5,440
4	7,0	4,0	16,0	6,989	0,011	0,000	0,163
5	7,0	3,8	17,0	6,885	0,115	0,013	1,643
6	7,0	4,8	19,0	8,002	-1,002	1,004	14,317
7	8,0	5,4	19,0	8,570	-0,570	0,325	7,123
8	8,0	4,4	20,0	7,709	0,291	0,084	3,633
9	8,0	5,3	20,0	8,561	-0,561	0,315	7,010
10	10,0	6,8	20,0	9,980	0,020	0,000	0,202
11	9,0	6,0	21,0	9,309	-0,309	0,095	3,429
12	11,0	6,4	22,0	9,773	1,227	1,507	11,158
13	9,0	6,8	22,0	10,151	-1,151	1,325	12,789
14	11,0	7,2	25,0	10,786	0,214	0,046	1,944
15	12,0	8,0	28,0	11,800	0,200	0,040	1,668
16	12,0	8,2	29,0	12,075	-0,075	0,006	0,622
17	12,0	8,1	30,0	12,066	-0,066	0,004	0,547
18	12,0	8,5	31,0	12,530	-0,530	0,280	4,413
19	14,0	9,6	32,0	13,656	0,344	0,118	2,459
20	14,0	9,0	36,0	13,431	0,569	0,324	4,067
Сумма	192	123,8	446	191,992	0,008	6,093	95,437
Ср. знач.	9,6	6,19	22,3	9,6	–	0,305	4,77

знаходяться за формулами

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0,946 \cdot \frac{1,890}{2,396} = 0,746 ;$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0,0856 \cdot \frac{6,642}{2,396} = 0,237 .$$

Тобто стандартизоване рівняння буде виглядати наступним чином:

$$\hat{t}_y = 0,746 \cdot t_{x_1} + 0,237 \cdot t_{x_2} .$$

Так як стандартизовані коефіцієнти регресії можна порівнювати між собою, то можна сказати, що введення в дію нових основних фондів надає більший вплив на вироблення продукції, ніж питома вага робітників високої кваліфікації.

Порівнювати вплив факторів на результат можна також за допомогою середніх коефіцієнтів еластичності :

$$\bar{Э}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}} .$$

Рахуємо:

$$\bar{Э}_1 = 0,946 \cdot \frac{6,19}{9,6} = 0,61; \quad \bar{Э}_2 = 0,0856 \cdot \frac{22,3}{9,6} = 0,20 .$$

Тобто збільшення тільки основних фондів (від свого середнього значення) або тільки питомої ваги робітників високої кваліфікації на 1% збільшує в середньому вироблення продукції на 0,61% або 0,20% відповідно. Таким чином, підтверджується більший вплив на результат y фактора x_1, ніж фактора x_2.

2. Коефіцієнти парної кореляції ми вже знайшли:

$$r_{yx_1} = 0,970 ; \; r_{yx_2} = 0,941 ; \; r_{x_1x_2} = 0,943 .$$

Вони вказують на досить сильну зв'язок кожного фактора з результатом, а також високу міжфакторну залежність (фактори x_1 і x_2 явно колінеарні, так як $r_{x_1x_2} = 0,943 > 0,7$). При такій сильній міжфакторної залежності рекомендується один з факторів виключити з розгляду.

Окремі коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку між результатом і відповідним фактором при усуненні впливу інших факторів, включених в рівняння регресії.

При двох чинниках приватні коефіцієнти кореляції розраховуються наступним чином:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1-r_{yx_2}^2\right)\cdot\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{\sqrt{\left(1-0,941^2\right)\cdot\left(1-0,943^2\right)}} = 0,734;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1-r_{yx_1}^2\right)\cdot\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{\sqrt{\left(1-0,970^2\right)\cdot\left(1-0,943^2\right)}} = 0,325.$$

Якщо порівняти коефіцієнти парної і приватної кореляції, то можна побачити, що з-за високої міжфакторної залежності коефіцієнти парної кореляції дають завищені оцінки тісноти зв'язку. Саме з цієї причини рекомендується при наявності сильної колинеарности (взаємозв'язку) факторів виключати з дослідження той фактор, у якого тіснота парної залежності менше, ніж тіснота міжфакторного зв'язку .

Коефіцієнт множинної кореляції визначити через матриці парних коефіцієнтів кореляції:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}},$$

Де Δr - визначник матриці парних коефіцієнтів кореляції
і Δr_{11} – визначник матриці міжфакторної кореляції представляються як

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

знаходимо:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{0,0058}{0,1108}} = 0,973.$$

Аналогічний результат отримаємо при використанні інших формул:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,305}{5,74}} = 0,973;$$

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}} = \sqrt{0,746 \cdot 0,970 + 0,237 \cdot 0,941} = 0,973;$$

Коефіцієнт множинної кореляції вказує на вельми сильну зв'язок всього набору факторів з результатом.

3. Некоректований коефіцієнт множинної детермінації $R_{yx_1x_2}^2 = 0,947$ оцінює частку дисперсії результату за рахунок представлених в рівнянні факторів в загальній варіації результату. Тут ця частка становить 94,7% і вказує на досить високу ступінь обумовленості варіації результату варіацією факторів, іншими словами - на надто тісний зв'язок факторів з результатом.

Скоригований коефіцієнт множинної детермінації

$$\hat{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{(n-1)}{(n-m-1)} = 1 - \left(1 - 0,947\right)\frac{20-1}{20-2-1} = 0,941$$

визначає тісноту зв'язку з урахуванням ступенів свободи загальної і залишкової дисперсій. Він дає таку оцінку тісноти зв'язку, яка не залежить від числа факторів і тому може порівнюватися за різними моделями з різним числом факторів. Обидва коефіцієнта вказують на досить високу (більше 94%) детермінованість результату у в моделі факторами x_1 і x_2.

4. Оцінку надійності рівняння регресії в цілому і показника тісноти зв'язку $R_{yx_1x_2}$ дає F-критерій Фішера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m-1}{m}.$$

У нашому випадку фактичне значення F-критерію Фішера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,973^2}{1-0,973^2}\cdot\frac{20-2-1}{2} = 151,88.$$

Отримали, що факт $F_{\text{факт}} = 151,88 > F_{\text{табл}} = 3,59$ (при $n=20$), тобто ймовірність випадково отримати таке значення F-критерію не перевищує допустимий рівень значимості 5%. Отже, отримане значення не випадково, воно сформувалося під впливом істотних факторів, тобто підтверджується статистична значимість всього рівняння і показника тісноти зв'язку $R_{yx_1x_2}$.

5. Оцінимо статистичну значущість параметрів чистої регресії за допомогою t-критерію Стьюдента. Розрахуємо стандартні помилки коефіцієнтів регресії за формулами:

$$m_{b_1} = \frac{\sigma_y\cdot\sqrt{1-R^2_{yx_1x_2}}}{\sigma_{x_1}\cdot\sqrt{1-r^2_{x_1x_2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{2,396\cdot\sqrt{1-0,973^2}}{1,890\cdot\sqrt{1-0,943^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0,2132;$$

$$m_{b_2} = \frac{\sigma_y\cdot\sqrt{1-R^2_{yx_1x_2}}}{\sigma_{x_2}\cdot\sqrt{1-r^2_{x_1x_2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{2,396\cdot\sqrt{1-0,973^2}}{6,642\cdot\sqrt{1-0,943^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0,0607.$$

Фактичні значення t-критерію Стьюдента:

$$t_{b_1} = \frac{b_1}{m_{b_1}} = \frac{0,946}{0,2132} = 4,44,\quad t_{b_2} = \frac{b_2}{m_{b_2}} = \frac{0,0856}{0,0607} = 1,41.$$

Табличне значення критерію при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і числі ступенів свободи $k = 17$ складе $t_{табл}(a=0,05;\ k=17) = 2,11$.

Таким чином, визнається статистична значимість параметра b_1, так як $t_{b1} > t_{табл}$, і випадкова природа формування параметра b_2, так як $t_{b2} < t_{табл}$.

Довірчі інтервали для параметрів чистої регресії:

$$b_1 - m_{b_1}\cdot t_{\text{табл}} \le b_1^* \le b_1 + m_{b_1}\cdot t_{\text{табл}},\quad 0,496 \le b_1^* \le 1,396$$

$$b_2 - m_{b_2}\cdot t_{\text{табл}} \le b_2^* \le b_2 + m_{b_2}\cdot t_{\text{табл}},\quad -0,0425 \le b_1^* \le 0,2137.$$

6. За допомогою приватних F-критеріїв Фішера оцінимо доцільність включення в рівняння множинної регресії фактора x_1 після x_2 і фактора x_2 після x_1 за допомогою формул:

$$F_{x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_2}}{1-R^2_{yx_1x_2}}\cdot\frac{n-m-1}{1};\quad F_{x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_1}}{1-R^2_{yx_1x_2}}\cdot\frac{n-m-1}{1}.$$

Знайдемо $R^2_{yx_1}$ і $R^2_{yx_2}$:

$R^2_{yx_1} = r^2_{yx_1} = 0,970^2 = 0,941;$

$R^2_{yx_2} = r^2_{yx_2} = 0,941^2 = 0,885.$

маємо:

$$F_{x_1} = \frac{0,947 - 0,885}{1 - 0,947} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{1} = 19,89;$$

$$F_{x_2} = \frac{0,947 - 0,941}{1 - 0,947} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{1} = 1,924.$$

Отримали, що $F_{x\,2} = 1,924 < F_{табл}(\alpha=0,05;\ k_1=1;\ k_2=17)=4,145$. Отже, включення в модель чинника x_2 після того, як в модель включено фактор x_1 статистично недоцільно: приріст факторної дисперсії за рахунок додаткового ознаки x_2 виявляється незначним, несуттєвим; фактор x_2 включати в рівняння після фактора x_1 не слід.

