МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кафедра кібербезпеки та DATA-технологій, факультет №6

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з навчальної дисципліни «Теорія ймовірності та математична статистика»

обов’язкових компонент освітньої програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (фінансова безпека та фінансові розслідування)

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Вченою радою факультету № 6
Протокол від 25.08.2023 № 7

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні кафедри кібербезпеки та DATA-технологій факультету № 6 *(протокол від 15.08.2023 № 8)*

Розробник:

Завідувач кафедри кібербезпеки та DATA-технологій факультету № 6, к.т.н., доцент Гнусов Ю.В.

Рецензенти:

1. *Доцент кафедри інформаційних систем факультету інформаційних технологій ХНЕУ ім. Семена Кузнеця, к.т.н., доцент Євстрат Д.І.;*
2. *Доцент кафедри протидії кіберзлочинності факультету №4 ХНУВС, к.т.н., доцент Світличний В.А.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами (денна форма навчання)

Номер та назва навчальної теми	Кількість годин, відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		Лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр № 2							
ТЕМА № 1. *Класифікація подій. Дії над подіями. Визначення ймовірності*	18	4		4		10	
ТЕМА № 2. *Повторення незалежних випробувань*	18	4		4		10	
ТЕМА № 3. *Дискретні та неперервні випадкові величини*	24	6		6		12	
ТЕМА № 4. *Закон великих чисел*	18	4		4		10	
ТЕМА № 5. *Варіаційні ряди та їх характеристики*	18	4		4		10	
ТЕМА № 6. *Перевірка статистичних гіпотез*	24	6		6		12	
Всього за семестр № 2:	120	28		28		64	**екзамен**

Розподіл часу навчальної дисципліни за темами (заочна форма навчання)

Номер та назва навчальної теми	Кількість годин, відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		Лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр № 2							
ТЕМА № 1. *Класифікація подій. Дії над подіями. Визначення ймовірності*	17	1		1		15	
ТЕМА № 2. *Повторення незалежних випробувань*	17	1		1		15	
ТЕМА № 3. *Дискретні та неперервні випадкові величини*	24	2		2		20	**екзамен**

ТЕМА № 4. *Закон великих чисел*	20					20	
ТЕМА № 5. *Варіаційні ряди та їх характеристики*	22	2				20	
ТЕМА № 6. *Перевірка статистичних гіпотез*	20					20	
Всього за семестр № 2:	120	6		4		110	

2. Методичні вказівки до практичних занять

Практичне заняття №1. Елементи комбінаторики. Обчислення ймовірності

Навчальна мета заняття: ознайомлення з поняттям елементів комбінаторики, способами її обчислення, формування вміння розв'язувати задачі на знаходження ймовірності.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання:

Вступ

1. Елементи комбінаторики.

2. Обчислення ймовірності

Висновки

Література:

Матеріали лекції 1.

[1, с. 15 - 31]

[3, с. 9 - 20]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Елементи комбінаторики

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

Правило додавання (суми)

Правило суми. Якщо деякий об'єкт $\boldsymbol{A}$ може бути обраний із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт $\boldsymbol{B}$ - $\boldsymbol{n}$ способами, то вибрати або $\boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{B}$ можна $\boldsymbol{m+n}$ способами.

Правило множення (добутку)

Правило добутку. Якщо об'єкт $\boldsymbol{A}$ можна вибрати із сукупності об'єктів m способами й після кожного такого вибору об'єкт $\boldsymbol{B}$ можна вибрати $\boldsymbol{n}$ способами, то пари об'єктів $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ у зазначеному порядку може бути обрана $\boldsymbol{m \cdot n}$ способами.

Розміщення

***Розміщеннями* з $\boldsymbol{n}$ елементів по $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{A_n^k}$)** називаються будь-які впорядковані $k-$елементні підмножини $n-$елементної множини, що різняться одна від одної або своїми елементами, або їхнім порядком (якщо вибрані елементи не повторюються, то маємо розміщення без повторень, а якщо повторюються – розміщення з повтореннями).

Формули для числа розміщень $\boldsymbol{A_n^k}$

Без повторень	З повтореннями
$\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},\ 0 \le k \le n}$	$\boldsymbol{\overline{A}_n^k = n^k}$

Перестановки

Перестановками $\boldsymbol{k}-$елементної множини називаються її $\boldsymbol{k}$–елементні впорядковані підмножини, що відрізняються тільки порядком елементів (якщо всі елементи заданої множини різні – маємо перестановки без повторень, а якщо в заданій множині елементи можуть повторюватися, серед яких $\boldsymbol{a_1}$ повторюється $\boldsymbol{k_1}$ раз, $\boldsymbol{a_2}$ – $\boldsymbol{k_2}$ раз, …, $\boldsymbol{a_l}$ – $\boldsymbol{k_l}$ – раз, то маємо перестановки з повтореннями).

***Формули для числа перестановок* $\boldsymbol{P_k}$**

Без повторень	З повтореннями
$\boldsymbol{P_k = k!}$	$\boldsymbol{\overline{P}_{k,k_1,\dots,k_l} = \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_l!}}$, де
$\boldsymbol{k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$ $\boldsymbol{1! = 0! = 1}$	$\boldsymbol{k_1 + k_2 + \cdots + k_l = k}$

Комбінації (сполучення)

Комбінаціями (сполученнями) без повторень з n елементів по k називаються будь-які k–елементні підмножини n-елементної множини, що різняться між собою принаймні одним елементом. Порядок елементів у сполученні не є істотним.

Комбінаціями (сполученнями) з повтореннями з n елементів (необов'язково різних) по k називаються набори цих елементів, до кожного з яких входять k елементів і які відрізняються хоча б одним елементом або тим, що принаймні один елемент входить в різні сполучення різне число разів.

Формули для числа комбінацій (сполучень) C_n^k

Без повторень

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

$$0 \le k \le n$$

З повтореннями

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

Приклади для розв'язання

Приклад 1. З міста A в місто B можна добратися 12 потягами, 3 літаками, 23 автобусами. Скількома способами можна добратися з міста A у місто B?

Розв'язання. Проїзд з A у B на потягу, літаку або автобусом є подіями, які не можуть виконуватися одночасно однією людиною (взаємовиключними), тому загальну кількість маршрутів можна обчислити сумуванням способів пересування

$$N = 12 + 3 + 23 = 38.$$

Приклад 2. У турнірі беруть участь 8 команд з хокею. Скільки існує способів розподілити перше, друге та третє місця?

Розв'язання. Відповідно до умови аналіз призових місць має бути наступним: перше місце займе одна з 8 команд, друге – одна з 7, третє – одна з 6, оскільки кожна з них не може претендувати одночасно на два призових місця. Тому таких способів буде

$$N = 8\cdot 7\cdot 6 = 336.$$

Приклад 3. Є набір цифр: 0, 1, 2, 3 і 4. Визначити, скільки тризначних чисел можна утворити за допомогою цих цифр, якщо в межах числа цифри можуть повторюватись.

Розв'язання. Оскільки цифри у числі можуть повторюватись, то застосуємо таку схему. На перше місце можна поставити будь-яку з заданих цифр окрім нуля, тобто існує 4 способи вибрати першу цифру. Другу цифру ми вибираємо серед 5 цифр, оскільки тепер можна використовувати 0. Отже, існує 5 способів вибрати другу цифру. Третю цифру ми теж вибираємо серед 5 цифр. За правилом добутку кількість способів скласти тризначне число із запропонованих цифр дорівнює добутку кількості способів, якими можна вибрати цифру на кожне місце в числі. Отже, маємо:

$$\mathbf{4 \cdot 5 \cdot 5 = 100}.$$

Таким чином, із запропонованих п'яти цифр можна скласти 100 тризначних чисел, якщо цифри у числі можуть повторюватись.

Приклад 4. Скількома різними способами можна розмістити п'ять книжок на книжковій полиці?

Розв'язання. Першою можна поставити будь-яку з 5 книг. Другою – будь-яку з 4, що залишилися, і т. д. Таким чином, кількість способів, якими можна поставити на полку 5 різних книг, дорівнює числу перестановок з 5 елементів, тобто

$$\boldsymbol{P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120}.$$

Приклад 5. Студент повинен скласти три іспити протягом семи днів (не більше, ніж один іспит у день). Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює числу упорядкованих підмножин з трьох елементів (дні складання конкретних іспитів), що можна взяти з множини з семи елементів (дні, які відведені для складання іспитів), тобто

$$\boldsymbol{N = A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} =}$$
$$\boldsymbol{= 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210}.$$

Відзначимо, що у випадку, коли, припустимо, відомо, що останній іспит повинен бути складеним на сьомий день, кількість способів буде дорівнювати

$$\boldsymbol{N = 3 \cdot A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4} =}$$
$$\boldsymbol{= 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90}.$$

Приклад 6. Здійснюється вибіркова перевірка якості виробів. З партії, що складається з 15 виробів, навмання відібрали 3. Скільки існує способів відібрати ті вироби, що будуть проходити перевірку?

Розв'язання. За умови задачі маємо $n = 15$, $m = 3$, при цьому спосіб розташування елементів у вибірковій сукупності не має значення. Отже, кількість способів відбору визначається як кількість сполучень і дорівнює:

$$\boldsymbol{C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455}.$$

Тобто існує 455 способів сформувати вибіркову сукупність.

Приклад 7. Скільки різних слів (беззмістовних) можна утворити перестановкою букв у слові «головоломка»?

Розв'язання. Слово «головоломка» містить 11 букв, серед них буква «о» зустрічається 4 рази, «л» – 2 рази, всі інші по одному разу.
За формулою

$$\overline{P}_{k,k_1,\dots,k_l} = \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_l!},\text{ маємо } \overline{P}_{11,4,2} = \frac{11!}{4!\cdot 2!} = \mathbf{34650}.$$

Відповідь: 34650 слів.

Приклад 7. Скількома способами можна утворити набір із 8 тістечок, якщо їх є 4 різних види?

Розв'язання. Оскільки порядок тістечок у вибірці не суттєвий, то кожний набір задається невпорядкованою вибіркою довжини 8 із 4 елементів (назв видів тістечок). Тому нам потрібно знайти кількість комбінацій з повтореннями із 4 елементів по 8. Маємо:

$$\overline{C}_4^8 = C_{4+8-1}^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{8!\cdot 3!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{165}.$$

2. Обчислення ймовірності

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

Ймовірністю $\boldsymbol{P(A)}$ події $\boldsymbol{A}$ називають відношення кількості сприяючих події $\boldsymbol{A}$ результатів експерименту $\boldsymbol{m}$ до загальної кількості рівноможливих несумісних елементарних подій $\boldsymbol{n}$, тобто

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n},\ 0 \le P(A) \le 1}.$$

Нехай простір елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$ інтерпретується як область на числовій осі (або на площині, або у просторі), яка має відповідно довжину, площу або об'єм. Тоді

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{mes\, A}{mes\, \Omega}},$$

де $\boldsymbol{mes\, A}$ – вимір (довжина або площа, або об'єм) області $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{mes\, \Omega}$ – вимір області $\boldsymbol{\Omega}$. Ця формула називається формулою *геометричної* ймовірності.