Якщо поміняти початковий порядок включення факторів в модель і розглянути варіант включення x_1 після x_2, то результат розрахунку приватного F-критерію для x_1 буде іншим. $F_{x1} = 19,89 > F_{табл} = 4,45$, тобто ймовірність його випадкового формування менше прийнятого стандарту α=0,05 (5%). Отже, значення приватного F-критерію для додатково включеного чинника x_1 не випадково, є статистично значущим, надійним, достовірним: приріст факторної дисперсії за рахунок додаткового фактора x_1 є істотним. Фактор x_1 повинен бути присутнім в рівнянні, в тому числі у варіанті, коли він додатково включається після фактора x_2.

7. Загальний висновок полягає в тому, що множинна модель з факторами x_1 і x_2 з $R^2_{yx_1x_2} = 0,947$ містить неінформативний фактор x_2. Якщо виключити фактор x_2, то можна обмежитися рівнянням парної регресії:

$$\hat{y}_{x_1} = \alpha + \beta x_1.$$

Знайдемо його параметри:

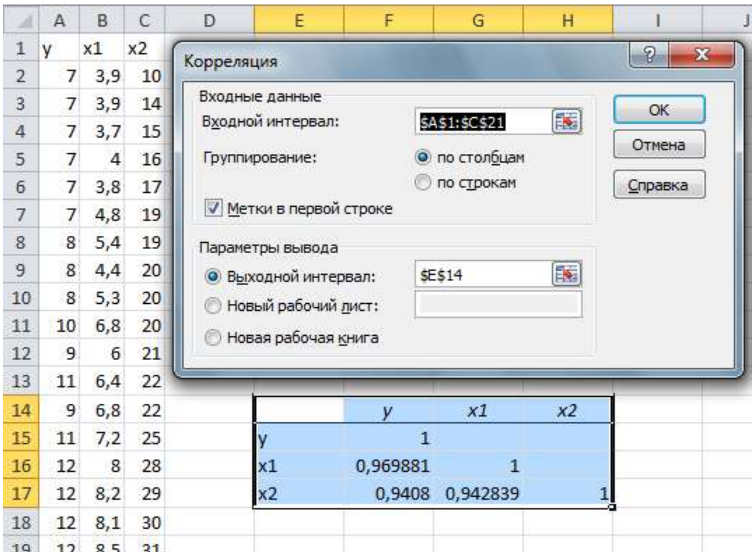
$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(y,\ x_1)}{\sigma_{x_2}} = \frac{63,815 - 6,19 \cdot 9,6}{3,571} = 1,23;$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x} = 9,6 - 1,23 \cdot 6,19 = 1,99.$$

Таким чином, отримуємо рівняння парної регресії виду:

$$\hat{y}_{x_1} = 1,99 + 1,23 \cdot x_1$$

8. Знайдемо матрицю парних коефіцієнтів кореляції з допомогою інструменту аналізу даних *Кореляція MS Excel* (рис. 1).



$r_{yx_1} = 0{,}9699$; $r_{yx_2} = 0{,}9408$; $r_{x_1x_2} = 0{,}9428$.

Рис. 1. Аналіз даних за допомогою функції *Кореляція*

9. С допомогою інструменту аналізу даних *Регресія* отримуємо наступні результати , представлені на рис. 2 і 3:

Рівняння регресії:

$\hat{y} = 1{,}8353 + 0{,}9459x_1 + 0{,}0856x_2$.

Множинний коефіцієнт кореляції:

$R = 0{,}9731$.

Коефіцієнт детермінації:

$R^2 = 0{,}9469$.

Скоригований (нормований) коефіцієнт детермінації:

$\hat{R}^2 = 0{,}9407$.

Фактичне значення F-критерію Фішера:

$F = 151{,}653$.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,973101182
R-квадрат	0,94692591
Нормированный R-квад	0,9406819
Стандартная ошибка	0,598670364
Наблюдения	20

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	2	108,7070945	54,35354726	151,6534774	1,45045E-11
Остаток	17	6,092905478	0,358406205		
Итого	19	114,8			

	Коэффициенты	Станд. ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95
Y-пересечение	1,83530694	0,471064997	3,896080054	0,001161531	0,841446671	2,8291672
x1	0,945947723	0,212576487	4,449917001	0,00035148	0,497450539	1,3944449
x2	0,085617787	0,060483309	1,415560577	0,174963664	-0,04199084	0,2132264

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	Предсказанное у	Остатки
1	6,380680931	0,619319069
2	6,723152081	0,276847919
3	6,619580323	0,380419677
4	6,988982427	0,011017573
5	6,88541067	0,11458933
6	8,002593967	-1,002593967
7	8,570162601	-0,570162601
8	7,709832666	0,290167334
9	8,561185616	-0,561185616
10	9,9801072	0,0198928
11	9,308966809	-0,308966809
12	9,772963686	1,227036314
13	10,15134277	-1,151342775
14	10,78657523	0,213424774
15	11,80018677	0,199813234
16	12,0749941	-0,074994097

ВЫВОД ВЕРОЯТНОСТИ

Персентиль	y
2,5	7
7,5	7
12,5	7
17,5	7
22,5	7
27,5	7
32,5	8
37,5	8
42,5	8
47,5	9
52,5	9
57,5	10
62,5	11
67,5	11
72,5	12
77,5	12

Рис. 2. Множинний регресивний аналіз за допомогою функції *Регресія*

Фактичні значення t-критерію Стьюдента:

$t_{b_1} = 4,450, \quad t_{b_2} = 1,416.$

Довірчі інтервали для параметрів регресії:

$0,4974 \le b_1^* \le 1,3944,$

$-0,0420 \le b_2^* \le 0,2132.$

Значення приватного F-критерію Фішера можна знайти як квадрат відповідного значення t-критерію Стьюдента:

$F_{x_1} = 4,450^2 = 19,803, \; F_{x_2} = 1,416^2 = 2,005.$

Решта характеристики можна знайти, використовуючи відомі формули і отримані тут результати.

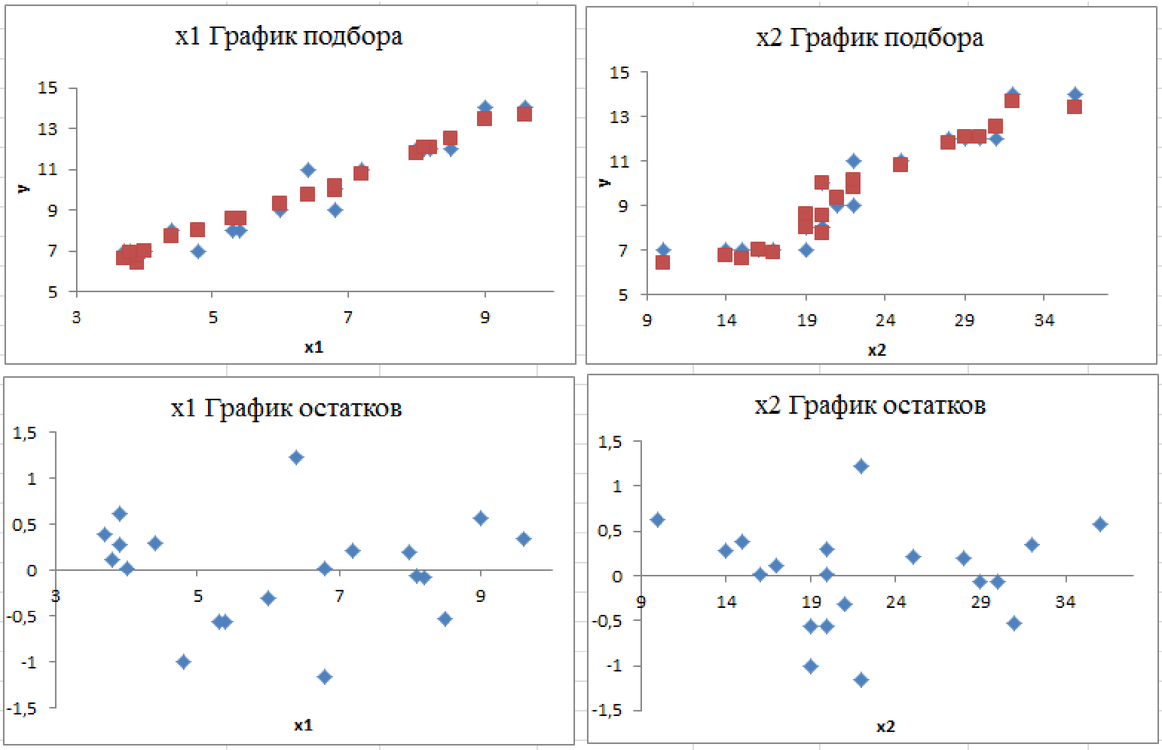


Рис. 3. Графіки підбору регресії і залишки за такими чинниками

2. Варіанти індивідуальних завдань

За 20 підприємствам (табл. 4) регіону вивчається залежність вироблення продукції на одного працівника y (тис. грн.) Від введення в дію нових основних фондів x_1 (% від вартості фондів на кінець року) і від питомої ваги робітників високої кваліфікації в загальній чисельності робітників x_2 (%). У цій таблиці p_1 - число букв в повному імені, p_2 - число букв у прізвищі.

Таблиця 4. Вироблення продукції на підприємствах на одного працівника

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7,0	$3,6+0,1p_1$	11,0	11	9,0	$6,0+0,1p_2$	21,0
2	7,0	3,7	13,0	12	11,0	6,4	22,0
3	7,0	3,9	15,0	13	9,0	6,9	22,0
4	7,0	4,0	17,0	14	11,0	7,2	25,0
5	7,0	$3,8+0,1p_1$	18,0	15	12,0	$8,0-0,1p_2$	28,0
6	7,0	4,8	19,0	16	12,0	8,2	29,0
7	8,0	5,3	19,0	17	12,0	8,1	30,0
8	8,0	5,4	20,0	18	12,0	8,6	31,0
9	8,0	$5,6-0,1p_1$	20,0	19	14,0	9,6	32,0
10	10,0	6,8	21,0	20	14,0	$9,0+0,1p_2$	36,0

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 12. Системи економетричних рівнянь

Практичне заняття №14. Методи оцінювання параметрів структурної моделі

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання

1. Методи оцінювання параметрів структурної моделі
2. Варіанти індивідуальних завдань

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Методи оцінювання параметрів структурної моделі

Безпосереднє застосування звичайного методу найменших квадратів для оцінки рівнянь системи (в структурній формі) недоцільно, так як в системах одночасних рівнянь порушується найважливіше умова регресійного аналізу – екзогенні факторів. Це призводить до того, що оцінки параметрів будуть зміщеними і неспроможними.

Внаслідок цього, для оцінювання параметрів структурної моделі використовують такі методи:

- непрямої метод найменших квадратів (для ідентифікованої моделі);

– двохкрокового метод найменших квадратів (для зверхідентифікованої структурної моделі);

– трьохкроковий метод найменших квадратів;

– метод максимальної правдоподібності з повною інформацією;

– метод максимальної правдоподібності при обмеженій інформації.

Алгоритм непрямого методу найменших квадратів включає 3 етапи:

1) складання наведеної форми моделі і вираз кожного коефіцієнта наведеної форми через структурні параметри;

2) застосування звичайного методу найменших квадратів до кожного рівняння наведеної форми і отримання чисельних оцінок наведених параметрів;

3) визначення оцінок параметрів структурної форми за оцінками наведених коефіцієнтів, використовуючи співвідношення,знайдені на кроці 1.

Сутність непрямого методу найменших квадратів полягає в тому, щоб оцінити структурні коефіцієнти, підставивши в аналітичний вираз їх залежності від наведених оцінок останніх, отриманих звичайним методом найменших квадратів. Отримані оцінки будуть спроможними.

Оцінка зверхідентифікованого рівняння здійснюється за допомогою *двохкрокового методу найменших квадратів*.

Алгоритм двохкрокового методу найменших квадратів включає наступні кроки:

1) складання наведеної форми моделі;

2) застосування звичайного методу найменших квадратів до кожного рівняння наведеної форми і отримання чисельних оцінок наведених параметрів;

3) визначення розрахункових значень ендогенних змінних, які фігурують в якості факторів в структурній формі моделі;

4) визначення структурних параметрів кожного рівняння окремо звичайним методом найменших квадратів, використовуючи в якості факторів входять в це рівняння зумовлені змінні і розрахункові значення ендогенних змінних, отримані на кроці 1.

Іншими словами правильна послідовність кроків алгоритми застосування двохкрокового методу найменших квадратів включає:

І. Перетворення структурної форми моделі в наведену.

ІІ. Процес оцінки параметрів наведеної форми за допомогою методу найменших квадратів.

ІІІ. Отримання за відповідними наведеним рівнянням теоретичних значень ендогенних змінних правій частині зверхідентифікованого рівняння моделі.

ІV. Процес оцінки параметрів зверхідентифікованого рівняння моделі через теоретичні значення ендогенних і фактичних визначених змінних.

Суть двохкрокового методу найменших квадратів полягає в наступному:

Крок 1. Звичайним методом найменших квадратів оцінюється залежність ендогенних змінних від всіх екзогенних (фактично оцінюється необмежена наведена форма).

Крок 2. Звичайним методом найменших квадратів оцінюється структурна форма моделі, де замість ендогенних змінних використовуються їх оцінки, отримані на першому кроці.

При точної ідентифікації системи двох крокові оцінки збігаються з непрямими оцінками.

У двохкроковому методі найменших квадратів по суті кожне рівняння структурної форми оцінюється незалежно від інших рівнянь, тобто не враховується можливий взаємозв'язок випадкових помилок рівнянь структурної форми між собою. У трьохкроковий методі найменших квадратів перші два кроки збігаються з двохкроковим і додається:

Крок 3. На основі двох крокових оцінок залишків структурних рівнянь отримують оцінку ковариационной матриці вектора випадкових помилок системи і з її допомогою отримують нову оцінку коефіцієнтів за допомогою узагальненого методу найменших квадратів.

При наявності кореляцій між рівняннями трьохкрокові оцінки теоретично повинні бути краще двохкрокових оцінок.

<u>*Приклад*</u>.

Нехай є система:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + u_2 \\ y_3 = b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + u_3 \end{cases}$$

Потрібно скласти наведену форму моделі, перевірити кожне рівняння структурної моделі на ідентифікацію, і запропонувати спосіб оцінки параметрів структурної форми моделі.

<u>Рішення</u>.

У цій системі y_1, y_2,y_3 - ендогенні змінні (K=3); x_1, x_2, x_3- зумовлені змінні (M=3). K-1 =2; K + M= 6. Складемо наведену форму моделі:

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + U_1 \\ y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + U_2 \\ y_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + U_3 \end{cases}$$

Перевіримо, як виконується необхідна умова ідентифікації для кожного рівняння. Для 1-го рівняння маємо: k_1= 3; m_1=2; M-m_1=1<k_1-1 = 2, отже, 1-е рівняння неідентифіковано. Для 2-го рівняння маємо: k_2=2; m_2= 1; M-m_2=2>k_2-1=1, отже, 2-е рівняння зверхідентифіковано. Для 3-го рівняння маємо: k_3=2; m_3=2; M-m_3=1=k_3-1 =1, отже, 3-е рівняння точно ідентифіковано.

Розглянемо, як виконується достатня умова ідентифікації для кожного рівняння системи. Для того, щоб воно виконувалося необхідно, щоб визначник матриці A (матриці коефіцієнтів при змінних, що не входять в це рівняння) дорівнювало K-1=2. Складемо матрицю A для 1-го рівняння системи. У 1-му рівнянні відсутній лише одна змінна системи x_3. Тому матриця A буде мати вигляд:

x_3

0 - у 2-му рівнянні

a_{33} - в 3-му рівнянні

Ранг даної матриці дорівнює 1, що менше $K\text{-}1 = 2$, отже, 1-е рівняння моделі неідентифіковано.

Складемо матрицю *A* для 2-го рівняння системи. У 2-му рівнянні відсутні змінні y_3, x_2, x_3:

y_3 x_2 x_3

b_{13} a_{13} 0 - в 1-му рівнянні

1 a_{32} a_{33} - в 3-му рівнянні

Ранг даної матриці дорівнює 2, що дорівнює K-1=2, отже, 2-е рівняння моделі точно ідентифіковано.

Складемо матрицю *A* для 3-го рівняння системи. У 3-му рівнянні відсутні змінні y_1, x_2:

y_1 x_2

1 a_{12} - в 1-му рівнянні

b_{21} 0 - у 2-му рівнянні

Ранг даної матриці дорівнює 1, що менше K-1 = 2, отже, 3-е рівняння моделі неідентифіковано.

Таким чином, 1-е і 3-е рівняння системи неідентифіковані (тому що не виконуються достатні умови ідентифікації, а в разі 1-го рівняння і необхідна умова також). 2-е рівняння системи зверхідентифіковано. Отже, система в цілому є неідентифікованої.

Для оцінки параметрів 2-го рівняння можна застосувати двох кроковий МНК. Параметри 1-ого та 3-ого рівнянь визначити за коефіцієнтами приведеної форми не можна. Тому модель повинна бути модифікована.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 13. Економічний аналіз часових рядів

Практичне заняття №15. Методика прогнозування часових рядів

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору, вивчення співвідношення між закономірністю і випадковістю в формуванні економічних процесів, оцінка кількісної міри їх впливу на економічну систему.

Кількість годин: 6 год.

Навчальні питання

1. Методика прогнозування часових рядів
2. Побудова моделей тренда
3. Вибір кращої моделі
4. Розрахунок точкового та інтервального прогнозів
5. Варіанти індивідуальних завдань

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с.

https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Методика прогнозування часових рядів

Основна мета економічного аналізу часових рядів - вивчення співвідношення між закономірністю і випадковістю в формуванні значень ряду, оцінка кількісної міри їх впливу. Закономірності, що пояснюють динаміку показника в минулому, використовуються для прогнозування його значень в майбутнє, а облік випадковості дозволяє визначити ймовірність відхилення часового ряду від закономірного розвитку і віз можна величину відхилення.

Прогнозування економічних процесів, представлених одновимірними тимчасовими рядами, зводиться до виконання слідних основних етапів:

1. Попередній аналіз.
2. Побудова моделей тренда.
3. Вибір кращої моделі.
5. Розрахунок точкового та інтервального прогнозів.

Вихідні дані. У таблиці на рис. 1 (стовпці А і В) наведена врожайність гречки (Y_t) за останні 14 років (t) в Дергачівському районі Харківської області, ц/га. Необхідно виконати прогноз врожаю на майбутній 10-ти річний період.

1. Попередній аналіз даних

Попередній аналіз заснований на виділенні складових часового ряду і перевірці наявності тенденції.

Виділення складових часового ряду здійснюється за допомогою автокореляційного аналізу, який характеризує ступінь тісноти зв'язку між послідовностями спостережень часового ряду $y_1, y_2, \ldots, y_n$ і $y_{1+k}, y_{2+k}, \ldots, y_{n+k}$ (зсунутих відносно один одного на k періодів).