Приклади для розв'язання

Приклад 8. Кидають два гральних кубика. Яка ймовірність того, що сума очок, що випали, буде парною?

Розв'язання. Позначимо через $\boldsymbol{A}$ подію, ймовірність якої треба знайти. За означенням, ймовірність $\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$. Кількість усіх можливих комбінацій, що взагалі можуть бути у цьому випадку $\boldsymbol{n = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 6 = 36}$.

Події **A** будуть сприяти $\boldsymbol{m}$ = **18** комбінацій, у яких сума очок буде парною, а саме: **1-1, 1-3, 1-5, 2-2, 2-4, 2-6, 3-1, 3-3, 3-5, 4-2, 4-4, 4-6, 5-1, 5-3, 5-5, 6-2, 6-4, 6-6.**

Таким чином,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{18}{36} = 0,5}.$$

Приклад 9. В урні містяться 6 білих і 4 чорних кульки. З урни виймають навмання одразу 5 кульок. Знайти ймовірність події: $\boldsymbol{A}$ – усі кульки білі; $\boldsymbol{B}$ – чотири кульки білі та одна чорна.

Розв'язання. Число рівноможливих незалежних подій дорівнює

$$\boldsymbol{n = C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\cdot(10-5)!} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252}.$$

Події A сприяють $\boldsymbol{m_1 = C_6^5 = \frac{6!}{5!\cdot(6-5)!} = 6}$,

а події $\boldsymbol{B}$ – $\boldsymbol{m_2 = C_6^4 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!} = 15\cdot 4 = 60}$ наслідків експерименту. Тому

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{6}{252} = \frac{1}{42} \approx 0{,}024},$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{60}{252} = \frac{2}{7} \approx 0{,}24}.$$

Приклад 10. У коробці містяться шість однакових, занумерованих кульок. Навмання по одній виймають усі кульки. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих кульок розташуються за зростанням.

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{A}$ – подія, ймовірність якої треба знайти. Результатами експерименту є перестановки без повторень з 6 елементів. Число усіх результатів експерименту дорівнює $\boldsymbol{P_6}$. Для події $\boldsymbol{A}$ сприятливим є лише один результат (номери зростатимуть). Отже,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}}.$$

Приклад 11. Слово "інтеграл" складено з літер на картках розрізної азбуки. З них навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за однією в порядку появи. Яка ймовірність того, що при цьому складеться слово "гра"?

Розв'язання. При утворенні простору елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$ розглядуються усі впорядковані 3-елементні підмножини 8-елементної множини (букви, що утворюють слово "інтеграл"). Тому

$$\boldsymbol{n = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336},$$

а сприятливими для шуканої події $\boldsymbol{A}$ є лише один випадок $\boldsymbol{(m = 1)}$, коли підряд буде вийнято букви "г", "р" і "а". Отже,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{336} \approx 0{,}003}.$$

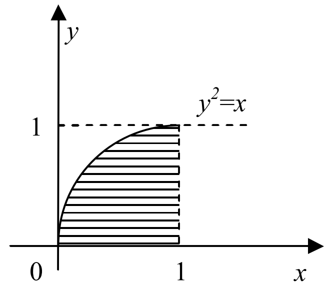
Приклад 12. Серед 250 виготовлених деталей виявилося п'ять, що не відповідають стандарту. Визначити частоту появи деталей, що не відповідають стандарту.

Розв'язання: З визначення частоти одержуємо, що

$$\boldsymbol{P^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{250} = 0{,}02}.$$

Приклад 13. Навмання вибираються два дійсних числа $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$, $\boldsymbol{0 \leq y \leq 1}$. Знайти ймовірність того, що $\boldsymbol{y^2 \leq x}$.

Розв'язання: Поставимо у відповідність парі чисел $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ крапку на площині $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.



Простір елементарних вибірок буде квадрат, двома сторонами якого є одиничні відрізки осей координат.

Фігура, множина крапок якої відповідає ісходам, сприятливим події $\boldsymbol{y^2 \leq x}$, обмежена графіками функцій $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y^2 = x}$.

$$\boldsymbol{S = q = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}}.$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Практичне заняття №2. Теореми додавання і множення ймовірностей

Навчальна мета заняття: відпрацювати вміння вирішувати завдання на визначення класичної імовірності, в тому числі з використанням теорем додавання і множення ймовірностей, перевірити розуміння теоретичного матеріалу.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання:

Вступ

1. Сума, добуток, різниця подій. Теорема додавання ймовірностей для несумісних подій. Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних подій. Ймовірність появи хоча би однієї з *n* подій, незалежних в сукупності. Теорема додавання ймовірностей для сумісних подій.

Висновки

Література:
Матеріали лекції 2.
[1, с. 38 - 51]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Сума, добуток, різниця подій. Теорема додавання ймовірностей для несумісних подій. Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних подій. Ймовірність появи хоча би однієї з n подій, незалежних в сукупності. Теорема додавання ймовірностей для сумісних подій.

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

Якщо події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ несумісні ($\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$), причому відомі їх ймовірності $\boldsymbol{P(A)}$ і $\boldsymbol{P(B)}$, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)}.$$

Ймовірність протилежної події обчислюється за формулою $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A})}$. Якщо ж ніяких інших обмежень, крім цих умов, при обчисленні ймовірності $\boldsymbol{P(A)}$ не накладається, то така ймовірність називається ***безумовною***. Якщо ж поява деякої події $\boldsymbol{A}$ відбувається за умови, що відбулась інша подія $\boldsymbol{B}$, причому $\boldsymbol{P(B) > 0}$, то ймовірність появи події $\boldsymbol{A}$ називають ***умовною*** і обчислюють за формулою

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}}, (\boldsymbol{P(B) > 0}).$$

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчисленої за умови, що перша відбулася

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Якщо A, B - незалежні події , то, маємо

$$P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ймовірність появи принаймні однієї з двох сумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Нехай події A може здійснитися лише разом з одним з подій H_1, H_2, ..., H_n, що творять повну групу. Нехай відомі ймовірності $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Тому що події H_i утворять повну групу, те $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$, а також відомі й умовні ймовірності події A: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, ..., $P(A/H_n)$. Т.к. заздалегідь невідомо, з яким з подій H_i відбудеться подія A, те події H_i називають гіпотезами.

Необхідно визначити ймовірність події A и переоцінити ймовірності подій H_i з урахуванням повної інформації про подію A.

Імовірність події A визначається як:

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ – формула повної ймовірності.

Якщо подія A може наступити тільки разом з одним з подійєю H_1, H_2, ..., H_n, що утворять повну групу неспільних подій і називаних гіпотезами, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків імовірностей кожного з подій H_1, H_2, ..., H_n на відповідну умовну ймовірність події A.

Умовні ймовірності гіпотез обчислюються по формулі:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$ – формула Байеса.

Приклади для розв’язання

Приклад 1. У лотереї 1000 білетів, з них на один білет випадає виграш 500 грн., на 10 білетів – виграші по 100 грн., на 50 білетів – виграші по 20 грн., на 100 білетів – виграші по 5 грн. Решта білетів невиграшні. Знайти ймовірність виграшу на один білет не менш як 20 грн.

Розв’язання. Позначимо події: A – виграш не менш як 20 грн.; A_1 – виграш 20 грн.; A_2 - виграш 100 грн.; A_3 – виграш 500 грн.

Подія A виражається через суму трьох несумісних подій A_1, A_2, A_3, тобто $A = A_1 + A_2 + A_3$. Застосовуючи теорему додавання, дістанемо

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$

або

$$P(A) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

Приклад 2. Ймовірність попадання в мішень одним стрільцем становить $\boldsymbol{0,8}$, іншим – $\boldsymbol{0,7}$. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що принаймні один стрілець влучить в мішень?

Розв'язання. Нехай подія $\boldsymbol{A}$ – влучення першого стрільця в ціль, подія $\boldsymbol{B}$ – другого, а подія $\boldsymbol{C}$ – шукана подія. Тоді $\boldsymbol{C = A + B}$. Враховуючи, що події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – сумісні, проте незалежні, дістаємо:

$$\boldsymbol{P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =}$$
$$\boldsymbol{= 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,94}$$

Приклад 3. Інститут отримує пакети з контрольними роботами з міст $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$. Імовірність отримання пакету з міста $\boldsymbol{A}$ – $\boldsymbol{0,7}$; з міста $\boldsymbol{B}$ – $\boldsymbol{0,2}$. Знайти ймовірність того, що черговий пакет буде отримано з міста $\boldsymbol{C}$.

Розв'язання. Події «пакет отриманий з міста $\boldsymbol{A}$», «пакет отриманий з міста $\boldsymbol{B}$», «пакет отриманий з міста $\boldsymbol{C}$» утворюють повну групу, тому

$$\boldsymbol{0,7 + 0,2 + P(C) = 1}; \qquad \boldsymbol{P(C) = 0,1}.$$

Приклад 4. Ймовірність у студента другого курсу перейти на третій дорівнює $\boldsymbol{0,9}$, а ймовірність закінчити академію – $\boldsymbol{0,8}$. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент третього курсу закінчить академію?

Розв'язання. Нехай подія $\boldsymbol{A}$ – перехід на третій курс, подія $\boldsymbol{B}$ – закінчення академії. Ймовірність цих подій, згідно з умовою, $\boldsymbol{P(A) = 0,9}$, $\boldsymbol{P(B) = 0,8}$. Події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ залежні, оскільки для того, щоб закінчити академію, треба спочатку перейти на третій курс. Отже,

$$\boldsymbol{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,9 \cdot P_A(B) = 0,8},$$

Звідки

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{0,8}{0,9} = 0,89.}$$

Приклад 5. Стрілець $\boldsymbol{A_1}$ влучає в ціль з ймовірністю $\boldsymbol{p_1 = 0,8}$, стрілець $\boldsymbol{A_2}$ – з ймовірністю $\boldsymbol{p_2 = 0,7}$, стрілець $\boldsymbol{A_3}$ – з ймовірністю $\boldsymbol{p_3 = 0,9}$. Знайти ймовірність хоча б одного попадання (подія $\boldsymbol{A}$) при одному пострілі кожного зі стрільців.

Розв'язання. Обчислимо ймовірності протилежних подій, які полягають в тому, що кожен зі стрільців не влучить в ціль:

$$\boldsymbol{q_1 = 1 - p_1 = 0,2};$$
$$\boldsymbol{q_2 = 1 - p_2 = 0,3};$$
$$\boldsymbol{q_3 = 1 - p_3 = 0,1}.$$

Ймовірність того, що жоден зі стрільців не влучить в ціль, тобто ймовірність події $\overline{\boldsymbol{A}}$**,** дорівнює

$$\boldsymbol{P(\overline{A}) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006}.$$

Тоді ймовірність того, що хоча б один зі стрільців влучить в ціль

$$\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,006 = 0,994}.$$

Приклад 6. В офісі є чотири ноутбуки виготовлених компанією $\boldsymbol{A}$, 6 компанією $\boldsymbol{B}$, 8 компанією $\boldsymbol{C}$ та два, які виготовляє $\boldsymbol{D}$. Гарантії, що ноутбуки цих компаній працюватимуть протягом гарантійного терміну без ремонту становлять 70 %, 80%, 85%, та 55% для кожної з них. Потрібно знайти ймовірність того, що вибраний ноутбук працюватиме без ремонту протягом гарантійного терміну.

Розв'язування. Позначимо події наступним чином: $\boldsymbol{H_i}$ – вибрано ноутбук компанії; $\boldsymbol{A}$ – ноутбук працюватиме без ремонту.

Ймовірності вибору ноутбуків кожної з компаній вважаємо рівні їх кількості - на основі цього ймовірності приймуть значення :

$$\boldsymbol{P(H_1) = \frac{4}{4+6+8+2} = 0,2;}$$
$$\boldsymbol{P(H_2) = \frac{6}{20} = 0,3;}$$
$$\boldsymbol{P(H_3) = \frac{8}{20} = 0,4;}$$
$$\boldsymbol{P(H_4) = \frac{2}{20} = 0,1.}$$

Ймовірності, що вони працюватимуть без ремонту беремо з умови

$$\boldsymbol{P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{70\%}{100\%} = 0,7};$$
$$\boldsymbol{P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{80\%}{100\%} = 0,8};$$
$$\boldsymbol{P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{85\%}{100\%} = 0,85};$$
$$\boldsymbol{P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{55\%}{100\%} = 0,55}.$$

Тут ми просто переводимо проценти в ймовірності.

Застосовуємо формулу повної ймовірності:

$$\boldsymbol{P(A) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,85 + 0,1 \cdot 0,55 =}$$
$$\boldsymbol{= 0,14 + 0,24 + 0,34 + 0,055 = 0,775}.$$

Таким чином, ймовірність безремонтної роботи ноутбука рівна 0,775. Колись це значення можливо було великим досягненням, в теперішній час, якщо б $\boldsymbol{22,5\%}$ ноутбуків потребували ремонту під час гарантійного терміну – це була б велика проблема виробників.

Приклад 7. Деталі, виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх на стандартність до одному із двох контролерів. Імовірність того, сто деталь потрапить до першого контролера, дорівнює $\boldsymbol{0,6}$, а до другого – $\boldsymbol{0,4}$. імовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартної першим контролером, дорівнює $\boldsymbol{0,94}$, а другим – $\boldsymbol{0,98}$. Придатна деталь при перевірці була визнана стандартної. Знайти ймовірність того, що цю деталь перевірив перший контролер.

Розв'язання.. Позначимо через подію $\boldsymbol{A}$, що складається в тім, що придатна деталь визнана стандартної. Можна зробити два припущення:

1) деталь перевірив перший контролер (гіпотеза $\boldsymbol{B_1}$);

2) деталь перевірив другий контролер (гіпотеза $\boldsymbol{B_2}$).

Шукану ймовірність того, що деталь перевірив перший контролер, знайдемо по формулі Байеса.

$$\boldsymbol{P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2)}}$$

За умовою задачі маємо:

$\boldsymbol{P(B_1) = 0,6}$ – імовірність того, що деталь попадає до першого контролера;

$\boldsymbol{P(A/B_1) = 0,94}$ – імовірність того, що придатна деталь буде визнана першим контролером стандартної;

$\boldsymbol{P(B_2) = 0,4}$ – імовірність того, що деталь попадає до другого контролера;

$\boldsymbol{P(A/B_2) = 0,98}$ – імовірність того, що придатна деталь буде визнана другим контролером стандартної;

Шукана ймовірність

$$\boldsymbol{P_A(B_1) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0,59}.$$

До випробування ймовірність гіпотези $\boldsymbol{B_1}$ рівнялася $\boldsymbol{0,6}$, а після того, як став відомий результат випробування, імовірність цієї гіпотези (вірніше, умовна ймовірність) змінилася й стала рівної $\boldsymbol{0,59}$. Т.о., використання формули Байеса дозволило переоцінити ймовірність розглянутої гіпотези.

Приклад 8. Два стрільці стріляють по мішені незалежно один від одного по одному разу. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця $\boldsymbol{p_1 = 0,6}$; для другого – $\boldsymbol{p_2 = 0,8}$. В мішені виявлено одне влучення. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.

Розв'язання. Подія $\boldsymbol{A}$: в мішені виявлено одне влучення. Розглянемо такі гіпотези:

$\boldsymbol{H_1}$ – обидва не влучили; $\boldsymbol{H_2}$ – обидва влучили; $\boldsymbol{H_3}$ – перший влучив, другий не влучив; $\boldsymbol{H_4}$ – другий влучив, перший не влучив.

Обчислимо ймовірності цих гіпотез:

$$\boldsymbol{P(H_1) = 0,4\cdot 0,2 = 0,08, P(H_2) = 0,6\cdot 0,8 = 0,48,}$$
$$\boldsymbol{P(H_3) = 0,6\cdot 0,2 = 0,12, P(H_4) = 0,4\cdot 0,8 = 0,32.}$$

Контроль:

$$\boldsymbol{P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 0,08, +0,48 + 0,12 + 0,32 = 1}.$$

Оскільки умовні ймовірності $\boldsymbol{P_A(H_1) = 0}$, $\boldsymbol{P_A(H_2) = 0}$, $\boldsymbol{P_A(H_3) = 1}$, $\boldsymbol{P_A(H_4) = 1}$, то за формулою повної ймовірності

$$\boldsymbol{P(A) = 1\cdot 0,12 + 1\cdot 0,32 = 0,44}.$$

Отже, шукана ймовірність

$$\boldsymbol{P(H_3/A) = \frac{1\cdot 0{,}12}{0{,}44} = \frac{3}{11}}.$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Тема № 2. Повторення незалежних випробувань

Практичне заняття №3. Повторення незалежних випробувань

Навчальна мета заняття: розвинути уявлення про незалежних події, дати уявлення про послідовність незалежних однакових випробувань, або схему Бернуллі.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання:

Вступ
1. Формула Бернуллі
2. Локальна і інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
3. Теорема Пуассона

Висновки

Література:

Матеріали лекції 2.
[1, с. 61 - 77]
[3, с. 39 - 48]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Формула Бернуллі

Поставимо перед собою задачу обчислити ймовірність того, що при n випробуваннях подія А здійсниться рівно k раз і, отже, не здійсниться n-k раз.

При цьому не потрібно, щоб подія А повторилося рівно k раз у певній послідовності. Шукану ймовірність позначимо $P_n(k)$. Поставлену задачу можна вирішити за допомогою, так званої формули Бернуллі:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Кількість успіхів $\boldsymbol{m_0}$, якій відповідає найбільша ймовірність $\boldsymbol{P_n(m_0)}$, називають ***найбільш імовірною кількістю успіхів***, або ***найімовірнішим числом***, або ***модою***. Її визначають із нерівності:

$\boldsymbol{(n+1)\cdot p - 1 \le m_0 < (n+1)\cdot p}$, або $\boldsymbol{n\cdot p - q \le m_0 < n\cdot p + p}$.

Якщо:

1) число $\boldsymbol{n\cdot p - q}$ – ціле, то існують дві моди, а саме $\boldsymbol{m_0}$ і $\boldsymbol{m_0 + 1}$;
2) число $\boldsymbol{n\cdot p - q}$ – дробове, то існує одна мода, а саме $\boldsymbol{m_0}$;
3) якщо число $\boldsymbol{n\cdot p}$ – ціле, то мода визначається, як $\boldsymbol{m_0 = n\cdot p}$.

Приклади для розв'язання

Приклад 1. Імовірність того, що витрата електроенергії в продовженні однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює p = 0,75. Знайти ймовірність того, що в найближчі 6 доби витрата електроенергії в плині 4 доби не перевищить норми.

Розв'язання.. Імовірність нормальної витрати електроенергії в продовженні кожних з 6 доби постійна й дорівнює p = 0,75. Отже, імовірність перевитрати електроенергії в щодоби також постійна й дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

За формулою Бернуллі: $p_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6\times 5}{1x\times 2} 0{,}75^4 \times 0{,}25^2 = 0{,}3$.

Приклад 2. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч в корзину дорівнює 0,6. Вироблено 8 кидків. Знайти:

а) ймовірність того, що при цьому буде рівно два влучення;

б) найімовірніше число влучень і відповідну ймовірність.

Розв'язання. Проводиться серія з восьми випробувань з двома наслідками в кожному. Будемо вважати ці випробування незалежними. Ймовірність попадання м'яча у кошик при кожному випробуванні одна і та ж. Отже, в якості моделі можна використовувати схему Бернуллі.

$P_8(2) = C_8^2 \times (0{,}6)^2 \times (0{,}4)^{8-2} \approx 0{,}041$

Для найбільш ймовірного числа влучень m_0 скористаємося формулою $\boldsymbol{n\cdot p - q \le m_0 < n\cdot p + p}$. Так як з яких при n= 8, p = 0,6, q = 0,4 , то отримаємо $8\times 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 8\times 0{,}6 + 0{,}4$ т.е. $m_0 = 5$

а відповідна ймовірність $P_8(5) = {}^5C_8 \times (0{,}6)^5 \times (0{,}4)^3 \approx 0{,}28$

Приклад 3. У деякій родині 8 дітей. Імовірність народження хлопчика або дівчинки дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що а) є 4 хлопчики і 4 дівчинки; б) число хлопчиків укладено між 2 і 6 (включно).