Коефіцієнт автокореляції r_k рівнів порядку k, що характеризує кореляційний залежність між членами одного й того ж ряду, але з запізненням на k періодів, визначається за формулою

$$r_k = \frac{\sum\limits_{t=k+1}^{n}(y_t - \overline{y}_k)(y_{t-k} - \overline{y}_{t-k})}{\sqrt{\sum\limits_{t=k+1}^{n}(y_t - \overline{y}_k)^2 \sum\limits_{t=k+1}^{n}(y_{t-k} - \overline{y}_{t-k})^2}},$$

$$\overline{y}_k = \frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} y_t, \quad \overline{y}_{t-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k} y_t.$$

Результати розрахунку авто кореляційної функції порядку k представлені на рис. 1. Тут же за цими даними представлена корелограма, як графік залежності для абсолютних значень коефіцієнтів автокореляції.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	Y_t	Y_{t-1}	Y_{t-2}	Y_{t-3}	Y_{t-4}	Y_{t-5}
2	2002	17,9					
3	2003	19,5	17,9				
4	2004	30,1	19,5	17,9			
5	2005	26,7	30,1	19,5	17,9		
6	2006	31,0	26,7	30,1	19,5	17,9	
7	2007	28,4	31,0	26,7	30,1	19,5	17,9
8	2008	20,0	28,4	31,0	26,7	30,1	19,5
9	2009	24,7	20,0	28,4	31,0	26,7	30,1
10	2010	26,9	24,7	20,0	28,4	31,0	26,7
11	2011	21,3	26,9	24,7	20,0	28,4	31,0
12	2012	28,6	21,3	26,9	24,7	20,0	28,4
13	2013	27,7	28,6	21,3	26,9	24,7	20,0
14	2014	30,0	27,7	28,6	21,3	26,9	24,7
15	2015	22,9	30,0	27,7	28,6	21,3	26,9
16	r_{t-k}	1	0,09	-0,2	-0,2	-0,5	-0,2
17	$\|r_{t-k}\|$	1	0,09	0,2	0,21	0,54	0,2

=КОРРЕЛ($B$2:$B$15;C2:C15)

Рис. 1. Знаходження автокореляційної функції тимчасового ряду

Відзначимо два важливих свійство коефіцієнта автокореляції.

По-перше, коефіцієнт автокореляції обчислюється за аналогією з лінійним коефіцієнтом кореляції і таким чином характеризує тісноту лінійної залежності між випадковими величинами $Y(t)$, $Y(t+k)$. Тому за величиною коефіцієнта автокореляції можна судити про наявність лінійної (або близькою до лінійної) тенденції розвитку тимчасового ряду.

По-друге, за знаком коефіцієнта автокореляції не можна робити висновок про зростаючу або спадної тенденції знаний тимчасового ряду. Багато тимчасові ряди економічних даних мають позитивними ні величини коефіцієнтів автокореляції, однак при цьому спостерігається спадна тенденція.

Аналіз автокореляційної функції дозволяє виявити структуру часового ряду, тобто наявність в ньому складових тренда і циклічності.

Якщо найбільш високим про здавався коефіцієнт автокореляції *r(1)*, то досліджуваний ряд містить тільки трендову складову. Якщо найбільш високим виявився коефіцієнт автокореляції *r(k)*, то ряд містить коливання з періодичністю *k* моментів часу, тобто період коливання дорівнює $k*\Delta_\tau$ Якщо ні один з коефіцієнтів *r(k)* не є значущим, то щодо структури ряду можна зробити одне з двох припущень:

– тимчасової ряд не містить тренда і циклічних коливань, тобто є білим шумом з $r(0)=1$ і $r(k)=0$ при $k\neq0;$

– тимчасової ряд містить сильний нелінійний тренд, для виявлення якого необхідно провести додатковий аналіз.

Аналіз автокореляційної функцією тимчасового ряду даного прикладу (рис. 1) на основі її корелограми дозволяє зробити висновок про наявність в досліджуваному часовому ряді циклічних колебаний періодичністю в три роки, а також невеликого лінійного тренда.

Для діагностування наявності тенденції (невипадковою складової) найбільш широко застосовуються *метод порівняння середніх.* Для цього в пасової ряд розбивається на дві приблизно рівні частини $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ і $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_{n=n_1+n_2}$ з кількістю рівнів n_1 і n_2 і для кожної частини обчислюються середні ($\bar{y}_1, \bar{y}_2$) і вибіркові дисперсії (S_1^2, S_2^2) відповідно. Якщо часовій ряд має тенденцію до тренду, то середні, обчислені для кожної сукупності, повинні істотно (значимо) різніться між собою. Якщо же розбіжність трохи, не суттєво (випадково), то часовий ряд не має тенденції.

Далі розраховується значення критерію Стьюдента за формулою

$$\tau = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}}},$$

якщо дисперсії двох частин ряду рівні, то формула набуде вигляду

$$\tau = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{s^2}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

Де S^2 - загальна вибіркова дисперсія ряду.

Гіпотеза про рівність середніх (про відсутність тенденції) відкидається, якщо виконується умова $\tau > t_{1\alpha,m}$, де $t_{1\alpha,m}$ - табличне значення *t*-критерію Стьюдента при рівні значущості α і числі ступенів свободи $m=n_1+n_2-2$. Значення $t_{1\alpha,m}$ обчислюється з використанням наступної функції Excel : $t_{1-\alpha,m}$=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(*a;m*).

Для використання критерію Стьюдента необхідно переконатися, що дисперсії обох частин ряду однакові. Для цього виконуємо критерій Фішера:

$$F_S = \frac{\max\left(s_I^2, s_{II}^2\right)}{\min\left(s_I^2, s_{II}^2\right)}$$

Якщо не виконується нерівність $F_{a/2,n1-1,n2-1} \le F_s \le F_{1-a/2,n1-1,n2-1}$, то гіпотеза про сталість дисперсії відкидається з рівнем значущості α. У цьому випадку критерій Стьюдента не застосовують, і необхідно використовувати інший критерій або прийняти гіпотезу про наявність невипадковою складової часового ряду.

Межі критичної області при перевірці гіпотези про равенства дисперсій обчислюються за допомогою наступної функції Excel:

$F_{a/2,n1-1,n2-1}$ =F.ОБР(1-$a/2$;n_1-1;n_2-1)

Перевірка на сталість дисперсій виконується за допомогою інструменту *Двухвиборочний F-тест для дисперсії* пакета аналізу даних (рис. 2).

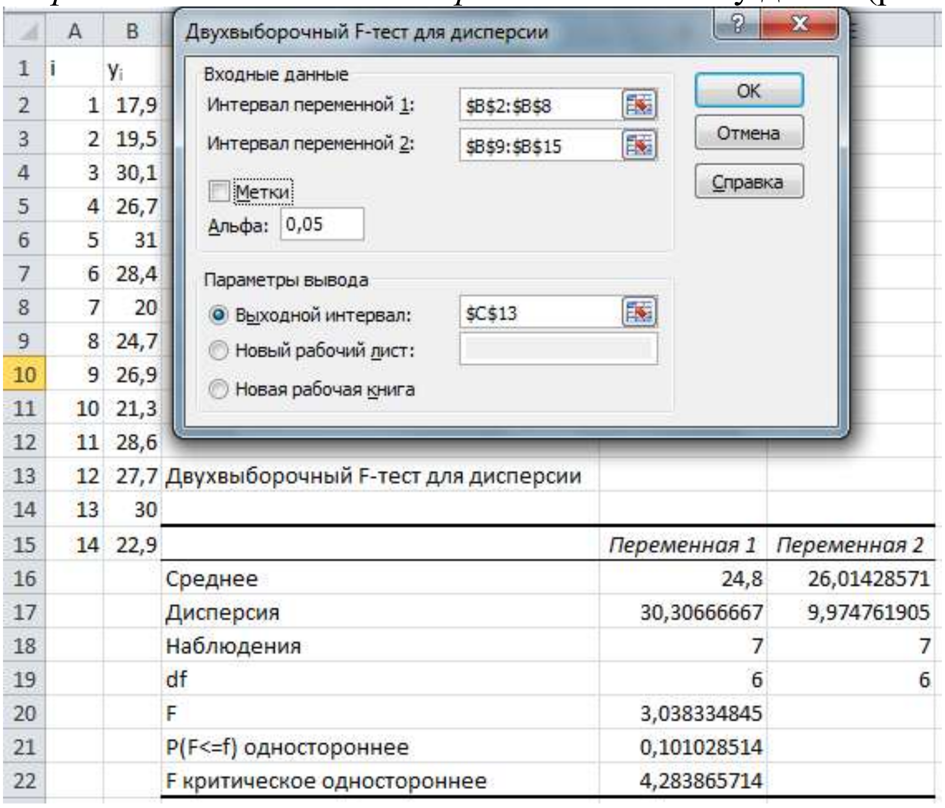


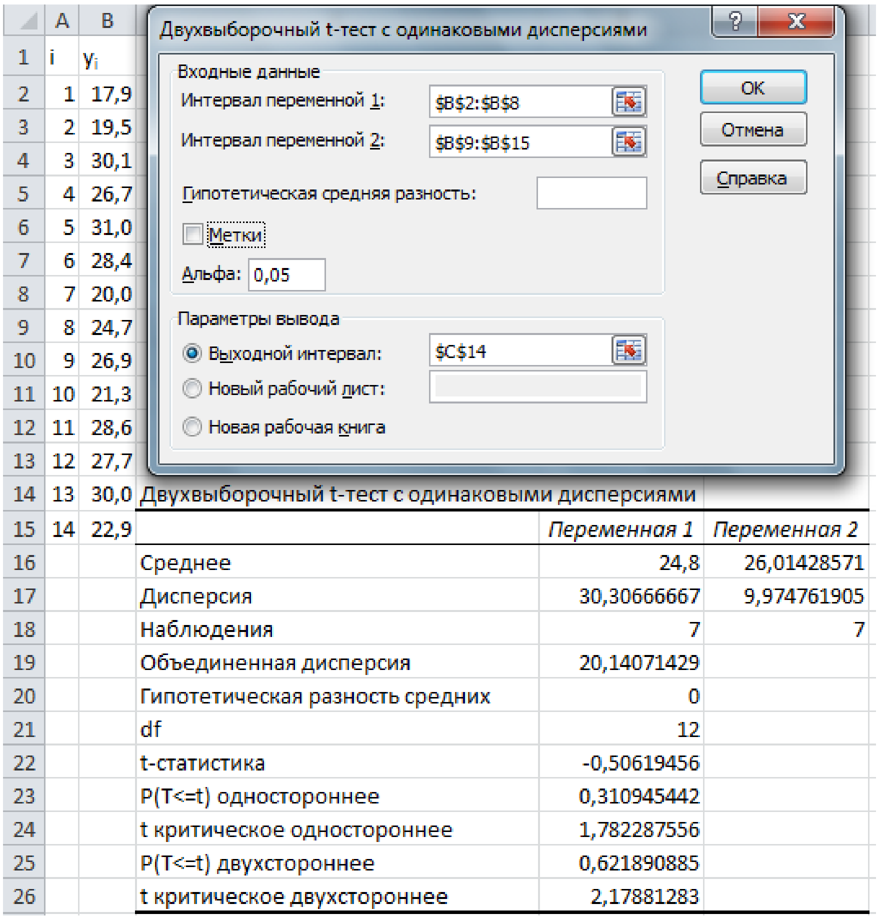
Рис. 2. Перевірка сталості дисперсій вибірок