Розв'язання. Застосуємо формулу Бернуллі:

а) P$_8$(4) = $C_8^4 \cdot (0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!} \cdot (0{,}0625)^2 = 0{,}00390625 \cdot \frac{5\cdot 6I\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4} =$
= 0,2734375≈ 0,27.
б) Кількість хлопчиків знаходиться між 2 та 6, тобто 2 або 3, або 4, або 5,або 6.
P$_8$(2) = $C_8^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^6 = 0{,}00390625 \cdot \frac{8!}{2!\cdot 6!} \approx 0{,}11$
P$_8$(3) = $C_8^3 \cdot (0{,}5)^8 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot 0{,}004 \approx \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} \cdot 0{,}004 = 0{,}21875$
P$_8$(4) = 0,27
P$_8$(5) = $C_8^5 \cdot (0{,}5)^8 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} \cdot 0{,}004 \approx \frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} \cdot 0{,}004 = 0{,}21875$
P$_8$(6) = $C_8^6 \cdot (0{,}5)^8 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} \cdot 0{,}004 = 0{,}11$
P$_{[2;6]}$(A) = 0,11+0,21875+0,27+0,21875+0,11 = 0,9275

2. Локальна і інтегральна теореми Муавра-Лапласа

Локальна теорема Лапласа. Локальна теорема Лапласа дає формулу, що дозволяє приблизно знайти ймовірність появи події $\boldsymbol{k}$ раз у $\boldsymbol{n}$ випробуваннях, якщо число випробувань досить велико.

Якщо ймовірність $\boldsymbol{p}$ появи події $\boldsymbol{A}$ в кожному випробуванні постійна й відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність $\boldsymbol{P_n(k)}$ того, що подія $\boldsymbol{A}$ з'явиться в $\boldsymbol{n}$ випробуваннях $\boldsymbol{k}$ раз, приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше $\boldsymbol{n}$) значенню функції:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\varphi(x)} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x = \frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}}$$

Існують таблиці у яких визначені значення функції $\boldsymbol{\varphi(x)}$, що відповідають позитивним значенням аргументу $\boldsymbol{x}$. Для негативних значень аргументу користується тими ж таблицями, тому що функція $\boldsymbol{\varphi(x)}$ парна, тобто $\boldsymbol{\varphi(-x) = \varphi(x)}$.

Т.е. $\boldsymbol{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\varphi(x)}$.

Інтегральна теорема Лапласа. Знову припустимо, що проводиться $\boldsymbol{n}$ випробувань, у кожному з яких імовірність появи події $\boldsymbol{A}$ постійно й так $\boldsymbol{p(0 < p < 1)}$. Само як обчислити ймовірність $\boldsymbol{P_n(k_1, k_2)}$ того, що подія А з'явиться в *n* випробуваннях не менш $\boldsymbol{k_1}$ раз і не більше $\boldsymbol{k_2}$ разів. На це питання відповідає інтегральна теорема Лапласа.

Теорема. Якщо ймовірність $\boldsymbol{p}$ настання події $\boldsymbol{A}$ в кожному випробуванні постійна й відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність $\boldsymbol{P_n(k_1, k_2)}$ того, що подія $\boldsymbol{A}$ з'явиться в $\boldsymbol{n}$ випробуваннях від $\boldsymbol{k_1}$ до $\boldsymbol{k_2}$ разів, приблизно дорівнює певному інтегралу:

$$\boldsymbol{P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x''}^{x'} e^{-z^2/2} dz}$$

де

$$\boldsymbol{x' = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \qquad x'' = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}}$$

При рішенні задач користуються спеціальними таблицями, тому що інтеграл $\boldsymbol{\Phi(x) = \int e^{-z^2/2} dz}$ не виражається через елементарні функції. У таблиці дані значення функції $\boldsymbol{\Phi(x)}$ для $\boldsymbol{x \geq 0}$; для $\boldsymbol{x < 0}$ користується тією же таблицею (функція $\boldsymbol{\Phi(x)}$ непарна, тобто $\boldsymbol{\Phi(-x) = -\Phi(x)}$). Для $\boldsymbol{x > 5}$, можна прийняти $\boldsymbol{\Phi(x) = 0,5}$. Функцію $\boldsymbol{\Phi(x)}$ часто називають функцією Лапласа. При рішенні задач користуються формулою:

$$\boldsymbol{P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').}$$

Приклади для розв'язання

Приклад 4. Знайти ймовірність того, що подія А наступить рівно 80 разів в 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Розв'язання. Оскільки $\boldsymbol{n = 400}$ велике число, а $\boldsymbol{p = 0{,}2}$ не є близьким до нуля, то для обчислення $P_{400}(80)$ застосуємо локальну теорему Лапласа. $n = 400$ $k = 80$ $p = 0{,}2$ $q = 0{,}8$

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(x)$$

$$x = \frac{80 - 400 \times 0{,}2}{8} = 0,$$

$$\varphi(0) = 0{,}3989$$

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

Приклад 5. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку, дорівнює $p = 0{,}2$. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявиться неперевірених від 70 до 100 деталей.

Розв'язання. Маємо $p = 0{,}2; \quad q = 1 - p = 0{,}8; \quad n = 400; \quad k_1 = 70; \quad k_2 = 100$. Обчислимо

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \times 0{,}2}{\sqrt{400 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} = -1{,}25$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \times 0{,}2}{\sqrt{400 \times 0{,}2 \times 0{,}8}} = 2{,}5.$$

$P_{400}(70,100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$

3.Теорема Пуассона.

Формула Пуассона застосовується тоді, коли поряд з великим значенням числа випробувань $\boldsymbol{n}$ мала ймовірність успіху $\boldsymbol{p}$.

Теорема Пуассона: Нехай число випробувань $\boldsymbol{n}$ у схемі Бернуллі велике, а ймовірність успіху $\boldsymbol{p}$ в одному випробуванні мала, причому малий також добуток $\boldsymbol{\lambda = n \cdot p}$. Тоді $\boldsymbol{P_n(m)}$ визначається по формулі Пуассона:

$$\boldsymbol{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}.}$$

Приклади для розв'язання.

Приклад 6. За даними технічного контролю в середньому 2% виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додатково відрегулювати потрібно буде не більш ніж три годинника.

Розв'язання. Оскільки $\boldsymbol{n = 100}$ велике число, а $\boldsymbol{p = 0,02}$ мале, то шукану ймовірність можна знайти за формулою Пуассона:

$\lambda = n\,p = 100 \cdot 0,02 = 2$;

$$P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) = e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) \approx 0,85.$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Тема № 3. Дискретні та неперервні випадкові величини

Практичне заняття №4. Дискретні випадкові величини

Навчальна мета заняття: сформувати поняття дискретної випадкової величини, ознайомити з основними законами розподілу, опанувати методику обчислення числових характеристик дискретної випадкової величини.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання:

Вступ

1. Ряд розподілу. Многокутник розподілу. Чисельні характеристики дискретної випадкової величини. Рівномірний розподіл.

Висновки

Література:

Матеріали лекції 3.

[1, с. 83 - 101]

[3, с. 56 - 60]

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Ряд розподілу. Многокутник розподілу. Чисельні характеристики дискретної випадкової величини. Рівномірний розподіл.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями і їхніми ймовірностями; його можна задати таблично, аналітично (у вигляді формули) і графічно.

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак часто закон розподілу невідомий і доводиться обмежуватися меншими відомостями. Іноді вигідніше користуватися числами, які описують випадкову величину сумарно; такі числа називають числовими характеристиками випадкової величини.

1. *Математичним сподіванням* дискретної випадкової величини називають суму добуток всіх її можливих значень на їхній імовірності:

$$\boldsymbol{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}.$$

Математичне сподівання наближене дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини.

Властивості.

1. $\boldsymbol{M(C) = C}$: математичне сподівання постійної величини $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C = Const}$) дорівнює самої постійної $\boldsymbol{C = Const}$.
2. $\boldsymbol{M(C \cdot X) = C \cdot M(X)}$: постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання $\boldsymbol{C = Const}$.
3. $\boldsymbol{M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)}$: математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань.
4. $\boldsymbol{M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)}$: математичне сподівання алгебраїчної суми двох випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин.

Математичне сподівання випадкової величини $\boldsymbol{X}$ називається ***центром розподілу імовірності*** (***the probability distribution center)*** випадкової величини $\boldsymbol{X}$.

Теорема. Математичне сподівання $\boldsymbol{M(X)}$ числа появ події $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ незалежних випробуваннях дорівнює добутку випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні:

$$\boldsymbol{M(X) = n \cdot p}.$$

2. На практиці часто потрібно оцінити розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення.

1. Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2}.$$

Для обчислення дисперсії часто буває зручно користуватися теоремою:

Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини $\boldsymbol{X}$ и квадратом її математичного сподівання:

$$\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}.$$

Властивості

1) Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $\boldsymbol{D(X) \geq 0}$.
2) $\boldsymbol{D(C) = 0}$ – дисперсія постійної величини $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C = Const}$) дорівнює нулю.

3) $\boldsymbol{D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)}$ – постійний множник можна виносити за знак дисперсії, зводячи його у квадрат.
4) $\boldsymbol{D(X+Y) = D(X) + D(Y)}$ – дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

Дисперсія числа появ події $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність $\boldsymbol{p}$ появ події постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності появи й не появи події в одному випробуванні: $\boldsymbol{D(X) = n \cdot p \cdot q}$.

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення крім дисперсії служить середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини *X* називають квадратний корінь із дисперсії: $\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{D(X)}}$.

Біноміальний розподіл

Нехай виробляється $\boldsymbol{n}$ незалежних випробувань, у кожному з яких подія $\boldsymbol{A}$ може з'явитися або не з'явитися. Імовірність настання у всіх випробуваннях постійна й дорівнює $\boldsymbol{p}$. розглянемо в якості дискретної випадкової величини *x* число появ події $\boldsymbol{A}$ в цих випробуваннях. Для її рішення потрібно визначити можливі значення $\boldsymbol{X}$ и їхньої ймовірності. Подія $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ випробуваннях може або не з'явитися, або з'явитися $\boldsymbol{1}$ раз, або $\boldsymbol{2}$ рази, … або $\boldsymbol{n}$ раз. Т.ч., можливі значення $\boldsymbol{X}$ такі: $\boldsymbol{x_1 = 0}$, $\boldsymbol{x_2 = 1}$, …, $\boldsymbol{x_n = n}$. Залишається знайти ймовірності цих можливих значень, для чого досить скористатися формулою Бернуллі:

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

– аналітичне вираження шуканого закону розподілу.