Так як $S_1^2 > S_2^2$, то в якості альтернативної приймається гіпотеза про нерівність дисперсій, тоді область прийняття цієї гіпотези представляє інтервал $(F_{кр}, \infty)$, тобто точка $F_{кр}$, визначається з умови $P(F>F_{кр})=\alpha$, де α - ймовірність помилки першого роду.

З табл. рис. 2 находимо: $F=3{,}04$, $F_{кр}=4{,}28$. Видно, що спостережуване значення $F=3.04$ не влучає у область прийняття гіпотези немає рівності дисперсій вибірок. В цьому випадку приймається інша альтернативна гіпотеза рівності дисперсій вибірок і можна продовжити перевірку наявності тенденції часового ряду на основі аналізу середніх значень вибірок за допомогою критерію t-тест Стьюдента (рис. 3).

Критична область є об'єднанням двох інтервалів і має вигляд

$(-\infty, -2.179] \cup [2.179, \infty)$.



	A	B	C	D	E
1	i	y_i			
2	1	17,9			
3	2	19,5			
4	3	30,1			
5	4	26,7			
6	5	31,0			
7	6	28,4			
8	7	20,0			
9	8	24,7			
10	9	26,9			
11	10	21,3			
12	11	28,6			
13	12	27,7			
14	13	30,0	Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
15	14	22,9		*Переменная 1*	*Переменная 2*
16			Среднее	24,8	26,01428571
17			Дисперсия	30,30666667	9,974761905
18			Наблюдения	7	7
19			Объединенная дисперсия	20,14071429	
20			Гипотетическая разность средних	0	
21			df	12	
22			t-статистика	-0,50619456	
23			P(T<=t) одностороннее	0,310945442	
24			t критическое одностороннее	1,782287556	
25			P(T<=t) двухстороннее	0,621890885	
26			t критическое двухстороннее	2,17881283	

Рис.3. Перевірка середніх значень вибірок

Видно, що спостережуване значення критерію, рівне - *0.506*, не влучає в цю область і тому приймається основна гіпотеза про рівність математичних очікувань. Ухвалення цих двох гіпотез (про рівність дисперсій і рівність математичних очікувань) дозволяє прийняти гіпотезу про відсутність трендової складової в даному часовому ряду.

2. Побудова моделей тренда

Трендова складова відображає вплив довгочасних чинників і відповідає стійкій і тривалій тенденції зміни часового ряду. Знання трендової складової дозволяє осуществлять довгострокове прогнозування.

Крім прогнозування задача виділення трендової складової виникає в наступних ситуаціях:

1. При графічному відображенні часового ряду тренда прозлежується недостатньо чітко. Після виділення трендової складової та нанесення значень тренду на графік тенденція зміни тимчасового ряду проявляється більш чітко.

2. Низки методи аналізу та прогнозування вимагають в якості попередній обробки виділення тренда.

3. Виділення тренда використовують для усунення аномальних спостережень.

Існуючі методи виділення тренда можна розділити на два класи: методи аналітичного вирівнювання і згладжуючи статистичні методи.

Різний характер тренда (іноді досить складний) обумовлює більш широке використання нелінійних функцій. Так, поряд з лінійної функцією набагато частіше використовуються нелінійні функції: логарифмічна, статечна , поліноміальна, експоненціальна.

Оцінка якості рівняння тренда проводиться за допомогою множинного коефіцієнта детермінації R^2, обчислення якого здійснюється за формулою

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{t_i} - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{t_i} - \bar{y}\right)^2}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{t_i},$$

де в чисельнику - факторна сума квадратів, а в знаменники - загальна сума квадратів.

Чим більше значення множинного коефіцієнта детермінації R^2 $(0<R^2<1)$, тим краще рівняння описує досліджуване явище.

Виконаємо виділення лінії тренда різними видами функцій і за значенням коефіцієнта кореляції вибрати найкраще рівняння вирівнювання часового ряду.

Для цього побудуємо графік часового ряду і для нього додамо лінії тренда різних функцій (рис. 4).

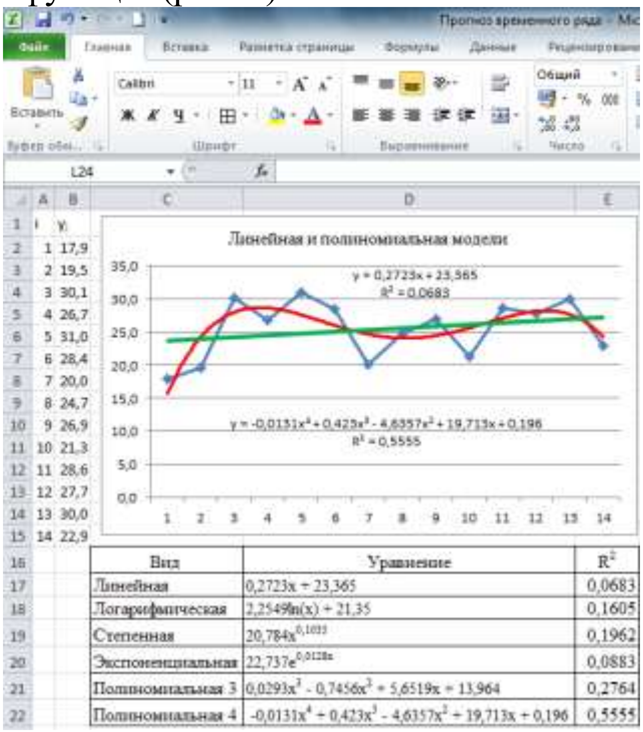


Рис.4. Вибір виду функції тренда

3. Вибір кращої моделі

Порівнюючи величину коефіцієнта детермінації R^2 для наведених на малюнку рівнянь, вибираємо в якості «найкращого» рівняння поліноміальних функцію четвертого ступеня, для якої коефіцієнт кореляції максимальний $R^2 == 0{,}5555$. Однак, слід зазначити, величина даного коефіцієнта невисока як для даної функції так і інших нелінійних функцій. При цьому коефіцієнт кореляції для лінійного тренда має найменше значення. Це говорить про те, що часовий ряд містить значні випадкову і циклічну компоненти.

Практика виділення тренда різними методами показує, що: найбільш ефективним є метод, заснований на побудові вирівнюючій функції за методом найменших квадратів. Цей метод досить універсальний, дозволяє безпосередньо вирішувати завдання прогнозування, позбавлений недоліку, властивого методам згладжування при обчисленні значень на кінцях тимчасового інтервалу.

4. Розрахунок точкового та інтервального прогнозів

Ідея соціально-економічного прогнозування базується на припущенні, що закономірний розвитку, діюча в минулому (всередині ряду економічної динаміки), збережеться і в прогнозованому майбутньому. У цьому сенсі прогноз оснований на екстраполяції. Екстраполяція, що проводиться в майбутнє, називається перспективною, а в минуле - ретроспективної.

Прогнозування методу екстраполяції базується на слід припущеннях:

– розвиток досліджуваного явища в цілому описується плавною кривою;

– загальна тенденція розвитку явища в минулому і тепер не вказує на серйозні зміни в майбутньому;

– облік випадковості позволяет оцінити ймовірність отклонения від закономірного розвитку.

Тому надійність і точність прогнозу залежать від того, наскільки близькими до дійсності здаються ці припущення і наскільки точно вдалося охарактеризувати виявлену в минулому закономірність.

На основі побудованої моделі розраховуються точкові і інтервальні прогнози. Щоб за наявним часовим рядом $y_1, y_2, ..., y_n$ здійснити прогноз на L кроків вперед, необхідно в побудовану модель тенденції $\hat{y} = f(t)$ підставити значення аргументу, відповідне інтервалу прогнозу

$$\hat{y}_{n(+L)} = f(t_{n+L}).$$

Отримане значення $\hat{y}_{n(+L)}$ називається точковим прогнозом.

Інтервальні прогнози будуються на основі точкових прогнозів. Нагадаємо, що довірчім називається інтервал, відносно якого можна з заздалегідь обраної ймовірністю стверджувати, що він містить значення прогнозованого показника. Ширина інтервалу залежить від якості моделі, тобто ступеня її близькості до фактичних даних, числа спостережень і обраної користувачем довірчої ймовірності.

Довірчий інтервал для лінійної тенденції по аналогії з парної регресією обчислюється за формулою

$$\hat{y}_{n(+L)} \pm t_{1-\alpha,n-2} \cdot s_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_{n+L} - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{n}(t - \bar{t})^2}},$$

де n- довжина часового ряду; L - період попередження; $\hat{y}_{n(+L)}$- точковий прогноз на момент $n + L$; $t_{1-\alpha,\, n-2}$– значення t-статистика Стьюдента при рівні значущості α і числі ступенів свободи n-2; S_y- середньоквадратична помилка оцінки прогнозованого показника

$$s_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - y_t)^2};$$

M - число параметрів моделі кривої зростання (для лінійної моделі $m = 2$).

На рис. 5 представлений результат прогнозу врожайності гречки на довгостроковий період (10 років) за допомогою інструменту *Додати лінію тренда MS Excel*. Як видно рівень врожайності у 2025 році в Дергачівському районі може досягти 30 ц / га.

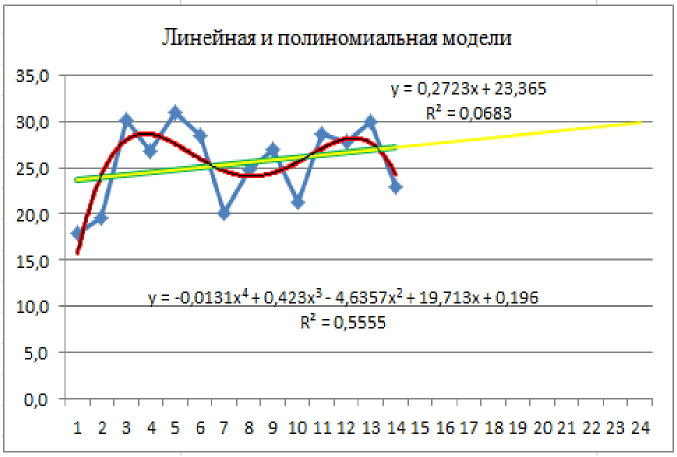


Рис. 5.Точковий прогноз тренда часового ряду

2. Варіанти індивідуальних завдань

Рік	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
yi	17,9	19,5	30-p_1	27-p_1	31-p_1	28-p_1	20+p_1	24,7	26,9	21+p_1	28,6	27,7	30,0	23+p_1

У цій таблиці p_1 - число букв в Вашому імені.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 14. Теорія прийняття рішень

Практичне заняття №16. Розв'язання завдань теорія прийняття рішень

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Приклад розв’язання завдання прийняття рішень в умовах повної визначеності
2. Приклад розв’язання завдання прийняття рішень в умовах ризику
3. Приклад розв’язання завдання прийняття рішень в умовах невизначеності

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-

MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклад розв'язання завдання прийняття рішень в умовах повної визначеності

Розглянемо застосування *теорії прийняття рішень в умовах повної визначеності* на прикладі з даними табл.1.

Фірмі потрібно прийняти рішення щодо забезпечення нового виробництва обладнанням. За допомогою експериментальних спостережень були визначені значення приватних критеріїв функціонування відповідного обладнання $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$, що випускається трьома заводами-виробниками.

Очевидно, вибір варіанту обладнання за одним критерієм в даній задачі не викликає ускладнень. Наприклад, якщо оцінювати обладнання по надійності, то кращим є обладнання заводу 1 (рішення $\boldsymbol{x_1}$).

Вибір оптимального рішення по комплексу декількох критеріїв (в нашому прикладі - за чотирма критеріями) є багатокритеріальним завданням.

Один з підходів до вирішення багатокритеріальних задач управління пов'язаний з процедурою утворення узагальненої функції $\boldsymbol{F_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots, \alpha_{in})}$, що монотонно залежить від критеріїв $\boldsymbol{\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots, \alpha_{in}}$. Дана процедура називається *процедурою (методом) згортання критеріїв*. Існує кілька методів згортання, наприклад: метод адитивної оптимізації; метод багатоцільової оптимізації та ін.

Таблиця 1. Критерії ефективності обладнання

Варианты оборудования (стратегии, решения)	Частные критерии эффективности оборудования*			
	производительность, д. е.	стоимость, д. е.	энергоемкость, у. е.	надежность, у. е.
Оборудование завода 1, x_1	$a_{11} = 5$	$a_{12} = 7$	$a_{13} = 5$	$a_{14} = 6$
Оборудование завода 2, x_2	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 4$	$a_{23} = 7$	$a_{24} = 3$
Оборудование завода 3, x_3	$a_{31} = 4$	$a_{32} = 6$	$a_{33} = 2$	$a_{34} = 4$

* Значения частных критериев даны в условных единицах.

Розглянемо докладніше метод адитивної оптимізації, який задається в вигляді зваженої суми приватних критеріїв:

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_{ij}. \qquad (1)$$

Тут величини λ_j є ваговими коефіцієнтами, які визначають в кількісної формі ступінь переваги j-го критерію в порівнянні з іншими критеріями. Іншими словами, коефіцієнти λ_j визначають важливість j-го критерію оптимальності. При цьому більш важливого критерію приписується більшу вагу, а загальна важливість всіх критеріїв дорівнює одиниці, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \lambda \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Узагальнена функція мети (1) може бути використана для згортання приватних критеріїв оптимальності, якщо:

– приватні (локальні) критерії кількісно співмірні за важливістю, тобто кожному з них можна поставити у відповідність деяке число λ_j, яке чисельно характеризує його важливість по відношенню до інших критеріїв;

– приватні критерії є однорідними (мають однакову розмірність; в нашому прикладі критерії «вартість обладнання» і «продуктивність обладнання» в умовних грошових одиницях будуть однорідними).

В цьому випадку для вирішення задачі багатокритеріальної оптимізації виявляється справедливим застосування адитивного критерію оптимальності.

Припустимо, в даному прикладі необхідно вибрати оптимальний варіант обладнання за двома однорідним локальним критеріям: продуктивність (грн.); вартість обладнання (грн.).

Припустимо на основі експертних оцінок були визначені вагові коефіцієнти цих двох приватних критеріїв: $\lambda_1 = 0{,}667$, $\lambda_2 = 0{,}333$. Обчислимо адитивний критерій оптимальності для трьох варіантів:

$$F_1(a_{1j}) = \lambda_1\, a_{11} + \lambda_2\, a_{12} = 0{,}667 \cdot 5 + 0{,}333 \cdot 7 = 5{,}666;$$
$$F_2(a_{2j}) = \lambda_1\, a_{21} + \lambda_2\, a_{22} = 0{,}667 \cdot 3 + 0{,}333 \cdot 4 = 3{,}333;$$
$$F_3(a_{3j}) = \lambda_1\, a_{31} + \lambda_2\, a_{32} = 0{,}667 \cdot 4 + 0{,}333 \cdot 6 = 4{,}666.$$

Очевидно, перший варіант обладнання за двома приватними вартісними критеріями буде оптимальним, так як $\boldsymbol{F_{max} = F_1\ (a_{1j}) = 5{,}666}$.

Однак в розглянутому прикладі чотири локальних критерію, і вони є не однорідними, тобто мають різні одиниці виміру. В цьому випадку потрібно нормалізація критеріїв. Під *нормалізацією критеріїв* розуміється така послідовність процедур, за допомогою якої всі критерії наводяться до єдиного, безрозмірного масштабу виміру.

Для цього визначимо максимум і мінімум кожного локального критерію, тобто

$$a_j^+ = \max a_{ij},\ i = \overline{1,m};$$
$$a_j^- = \min a_{ij},\ i = \overline{1,m}.$$

Виділимо групу критеріїв $\boldsymbol{\alpha_j^+,\ j = 1,2,\ ...,}$ які максимізуються при вирішенні завдання, і групу критеріїв $\boldsymbol{\alpha_j^-,\ j =,\ ...,\ n,}$ які мінімізуються при вирішенні задачі. Тоді можливі наступні способи нормалізації критеріїв:

1 спосіб 2 спосіб

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+},\quad j = \overline{1,\ell}; \qquad \hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-},\quad j = \overline{1,\ell};$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+},\quad j = \overline{\ell+1,\ n} \qquad \hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-},\quad j = \overline{\ell+1,\ n}.$$

Оптимальним буде те рішення, яке забезпечить максимальне значення функції мети:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \hat{a}_{ij},\quad i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Розглянемо рішення задачі із застосуванням першого способу нормалізації критеріїв. При цьому припустимо, що на основі експертних оцінок були визначені ваги приватних критеріїв: $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}4;\ \lambda_2 = 0{,}2;\ \lambda_3 = 0{,}1;\ \lambda_4 = 0{,}3.}$

1. Визначаємо максимальне значення кожного локального критерію: $\boldsymbol{\alpha_1^+ = 5,\ \alpha_2^+ = 7,\ \alpha_3^+ = 7,\ \alpha_4^+ = 6.}$

2. Виділяємо локальні критерії максимізації: перший - продуктивність і четвертий - надійність; мінімізації: другий - вартість обладнання і третій - енергоємність.

3. Виходячи з принципу максимізації ефективності, нормалізуємо критерії:

Нормалізація критеріїв максимізації Нормалізація критеріїв мінімізації

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}; \quad \hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}; \quad \hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}; \quad \hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+};$$

$$\hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1; \quad \hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; \quad \hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \quad \hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7};$$

$$\hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0{,}5; \quad \hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}; \quad \hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0;$$

$$\hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0{,}8. \quad \hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \quad \hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}. \quad \hat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

4. Визначаємо узагальнені функції мети по кожному варіанту:

$$F_1 = \lambda_1 \hat{a}_{11} + \lambda_2 \hat{a}_{12} + \lambda_3 \hat{a}_{13} + \lambda_4 \hat{a}_{14} =$$
$$= 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}3 \cdot 1 \approx 0{,}729;$$

$$F_2 = \lambda_1 \hat{a}_{21} + \lambda_2 \hat{a}_{22} + \lambda_3 \hat{a}_{23} + \lambda_4 \hat{a}_{24} =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}476;$$

$$F_3 = \lambda_1 \hat{a}_{31} + \lambda_2 \hat{a}_{32} + \lambda_3 \hat{a}_{33} + \lambda_4 \hat{a}_{34} =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}1 \cdot \frac{5}{7} + 0{,}3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}603.$$

Звідси випливає, що оптимальним рішенням є вибір обладнання першого заводу, так як $\boldsymbol{F_{max} = F_1 = 0{,}729}$.