Біноміальним називають розподіл ймовірностей, обумовлене формулою Бернуллі. Закон названий *Біноміальним* тому, що праву частину формули можна розглядати як загальний член розмноження біномі Ньютона:

$$\boldsymbol{(p+q)^n = C_n^{n-1} p^{n-1} q + \cdots + C_n^k p^k q^{n-k} + \cdots + C_n^0 p^n}$$

Числові характеристики біномного розподілу:

$$\boldsymbol{M(X) = n \cdot p;\ D(X) = n \cdot p \cdot q;\ \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Розподіл Пуассона.

Для визначення ймовірності $\boldsymbol{k}$ появ події в $\boldsymbol{n}$ випробуваннях використовують формулу Бернуллі. Якщо $\boldsymbol{n}$ велико, використовують формулу Лапласа.

Однак ця формула непридатна, якщо ймовірність події мала ($\boldsymbol{p \leq 0,1}$). В цих випадках прибігають до формули Пуассона.

Зробимо допущення: добуток $\boldsymbol{n \cdot p}$ зберігає постійне значення, а саме $\boldsymbol{n \cdot p = \lambda}$. Це означає, що середнє число появ події при різних значеннях *n* залишається незмінним.

$$\boldsymbol{P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}$$

Функція розподілу величини $\boldsymbol{X}$ має вигляд:

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & 0 < x \le n, n = 1, 2, \dots \end{cases}}$$

Числові характеристики розподілу Пуассона: $\boldsymbol{M(X) = D(X) = \lambda}$. Ця властивість застосовується при вирішенні питання правдивості гіпотези про те, що випадкова величина розподілена за законом Пуассона. Знайдені з випробування досліду статистичні характеристики - математичне сподівання і дисперсія, у випадку, якщо вони близькі за значенням, підлягають закону Пуассона.

Геометричний розподіл

Нехай виробляються незалежні випробування, у кожному з яких імовірність появи події $\boldsymbol{A}$ дорівнює $\boldsymbol{p(0 < p < 1)}$ і, отже, імовірність його не появи $\boldsymbol{q = 1 - p}$ Випробування закінчуються, як тільки з'явиться подія $\boldsymbol{A}$. Т.ч., якщо подія В з'явилося в $\boldsymbol{k}$-м випробуванні, то в попередніх $\boldsymbol{k - 1}$ випробуваннях воно не з'являлося. Нехай у перших $\boldsymbol{k - 1}$ випробуваннях подія $\boldsymbol{A}$ не наступила, а в $\boldsymbol{k}$ *-м* випробуванні з'явилася. Імовірність цієї «складної події»

$$\boldsymbol{P(x = k) = q^{k-1} \cdot p}$$

Гіпергеометричний розподіл

Знайдемо ймовірність того, що $\boldsymbol{X = m}$, тобто серед $\boldsymbol{n}$ відібраних виробів дорівнює $\boldsymbol{m}$ стандартних. Використовуємо для цього класичне визначення ймовірності. Загальне число можливих елементарних результатів випробування дорівнює числу способів, якими можна витягти $\boldsymbol{n}$ виробів з $\boldsymbol{N}$ виробів, тобто числу сполучень $\boldsymbol{C_N^n}$.

Знайдемо число результатів, що сприяють події $\boldsymbol{X = m}$ (серед узятих $\boldsymbol{n}$ виробів рівно $\boldsymbol{m}$ стандартних); $\boldsymbol{m}$ стандартних виробів можна витягти з $\boldsymbol{M}$ стандартних виробів $\boldsymbol{C_M^m}$ способами; при цьому інші $\boldsymbol{n - m}$ виробів повинні бути нестандартними; взяти ж $\boldsymbol{n - m}$ нестандартних виробів з $\boldsymbol{N - m}$ нестандартних виробів можна $\boldsymbol{C_{N-M}^{n-m}}$ способами. Отже, число результатів, що сприяють події дорівнює $\boldsymbol{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}$. Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа результатів, що сприяють події $x = m$, до числа всіх елементарних результатів:

$$P(x = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Приклади для розв'язання.

Приклад 1

Деякий ресторан славиться гарною кухнею. Керуючий ресторану затверджує, що в суботній вечір протягом півгодини підходить у середньому 5 груп відвідувачів.

а) Складіть ряд розподілу можливого числа груп відвідувачів ресторану протягом півгодини; побудуйте графік;

б) Знайдіть числові характеристики цього розподілу;

в) Запишіть у загальному виді функцію розподілу ймовірностей і побудуйте її графік;

г) Чому дорівнює ймовірність того, що три або більше групи відвідувачів прибудуть у ресторан протягом 10-хвилинного проміжку часу?

Розв'язання

а) Складемо ряд розподілу можливого числа груп відвідувачів ресторану протягом півгодини. Надаючи m значення m = 0,1,2,....,n, можна записати ряд розподілу ймовірностей, обчислених по формулі, що називається законом розподілу Пуассона.

$P(m) = \lambda^m e^{-\lambda} / m!$

$P(m = x) = \lambda^m / m! e^{-\lambda}$

$P(0) = 5^0/0!\ e^{-5} = 0{,}006$

$P(1) = 5^1/1!\ e^{-5} = 0{,}034$

$P(2) = 5^2/2!\ e^{-5} = 0{,}086$

$P(3) = 5^3/3!\ e^{-5} = 0{,}143$

$P(4) = 5^4/4!\ e^{-5} = 0{,}178$

$P(5) = 5^5/5!\ e^{-5} = 0{,}178$

$P(6) = 5^6/6!\ e^{-5} = 0{,}148$

$P(7) = 5^7/7!\ e^{-5} = 0{,}106$

$P(8) = 5^8/8!\ e^{-5} = 0{,}066$

$P(9) = 5^9/9!\ e^{-5} = 0{,}037$

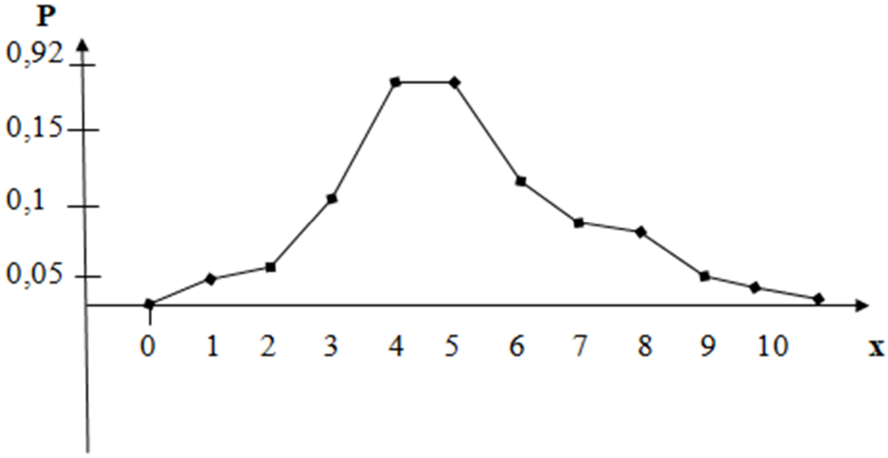
$P(10) = 5^{10} / 10!\ e^{-5} = 0{,}018$

Занесемо отримані дані в таблицю:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(x)	0,006	0,034	0,086	0,143	0,178	0,178	0,148	0,106	0,066	0,037	0,018

Перевірка: P(x) = 0,006 + 0,034 + 0,086 + 0,143 + 0,178 + 0,178 + 0,148 + 0,106 + 0,066 + 0,037 + 0,018 = 1

Багатокутник розподілу ймовірностей



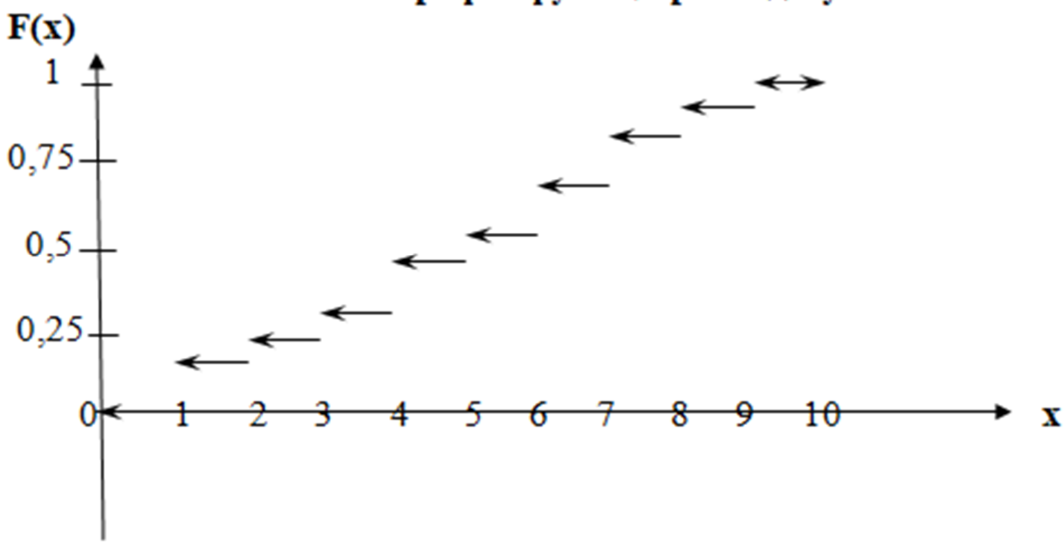
б) Знайдемо числові характеристики цього розподілу:

$x(x = m) = \lambda = 5$ $D(x) \sim \lambda = 5$ $\sigma(x) = 2{,}24$

в) Запишемо в загальному виді функцію розподілу ймовірностей:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{x \le 0} \\ 0{,}006 & 0 \le x \le 1 \\ 0{,}127 & 1 \le x \le 2 \\ 0{,}269 & 2 \le x \le 3 \\ 0{,}447 & 3 \le x \le 4 \\ 0{,}625 & 4 \le x \le 5 \\ 0{,}774 & 5 \le x \le 6 \\ 0{,}88 & 6 \le x \le 7 \\ 0{,}946 & 7 \le x \le 8 \\ 0{,}983 & 8 \le x \le 9 \\ 1 & x > 9 \end{cases}$$

Графік функції розподілу



г) Знайдемо, чому дорівнює ймовірність того, що три або більше групи відвідувачів прибудуть у ресторан протягом 10-хвилинного проміжку часу:

P(x > 3) = 1/3 · (1 - P(2) - P(1) - P(0)) = 1/3 · (1-0,086-0,034-0,006) = 0,291

Відповідь: імовірність того, що три або більше групи відвідувачів прибудуть у ресторан протягом 10-хвилинного проміжку часу дорівнює 0,291.