2. Приклад розв’язання завдання прийняття рішень в умовах ризику

Припустимо, що потрібно вкласти на фондовій біржі $ 10000 в акції однієї з двох компаній: А чи В. Акції компанії А є ризикованими, але можуть принести 50% прибутку від суми інвестиції протягом наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливі (кодування знижуються), сума інвестиції може знецінитися на 20%. Компанія В забезпечує безпеку інвестицій з 15% прибутку в умовах підвищення котирувань на біржі і тільки 5% - в умовах зниження котирувань. Всі аналітичні оцінка показують, що з імовірністю 0,6 прогнозують підвищення котирувань і з ймовірністю 0,4 - зниження котирувань. Знайти найбільш сприятливу компанію для вкладення грошових коштів. Інформація, пов'язана з прийняттям рішення, підсумовані в табл. 2.

Таблиця 2. Опис альтернативних рішень

	Прибыль за один год от инвестиции 10 000 долл.	
Альтернативные решения	При повышении котировок (долл.)	При понижении котировок (долл.)
Акции компании *A*	5000	−2000
Акции компании *B*	1500	500
Вероятность события	0,6	0,4

Уявімо завдання у вигляді *дерева рішень*, показаного на рис. 1. На цьому малюнку використовується два типи вершин: квадратик являє "вирішальну" вершину, а гурток - "ймовірну". Таким

Рис. 1. Дерево рішень для задачі

чином, з розв'язуваної вершини 1 виходять дві гілки, що представляють альтернативи, пов'язані з купівлею акцій компанії А чи В. Далі дві гілки, що виходять з "ймовірних" вершин 2 і 3, відповідають випадкам підвищення і зниження котирувань на біржі з можливостями їх появи і відповідними платежами.

Виходячи зі схеми рис. 1 отримуємо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив.

Для акцій компанії А: 5000 * 0,6 + (-2000) * 0,4 = $ 2200.

Для акцій компанії В: 1500 * 0,6 + 500 * 0,4 = $ 1100.

Рішенням задачі, заснованим на цих обчисленнях, є покупка акцій компанії А.

В теорії прийняття рішень підвищення і зниження котирувань на біржі іменуються станами природи, можливі реалізації яких є випадковими подіями (в даному випадку з вірогідністю 0,6 і 0,4).

3. Приклад розв’язання завдання прийняття рішень в умовах невизначеності

Розглянемо приклад прийняття рішень в умовах невизначеності . Одне з транспортних підприємств має визначити рівень своїх провізних можливостей так, щоб задовольнити попит клієнтів на транспортні послуги на планований період. Попит на транспортні послуги ніхто не знає, але очікується (прогнозується), що він може прийняти одне з чотирьох значень: 10, 15, 20 або 25 тис. т. Для кожного рівня попиту існує найкращий рівень провізних можливостей транспортного підприємства (з точки зору можливих витрат). Відхилення від цих рівнів призводять до додаткових витрат або через перевищення провізних можливостей над попитом (через простій рухомого складу), або через неповне задоволення попиту на транспортні послуги. Нижче наводиться табл. 3, яка визначає можливі прогнозовані витрати на розвиток провізних можливостей:

Таблиця 1. Провізні можливості підприємства на транспортні послуги

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги, д. е.			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Згідно з умовою задачі є чотири варіанти попиту на транспортні послуги, що рівнозначно наявності чотирьох станів «природи»: S_1, S_2, S_3, S_4**.** Відомі також чотири стратегії розвитку провізних можливостей транспортного підприємства: R_1, R_2, R_3, R_4. Витрати на розвиток провізних можливостей при кожній парі S_i і R_i задані наступною матрицею.

Принцип Лапласа передбачає, що S_1, S_2, S_3, S_4 різновірогідні. Отже, $q = 1/4 = 0{,}25$, і очікувані витрати при різних діях R_1, R_2, R_3, R_4 складають:

$$W\{R_1\} = 0{,}25\ (6 + 12 + 20 + 24) = 15{,}5;$$

$$W\{R_2\} = 0{,}25\ (9 + 7 + 9 + 28) = 13{,}25;$$

$$W\{R_3\} = 0{,}25\ (23 + 18 + 15 + 19) = 18{,}75;$$

$$W\{R_4\} = 0{,}25\ (27 + 24 + 21 + 15) = 21{,}75.$$

Таким чином, найкращим рішенням розвитку провізних можливостей відповідно до критерію Лапласа буде $\boldsymbol{R_2}$.

Необхідні результати обчислення для застосування мінімаксного критерій Вальда наведені в таблиці.

$$\|r_{ji}\| = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline R_1 & 0 & 5 & 11 & 9 \\ R_2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ R_3 & 17 & 11 & 6 & 4 \\ R_4 & 21 & 17 & 12 & 0 \end{array}$$

Состояние S_i / Стратегия R_j	Величина риска, д. е. (V_{ji})				$\max \{r_{ji}\}$	$W = \min \max \{r_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	–
R_3	17	11	6	4	17	–
R_4	21	17	12	0	21	–

Звідки видно, що найкращим рішенням розвитку провізних можливостей відповідно до мінімаксного критерію «кращий з гірших» буде третя, тобто $\boldsymbol{R_3}$.

Для застосування критерію Севіджа визначаємо матрицю ризиків і обчислюємо величини ризику для стратегій:

Введення величини ризику привело до вибору першої стратегії $\boldsymbol{R_1}$, що забезпечує найменші втрати (витрати) в самій несприятливій ситуації (коли ризик максимальний).

Результати необхідних обчислень при (***α = 0,5***) для критерію Гурвіца представлені в наступній таблиці

W_j	$\max\limits_i V_{ji}$	$\min\limits_i V_{ji}$	$\alpha \cdot \min\limits_i V_{ji} + (1-\alpha) \cdot \max\limits_i V_{ji}$	$\min\limits_j W_j$
W_1	6	24	15	15
W_2	7	28	17,5	–
W_3	15	23	19	–
W_4	15	27	21	–

Таким чином, в прикладі належить зробити вибір: за критерієм Лапласа - вибір стратегії $\boldsymbol{R_2}$, за критерієм Вальда - вибір стратегії $\boldsymbol{R_3}$; за критерієм Севіджа - вибір стратегії $\boldsymbol{R_1}$; за критерієм Гурвіца - вибір стратегії $\boldsymbol{R_1}$ при ***α=0,5.***

Вибір критерію прийняття рішень в умовах невизначеності є найбільш складним і відповідальним етапом в дослідженні операцій. При цьому не існує будь-яких загальних порад або рекомендацій. Вибір критерію має провадити особа, яка приймає рішення, (ОПР) з урахуванням конкретної специфіки розв'язуваної задачі і відповідно до своїх цілей, а також спираючись на минулий досвід і власну інтуїцію.

Зокрема, якщо навіть мінімальний ризик неприпустимий, то слід застосовувати критерій Вальда. Якщо, навпаки, певний ризик цілком прийнятний і ЛПР має намір вкласти в деякий підприємство стільки коштів, щоб потім воно не жалкував, що вкладено занадто мало, то вибирають критерій Севіджа.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

Тема № 15. Теорія ігор

Практичне заняття №17. Розв'язання завдань теорії ігор

Навчальна мета заняття: сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Приклад розв’язання завдання теорії ігор в чистих стратегіях
2. Приклад розв’язання завдання теорії ігор в змішаних стратегіях

Література:

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютерна мережа із підключенням до Intertnet, пакет програм Microsoft office.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Завантаження методичного забезпечення для проведення заняття. Бліц опитування курсантів з відповідного теоретичного матеріалу.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Виконання завдань практичного заняття за методичними вказівками

1. Приклад розв’язання завдання теорії ігор в чистих стратегіях

Нехай дана платіжна матриця ***3×4***, яка визначає виграші гравця ***A***

$$\overline{A} = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 20 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Тоді результати обчислення нижньої і верхньої цін гри представлені в таблиці

Стратегии первого игрока, A_i	Стратегии второго игрока, B_j				Значение, α_i	α
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10	4	11	7	4	–
A_2	7	6	8	20	6	6
A_3	6	2	1	11	1	–
Значение β_j	10	6	11	20	–	
β	–	6	–	–	–	–

Якщо гравець ***A*** вибирає першу стратегію, він може отримати виграш в розмірі ***10, 4, 11*** або ***7*** грн. В залежності від обраної стратегії гравцем ***B***. При цьому виграш гравця буде не менше $\boldsymbol{\alpha_1=\min\{10; 4; 11; 7\}=4}$ ***грн***. Незалежно від поведінки гравця ***B***. Аналогічно при виборі гравцем А другий стратегії гарантований виграш $\boldsymbol{\alpha_2=\min\{7; 6; 8; 20\}=6}$ ***грн***. При виборі гравцем ***A*** третій стратегії виграш $\boldsymbol{\alpha_3=\min\{6; 2; 1; 11\}=1}$ ***грн***.

Таким чином, мінімальні значення $\boldsymbol{\alpha_i}$, $\boldsymbol{i=1,3}$ визначають мінімально гарантований виграш для гравця ***A***, якщо він вибирає відповідну стратегію ***i***. Величина $\boldsymbol{\alpha=\max \alpha_i=\max\{4; 6; l\} = 6}$ ***грн***. буде гарантованим виграшем гравця ***A*** при будь-яких стратегіях гравця ***B***. Обрана гравцем ***A*** друга стратегія називається максиминной стратегією, а відповідне її значення виграшу $\boldsymbol{\alpha_2=6}$***грн***. буде нижньою ціною гри.