Приклад 2. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,2	0,15

Знайти невідомі x_4 та p_2, якщо $M(X)=18{,}77$. Обчислити $D(X)$.

Розв'язання. Для знаходження невідомої $\boldsymbol{p_2}$ використовуємо умову

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто $0{,}18 + p_2 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1$, звідки $p_2 = 0{,}25$.

Математичне сподівання обчислюємо за формулою

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Маємо

$$13 \cdot 0{,}18 + 18 \cdot 0{,}25 + 19 \cdot 0{,}22 + x_4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}15 = 18{,}77 .$$

Тоді $14{,}77 + 0{,}2 \cdot x_4 = 18{,}77$, звідки $x_4 = \dfrac{4}{0{,}2} = 20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини приймає вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Дисперсію обчислюємо за формулою

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2 =$$

$$= 13^2 \cdot 0{,}18 + 18^2 \cdot 0{,}25 + 19^2 \cdot 0{,}22 + 20^2 \cdot 0{,}2 + 25^2 \cdot 0{,}15 - (18{,}77)^2 =$$

$$= 364{,}59 - 352{,}3129 = 12{,}2771 .$$

Приклад 3. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	1	2	x_3	6	7
p_i	0,2	0,3	0,15	p_4	0,1

Знайти невідомі x_3 та p_4, якщо $D(X) = 4{,}74$.

Розв'язання. Знайдемо p_4 за умовою $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}15 + p_4 + 0{,}1 = 1$, звідки $p_4 = 0{,}25$.

Дисперсію обчислюємо за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i p_i \right)^2 .$$

Отже,

$$1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + x_3^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}25 + 7^2 \cdot 0{,}1 -$$
$$-\left(1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + x_3 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}25 + 7 \cdot 0{,}1\right)^2 = 4{,}74;$$
$$17 x_3^2 - 120 x_3 + 208 = 0;$$
$$x_3 = \frac{120 \pm 16}{34}; \quad x_3^{(1)} = \frac{120+16}{34} = \frac{136}{34} = 4; \; x_3^{(2)} = \frac{120-16}{34} = \frac{104}{34} = \frac{52}{17} = 3\frac{1}{17}.$$

З умови того, що $\boldsymbol{x_i}$ – ціла величина, маємо розв'язок $x_3 = 4$.
Закон розподілу приймає вигляд

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	4	6	7
$\boldsymbol{p_i}$	0,2	0,3	0,15	0,25	0,1

Приклад 4.

Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка приймає два можливих значення x_1 та x_2 ($x_1<x_2$). Математичне сподівання, дисперсія та ймовірність p_1 можливого значення x_1 відомі: $p_1=0.1$, $M(X)=3.9$, $D(X)=0.09$.

Розв'язання.

X	x_1	x_2
P	0.1	0.9

$P_2=1-p_1=1-0.1=0.9$
Скористаємось формулами для обчислення M(X) та D(X):
$M(X) =0.1x_1+0.9x_2=3.9$
$D(X)=0.1x_1^2+0.9x_2^2-3.9^2=0.09$
$0.1x_1+0.9x_2=3.9$
$0.1x_1^2+0.9x_2^2=15{,}3$
$x_1=(3.9-0.9x_2)/0.1$
Підставимо вираз для x_1 в вираз $0.1x_1^2+0.9x_2^2=15{,}3$ і отримаємо:
$(3.9-0.9x_2)^2/0.1+0.9x^2{}_2 =15{,}3$
$0{,}9x^2{}_2-7{,}02x_2+13{,}68=0$
$D=0.0324=0.18^2$
$X'_2 =4 \qquad X''_2 =3{,}8$
$X'_1=3 \qquad X'_1 =4{,}8$
Закон розподілу має вигляд:

X	3	4
P	0.1	0.9

Приклад 5. Баскетболіст проводить 4 кидки по корзині з однієї й тієї ж позиції. Ймовірність попадання при одному кидку дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу кількості попадань у кошик, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості попадань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина $\boldsymbol{X}$ (кількість попадань м'яча у корзину) приймає наступні ймовірні значення $x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2,\ \ x_4 = 3,\ \ x_5 = 4$.

Результати кидків не залежать один від одного, ймовірність попадання при одному кидку постійна. Це означає, що випадкова величина $\boldsymbol{X}$ розподілена за біноміальним законом. $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $n = 4,\ \ k = 0,1,2,3,4;\ \ p = 0,8;\ \ q = 1 - p = 0,2.$

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0,2)^4 = 0,0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p\, q^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0,8^4 = 0,4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$$

$$= 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.$$

Закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучань $M(X) = np = 4 \cdot 0,8 = 3,2$,

дисперсія $D(X) = npq = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64$,

середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8}$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Практичне заняття №5. Неперервні випадкові величини

Навчальна мета заняття: сформувати поняття неперервної випадкової величини, ознайомити з основними законами розподілу.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання:

Вступ

1) Визначення функції розподілу та її властивості. Визначення щільності розподілу та її властивості. Закони розподілу неперервних випадкових величин.

Висновки

Література:

Матеріали лекції 3.

[1, с. 102 - 113]

[3, с. 60 - 72]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1) Визначення функції розподілу та її властивості. Визначення щільності розподілу та її властивості. Закони розподілу неперервних випадкових величин.

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

Функцією розподілу (інтегральною функцією) називають функцію $\boldsymbol{F(x)}$, що визначає ймовірність того, що випадкова величина $\boldsymbol{X}$ у результаті випробування прийме значення, менше $\boldsymbol{x}$, тобто: $\boldsymbol{F(x) = P(X < x)}$.

Випадкову величину називають неперервною, якщо її функція розподілу є неперервна, диференційована функція з неперервною похідною.

Властивості функції розподілу.

1) $\mathbf{0 \le F(x) \le 1.}$
2) $\boldsymbol{F(x)}$ – не спадна функція, тобто $\boldsymbol{F(x_2) \ge F(x_1)}$, якщо $\boldsymbol{x_2 > x_1}$.

Імовірність того, що випадкова величина прийме значення, укладене в інтервалі $\boldsymbol{(a,b)}$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$\boldsymbol{P(a \le x < b) = F(b) - F(a)}$$

Ймовірність того, що безперервна випадкова величина $\boldsymbol{x}$ прийме одне певне значення, дорівнює нулю. Якщо можливі значення випадкової величини належать до інтервалу $\boldsymbol{(a,b)}$, то $\boldsymbol{F(x) = 0}$ при $\boldsymbol{x \le a}$; $\boldsymbol{F(x) = 1}$ при $\boldsymbol{x \ge b}$. Якщо можливі значення безперервної випадкової величини розташовані на всій осі $\boldsymbol{x}$, то справедливі наступні граничні співвідношення:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.}$$

Щільністю розподілу ймовірностей безперервної величини *x* називають функцію $\boldsymbol{f(x)}$ – першу похідну від функції розподілу $\boldsymbol{F(x)}$:

$$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}.$$

Ймовірність, того, що безперервна випадкова величина $\boldsymbol{x}$ прийме значення, що належить інтервалу $\boldsymbol{(a,b)}$, дорівнює певному інтервалу від щільності розподілу, узятому в межах від $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Знаючи щільність розподілу $\boldsymbol{f(x)}$, можна знайти функцію розподілу $\boldsymbol{F(x)}$ по формулі:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.}$$

Властивості щільності розподілу

1. Щільність розподілу – не негативна функція: $\boldsymbol{f(x) \ge 0.}$
2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці: $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$

Числові характеристики випадкової величини:

1) математичне сподівання випадкової величини $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i} \qquad \boldsymbol{m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx}$$

2) другий початковий момент $\boldsymbol{\alpha_2}$:

$$\boldsymbol{\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i} \qquad\qquad \boldsymbol{\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx}$$

3) дисперсія

$$\boldsymbol{D_x = \sum_{i=2}^{n} \dot{x}_i^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i}$$

$$\boldsymbol{D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_i^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx}$$

де $\boldsymbol{\dot{X} = x - m_x}$;

$$\boldsymbol{D_x = \alpha_2 - m_x^2}.$$

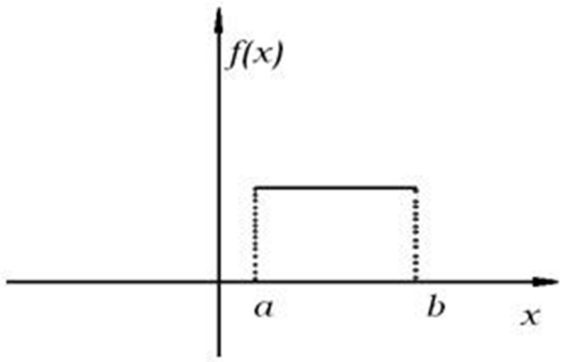
4) середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{D_x}}$.

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку $\boldsymbol{[a, b]}$, якщо її щільність розподілу є сталою величиною на цьому проміжку і дорівнює

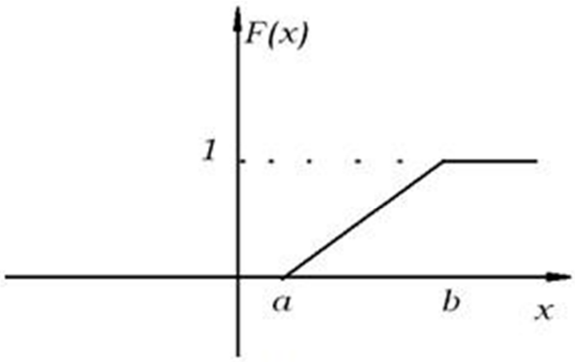
$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}}$$

Функція розподілу рівномірного закону має вигляд:

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}}$$



а)



б)

Щільність ймовірності рівномірного розподілу, зображена на (рис. а), на (рис. б) зображено функцію розподілу рівномірно розподіленої на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ випадкової величини.

Числові характеристики рівномірного розподілу

$$\boldsymbol{M(X) = \frac{a+b}{2}}; \ \boldsymbol{D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини, яка має рівномірний розподіл, в інтервал $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}}.$$

Експоненціальний (показниковий розподіл). Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має експоненціальний розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x \le 0} \\ \boldsymbol{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}, & \boldsymbol{x > 0} \end{cases}$$

де $\boldsymbol{\lambda > 0}$ – параметр закону.

Відповідно функцію розподілу записують так:

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x \le 0} \\ \boldsymbol{1 - e^{-\lambda x}}, & \boldsymbol{x > 0} \end{cases}$$

Експоненціальний закон має числові характеристики:

$$\boldsymbol{M(X) = \frac{1}{\lambda}}; \quad \boldsymbol{D(X) = \frac{1}{\lambda^2}}; \quad \boldsymbol{\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\alpha}^{\beta} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Нормальний закон розподілу (закон Гаусса).

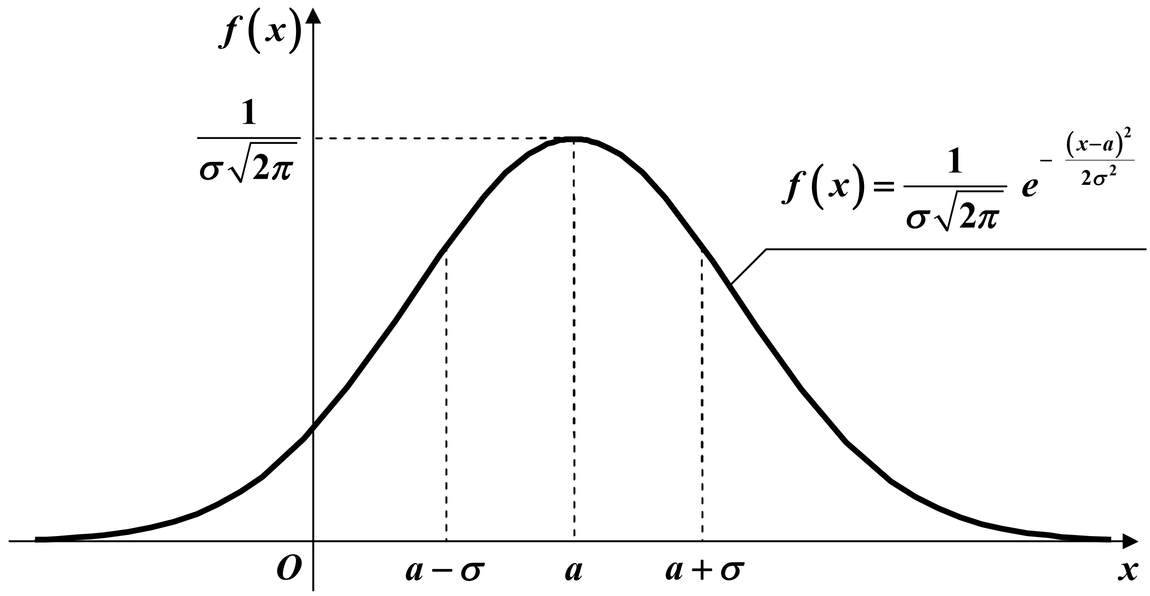
Неперервна випадкова величина X розподілена за законом Гауса, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

,

де σ і a – параметри розподілу.

Графік функції $f(x)$ називається кривою нормального розподілу (кривою Гауса):

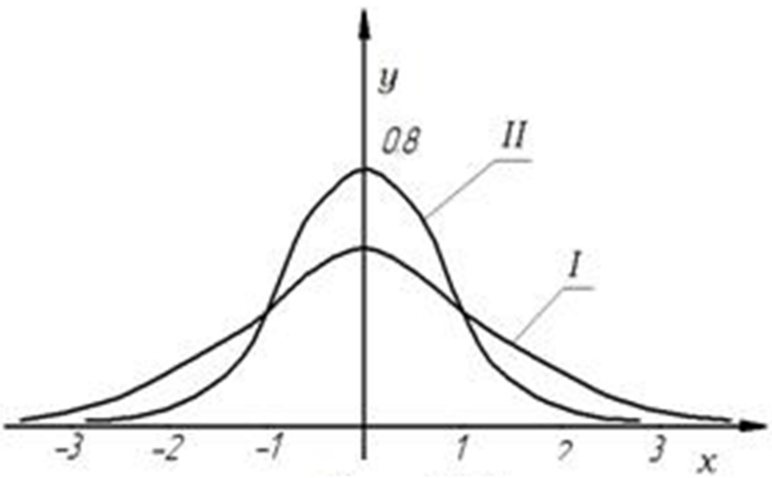


Ця крива симетрична відносно прямої $x = a$, має максимум при $x = a$; при $x \to \pm\infty$ крива необмежено наближується до осі Ox.

Якщо σ зростає, то функція $f(x)$ спадає, і крива стає більш розтягнутою вздовж Ox. Навпаки, при зменшенні σ графік щільності розподілу більше стискається до осі Oy. При $a = 0$ віссю симетрії є вісь Oy. На рис. зображено два графіка функції $y = f(x)$.

Графік (I) відповідає значенням: $a = 0, \sigma = 1$.

Графік (II) відповідає значенням: $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{\sigma = 1/2}$.



Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Ґаусса, дорівнюють:

$$\boldsymbol{M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a};$$

$$\boldsymbol{D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx \ - a^2 =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \ - a^2 = \sigma^2}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини $\boldsymbol{X}$ в інтервал $(\alpha; \beta)$

$$\boldsymbol{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)},$$

де $\boldsymbol{\Phi(X)}$ – функція Лапласа.

Якщо випадкова величина підпорядковується нормальному закону розподілу, то можна стверджувати, що з імовірністю $\boldsymbol{0,9973}$ випадкова величина знаходиться в інтервалі $[\boldsymbol{a - 3\sigma; a + 3\sigma}]$.

Дана ймовірність наближається до одиниці, тому вважають, що значення нормально розподіленої в. в. практично не виходять за границі інтервалу $[\boldsymbol{a - 3\sigma; a + 3\sigma}]$. Цей факт називають «***правилом трьох сигм***».

Приклади для розв'язання.

Приклад 1. Випадкову величину $\boldsymbol{X}$ задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, визначити математичне сподівання, дисперсію, побудувати графіки функцій $\boldsymbol{f(x)}$ і $\boldsymbol{F(x)}$.

Розв'язання

а) Знайдемо щільність ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

б) Визначимо математичне сподівання $\boldsymbol{X}$:

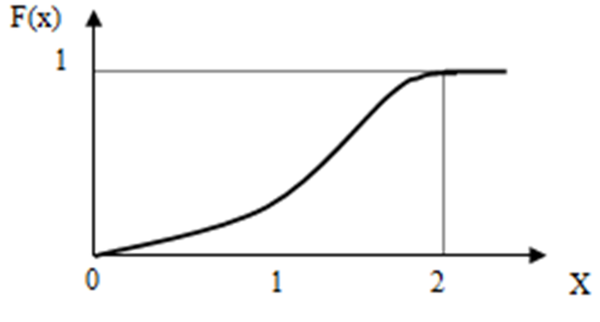
$$M[X] = \int_0^2 x \cdot x/2dx = 1/2\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4/3$$

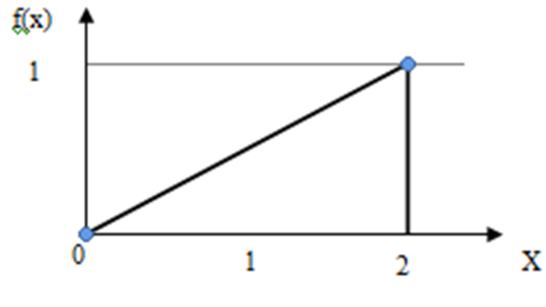
Знайдемо дисперсію *X:*

$$D[X] = \int_0^2 x^2 \cdot x/2dx - (4/3)^2 = 1/2\int_0^2 x^3 dx - (4/3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - (4/3)^2 = 2/9.$$

в) Побудуємо графіки функцій $\boldsymbol{f(x)}$ і $\boldsymbol{F(x)}$





Приклад 2. Дано функцію F (x) розподілу ймовірності випадкової величини X. Знайти M (X), σ (X) та побудувати графіки функцій F (x), f (x):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-4,\\ \dfrac{(x+4)^2}{9}, & -4\le x\le -1,\\ 1, & x>-1\end{cases}$$

Розв'язання.

Щільність розподілу ймовірності:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<-4,\\ \dfrac{2(x+4)}{9}, & -4\le x\le -1,\\ 0, & x>-1\end{cases}$$

Обчислимо математичне сподівання M(X):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{-4} x\cdot 0\cdot dx+$$

$$+\int_{-4}^{-1} x\cdot\frac{2(x+4)}{9}dx+\int_{-1}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx=$$

$$=\int_{-4}^{-1}\frac{2x^2+8x}{9}dx=\frac{2x^3}{27}\Bigg|_{-4}^{-1}+\frac{8x^2}{18}\Bigg|_{-4}^{-1}=-2.$$

Обчислимо дисперсію D(X):

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2 f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{-4}(x+2)^2\cdot 0\cdot dx+\int_{-4}^{-1}(x+2)^2\cdot\frac{2(x+4)}{9}dx+$$

$$+\int_{-1}^{+\infty}(x+2)^2\cdot 0\cdot dx=\int_{-4}^{-1}\frac{2(x+2)^2(x+4)}{9}dx=$$

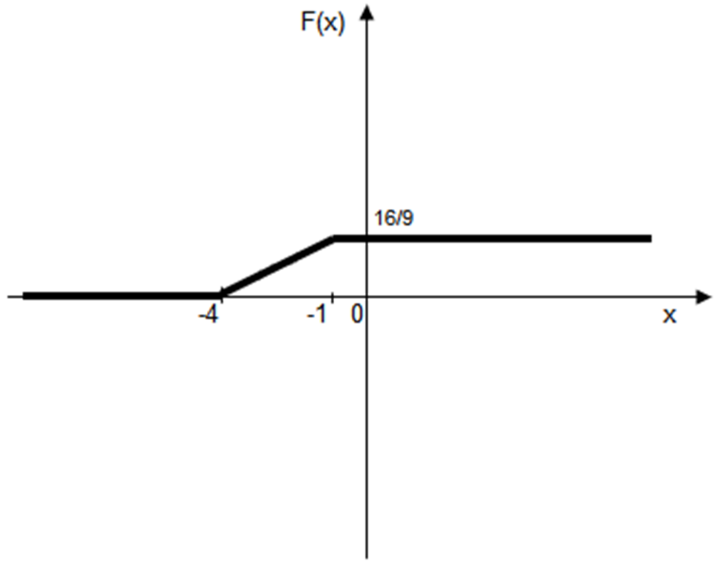
$$=\int_{-4}^{-1}\frac{2(x^3+8x^2+16x+16)}{9}dx$$