Другий гравець прагне мінімізувати свій програш. Вибравши першу стратегію $\boldsymbol{\beta_1}$, гравець ***B*** може програти не більше ніж $\boldsymbol{\beta_1=\max\{10; 7; 6\}=10}$***грн***. Незалежно від вибору стратегії гравцем ***A***. Аналогічно розмірковуючи, отримаємо наступні результати (***грн***.):

$$\beta_2 = \max\{4; 6; 2\} = 6; \quad \beta_3 = \max\{11; 8; 1\} = 11;$$
$$\beta_4 = \max\{7; 20; 11\} = 20.$$

Гравець ***B*** вибирає стратегію $\boldsymbol{\beta_2}$, яка мінімізує його максимальні програші:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min\{10; 6; 11; 20\} = 6 \text{ д. е.}$$

Величина $\boldsymbol{\beta=6}$ ***грн***. буде гарантованим програшем гравця ***B*** при будь-яких стратегіях гравця ***A***. Обрана гравцем ***B*** друга стратегія називається мінімаксної стратегією, а відповідне її значення програшу $\boldsymbol{\beta_2=6}$ ***грн***. буде верхньою ціною гри.

Слід зазначити, що для будь-якої матриці $\boldsymbol{A=\|\alpha_{ij}\|}$ виконується нерівність $\boldsymbol{\beta\geq\alpha}$. Якщо $\boldsymbol{\beta=\alpha}$, тобто верхня ціна дорівнює нижній ціні гри, то відповідні *чисті стратегії називаються оптимальними*, а про гру кажуть, що вона має седловую точку. *Сідлова точка* є точка рівноваги гри, яка визначає однозначно оптимальні стратегії.

Оптимальність тут означає, що жоден гравець не прагне змінити свою стратегію, так як його супротивник може на це відповісти вибором іншої стратегії, дає найгірший для першого гравця результат.

Величина $\boldsymbol{C=\beta=\alpha}$ називається *ціною гри*. Вона визначає середній виграш гравця ***A*** і середній програш гравця ***B*** при використанні ними оптимальних стратегій. У розглянутому прикладі ціна гри $\boldsymbol{C=6}$ ***грн***., Оптимальна пара стратегій - $\boldsymbol{A_2}$ і $\boldsymbol{B_2}$.

2. Приклад розв'язання завдання теорії ігор в змішаних стратегіях

Завдання 1. Вирішіть гру з платіжною матрицею звівши її до задачі лінійного програмування. Перш за все, перевіримо, чи не має гра сідлові точки. знаходимо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 1;$ $\beta = \min_i \max_j a_{ij} = 2.$

Так як α ≠ β, рішенням гри будуть змішані стратегії, а ціна гри полягає в межах 1 <ν <2. Домінування стратегій, як видно по матриці, в даній грі немає, і всі елементи платіжної матриці невід'ємні. Так що спрощувати матрицю не доводиться.

Складаємо по матриці гри завдання:

$$\begin{array}{ll} f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min, & \varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1; & 2y_1 + y_2 \leq 1; \\ x_1 + 2x_3 \geq 1; & 3y_1 + y_3 \leq 1; \\ x_2 + 4x_3 \geq 1; & y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 1; \\ x_i \geq 0 (i = \overline{1,3}). & y_i \geq 0 (j = \overline{1,3}). \end{array}$$

Результатом вирішення цих завдань є

x_1*=1/3, x_2*=0, x_3*=1/3

y_1*=1/3, y_2*=1/3, y_3*=0

Знаходимо ціну гри ***$\nu=1/f_{min}=1/\varphi_{max}=3/2$*** і компоненти ***p*, q**** оптимальної змішаної стратегії гравців ***A, B***:

$$p_1^* = \nu x_1^* = 3/2 \cdot 1/3 = 1/2, p_2^* = 0, p_3^* = 1/2.$$
$$q_1^* = \nu y_1^* = 3/2 \cdot 1/3 = 1/2, q_2^* = 1/2, q_3^* = 0.$$

Отже, рішення гри знайдено:

$$\overline{p^*} = (1/2; 0; 1/2), \overline{q^*} = (1/2; 1/2; 0), \nu = 3/2.$$

Завдання 2. Розглянемо гру ***3×4***:

		B 1	2	3	4	α_i
A	1	4	3	2	−5	−5
	2	−2	5	−1	4	−2
	3	−3	2	−3	6	−3
	β_j	4	5	2	6	

Нижня ціна гри дорівнює максимину ***α = - 2***, верхня ціна гри дорівнює мінімаксу ***β = 2***. Оскільки ***α ≠ β***, то сідлова точка гри відсутній, завдання повинна вирішуватися в змішаних стратегіях.

Нижня ціна гри - число від'ємне ***(α = -2)***, тому, можливо, значення гри ***M*** не буде позитивним. Число ***C***, яке необхідно додати до всіх елементів матриці, має бути не менше ***2***. Нехай ***C*** =

6. Тоді матриця набуває вигляду

		B 1	2	3	4
A	1	10	9	8	1
	2	4	11	5	10
	3	3	8	3	12

Завдання гравця ***B*** записується у формі завдання лінійного програмування

$$L_{\max} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 10Y_1 + 9Y_2 + 8Y_3 + \quad Y_4 \le 1; \\ 4Y_1 + 11Y_2 + 5Y_3 + 10Y_4 \le 1; \\ 3Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 + 12Y_4 \le 1; \end{cases}$$

$$Y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Вирішуючи задачу симплекс-методом, отримаємо:

$L_{\max} = 0,16;\ Y_1 = 0;\ Y_2 = 0;\ Y_3 = 0,12;\ Y_4 = 0,04.$

Таким чином, рішенням вихідної задачі буде наступне:

$$M = \frac{1}{L} - C = \frac{1}{0,16} - 6 = 0,25;$$

$$q_1^0 = \frac{Y_1}{L} = \frac{0}{0,16} = 0;$$

$$q_2^0 = \frac{Y_2}{L} = \frac{0}{0,16} = 0;$$

$$q_3^0 = \frac{Y_3}{L} = \frac{0,12}{0,16} = 0,75;$$

$$q_4^0 = \frac{Y_4}{L} = \frac{0,04}{0,16} = 0,25.$$

В даному прикладі перша і друга стратегії гравця ***B*** марні, так як $\boldsymbol{q_1=q_2=0}$. При випадковому чергуванні третьої і четвертої стратегій з відносними частотами $\boldsymbol{q_3=0,75}$ і $\boldsymbol{q_4=0,25}$ відповідно гравцеві ***B*** забезпечений середній виграш в розмірі ***M=0,25***.

Оптимальні стратегії гравця ***A*** виходять з рішення двоїстої завдання.

В даний час розвиток теорії ігор вийшло далеко за межі розглянутого найпростішого випадку парних ігор з нульовою сумою.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Оцінювання виконаних завдань практичного заняття курсантами.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна

1. Білоусова С.В., Ковальчук Т.В. Економіко-математичне моделювання: компендіум і практикум : навч. посіб. Київ :Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2018. 524 с. https://knute.edu.ua/file/MjIxNw==/3712be6bd72697827f78c604643cda82.pdf
2. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с. https://www.scribd.com/document/489083877/Економіко-математичні-методи-і-моделі-оптимізація-2-pdf
3. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2021. 150 с. http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/9963/1/Doslidzhennia-operatsii-MB-073.pdf
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: навч. посібник. Київ

КНЕУ, 2016. 452 с. https://fingal.com.ua/content/view/207/76/
5. Рудик О.Г. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи по дисципліні «Економетрика» Одеса: Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова.2019. 96 с. http://dspace.onu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/23810/1/Рудик_Економетрика.pdf
6. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf

Додаткова

1. Великодний С. С. Моделювання систем: конспект лекцій. Одеський державний екологічний університет, 2018. 186 с. http://eprints.library.odeku.edu.ua/id/eprint/708/1/VelykodniySS_Modelirovanie_system_KL_2018.pdf
2. Дьоміна В. М. Оптимізаційні методи та моделі. Моделювання систем масового обслуговування: конспект лекцій. Харків: ХНАУ, 2015. 42 с.
3. Литвинов А. Л. Теорія систем масового обслуговування : навч. посібник. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. 141 с. https://eprints.kname.edu.ua/ /'50287/1/2017_ПЕЧ_29Н_ТеоріяСистМасОбслугов%20Литвинов.pdf
4. Неруш В. Б., Курдеча В. В. Імітаційне моделювання систем та процесів. Київ: НН ІТС НТУУ «КПІ», 2012. 115 с. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/15598/1/Konspect_lekciy_Imit_modelyr_syst_process%28CHANGED%29.pdf
5. Самсонов В.В. Алгоритми розв’язання задач оптимізації: Навчальний посібник. Київ: НУХТ, 2014. 300 с. https://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/14209/1/1.pdf

Інформаційні ресурси

1. https://mses.kpi.ua/konfer/36.pdf
2. http://dspu.edu.ua/kafektm/doc/zbirnuk_conference.pdf
3. https://www.business-inform.net/thematic-search/?theme=economic-and-mathematical-modeling
4. http://web.kpi.kharkov.ua/auts/wp-content/uploads/sites/67/2017/02/MOCS_Kachanov_posobie.pdf
5. https://www.stu.cn.ua/media/files/conference/mods2016.pdf
6. https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/ct-p/PTCMathcad
7. https://www.mathcad.com/en/try-and-buy/mathcad-express-free-download
8. http://mathcad.com.ua/
9. www.minutemansoftware/download
10. http://www.minutemansoftware.com/simulation.htm
11. http://www.minutemansoftware.com/downloads.asp
12. https://www.mathworks.com/products/matlab.html
13. https://www.mathworks.com/products/simulink.html
14. https://www.aimsun.com/

15.https://www.arenasimulation.com/
16.https://www.dex.siemens.com/plm/tecnomatix/plant-simulation