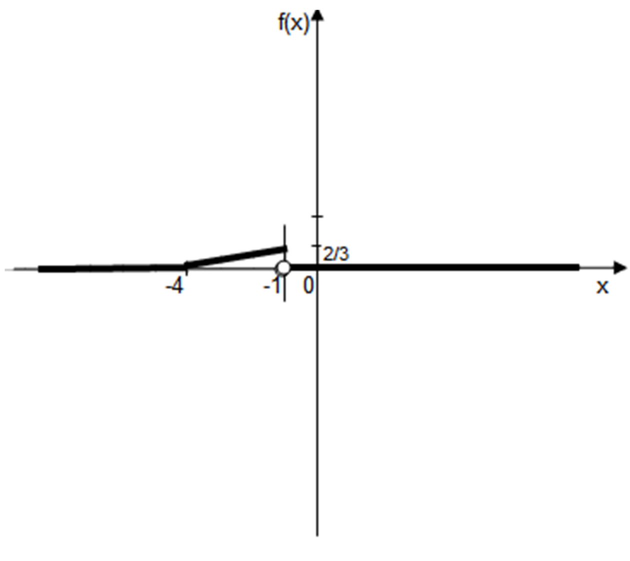
$$= \frac{2}{36}x^4\Big|_{-4}^{-1} + \frac{16}{27}x^3\Big|_{-4}^{-1} + \frac{16}{9}x^2\Big|_{-4}^{-1} + \frac{32}{9}x\Big|_{-4}^{-1} = 7{,}17,$$

тоді середньоквадратичне відхилення σ (X):

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}17} = 2{,}68.$$

Побудуємо графіки функцій F (x), f (x):





Приклад 3. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює $\mathbf{0{,}1}$ А. Показання амперметра округлюють до найближчого цілого поділу. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, що перевищує $\mathbf{0{,}02}$ А.

Розв'язання. Помилку округлення відліку можна розглядати як випадкову величину $\boldsymbol{X}$, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділами. Щільність рівномірного розподілу $\boldsymbol{f}\,\{\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}/\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, де$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$-довжина інтервалу, в якому укладені можливі значення $\boldsymbol{X}$; поза цим інтервалу $\boldsymbol{f}$ (x) $= \mathbf{0}$. У розглянутій задачі довжина інтервалу, в якому укладені можливі значення X, дорівнює $\mathbf{0{,}1}$, тому $\boldsymbol{f}$ (x) $= \mathbf{1/0{,}1} = \mathbf{10}$.

Легко збагнути, що помилка відліку перевищить $\mathbf{0,02}$, якщо вона буде укладена в інтервалі $(\mathbf{0,02, 0,08})$.

$$P(0{,}02 < X < 0{,}08) = \int_{0{,}05}^{0{,}08} 10\,dx = 0{,}6$$

Приклад 4. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\boldsymbol{X}$, розподіленої рівномірно у інтервалі $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, де $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$.

Розв'язання: Згідно

$$\mathbf{M(X)} = \frac{a+b}{2}; \ \mathbf{D(X)} = \frac{(b-a)^2}{12}; \ \sigma = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

$\mathrm{M(X)} = \dfrac{1}{2}$;

$\mathrm{D(X)} = \dfrac{1}{12}$;

$\sigma = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Приклад 5. Знайти ймовірність того, що випадкова величина $\boldsymbol{X}$ потрапить в інтервал *(α, β)* якщо вона рівномірно розподілена в інтервалі $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, де
a = 6;* b *=12 ; α=5 , β=8.

Розв'язання: $\mathbf{P}\ (\alpha \le \mathbf{X} \le \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ де $(\alpha,\beta) \in (a,b)$

Інтервал [5;8] не належить до інтервалу [6;12] і тому ймовірність попадання значення $\boldsymbol{X}$ за інтервал [6;12] дорівнює 0, тому будемо знаходити ймовірність попадання в інтервал [6;8]

$\mathrm{P}\ (6 \le \mathrm{X} \le 8) = \dfrac{8-6}{12-6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Звідси $\mathrm{P}\ (5 \le \mathrm{X} \le 8) = \mathrm{P}\ (6 \le \mathrm{X} \le 8) = \dfrac{1}{3}$.

Приклад 6. Випадкова величина X розподілена по показовому закону,

щільність розподілу якої $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Знайти ймовірність того, що випадкова величина X потрапить у заданий інтервал *(α,β)* якщо $\lambda = 3$; $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 1$.

Розв'язання<u>**:**</u> $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$;

$$P(0{,}7 < X < 1) = e^{-3\cdot 0{,}7} - e^{-3\cdot 1} = e^{-2{,}1} - e^{-3} = \frac{1}{e^{2{,}1}} - \frac{1}{e^{3}} =$$

$$0{,}122 - 0{,}0498 = 0{,}0722.$$

Приклад 7. Кількість викликів, що надходять на телефонну станцію протягом $\boldsymbol{T}$ хвилин є випадковою величиною, що розподілена за законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{\lambda = aT}$, де $\boldsymbol{a}$ = **2** (середня кількість викликів протягом однієї хвилини). Знайти ймовірність того, що на станцію протягом півхвилини поступлять 2 виклики.

Розв'язання. За законом Пуассона

$$P_T(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Вважаючи $\boldsymbol{T = 0{,}5}$, $\boldsymbol{\kappa = 2}$, одержимо

$$\lambda = 2 \cdot 0{,}5 = 1,$$

$$P_{0{,}5}(2) = \frac{e^{-1}}{2!} = \frac{0{,}3679}{2} = 0{,}1839.$$

Приклад 9. Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше, ніж 3 хвилини.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час сподівання можна вважати випадковою величиною $\boldsymbol{X}$, що рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення $\boldsymbol{X}$. У цій задачі $b - a = 5$, тому $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше ніж 3 хвилини, якщо $2 < x < 5$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Отже, $P(2 < X < 5) = \int\limits_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{x}{5}\Big|_2^5 = \frac{3}{5}$.

Приклад 10. Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає 200 годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом 10 годин польоту.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною $\boldsymbol{T}$, розподіленою за показовим законом

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$$

де $\lambda -$ інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу).

У даному випадку $t = 10, \quad \lambda = \frac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t

$$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{10}{200}} = 0{,}049.$$

*Приклад 11.*Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу F(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3\pi/4 \\ cos\, 2 * x, & 3\pi/4 < x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Необхідно:

1. знайти диференціальну функцію розподілу f(x);
2. знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X;
3. побудувати графіки функцій F(x) та f(x).

1. *Розв'язання.*

2. $$f(x) = F^{/}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3\pi/4 \\ -2\,sin\, 2 * x, & 3\pi/4 < x \le \pi. \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

3. Скористаємось формулами:

$$M(x)=\int_a^b xf(x)dx$$

$$D(x)=\int_a^b xf(x)dx-\left[M(x)\right]^2$$

$$M(x)=\int_{3\pi/4}^{\pi}-2x\sin 2xdx=$$

$$=x\cos 2x\Big|_{3\pi/4}^{\pi}+\int_{3\pi/4}^{\pi}\cos 2xdx=$$

$$=\pi-1/2\sin 2x\Big|_{3\pi/4}^{\pi}=\pi-1/2=2{,}64$$

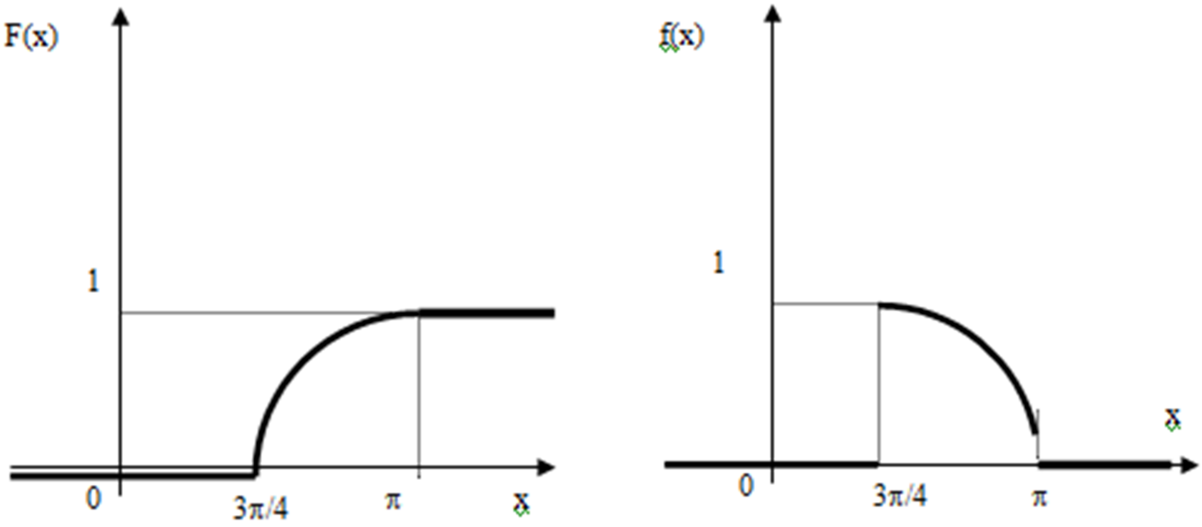
$$D(x)=\int_{3\pi/4}^{\pi}-2x^2\sin 2xdx-[2{,}64]^2=$$

$$=x^2\cos 2x\Big|_{3\pi/4}^{\pi}-2\int_{3\pi/4}^{\pi}x\cos 2xdx-[2{,}64]^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{1}-(x\sin 2x\Big|_{3\pi/2}^{\pi}-\int_{3\pi/2}^{\pi}\sin 2xdx)-6{,}97=$$

$$=7.013-6.97=0.043$$

4. Побудуємо графіки функцій F(x) та f(x).



III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Тема № 4. Закон великих чисел

Практичне заняття №6. Закон великих чисел

Навчальна мета заняття: сформувати уявлення про закон великих чисел та навики розв'язування задач на визначення відносної частоти випадкової події.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання:

Вступ
1. Нерівність Чебишова
2. Теорема Бернуллі. Центральна гранична теорема Ляпунова.

Висновки

Література:

Матеріали лекції 4.

[1, с. 113 - 120]

[3, с. 102 - 111]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Нерівність Чебишова

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

Граничні теореми, які встановлюють відповідність між теоретичними і дослідними характеристиками дослідних поді, об'єднують загальною назвою – закони великих чисел.

***Перша форма* нерівності Чебишова.**

Для довільної випадкової величини $\boldsymbol{X}$, яка набуває невід'ємні значення та має скінченне математичне сподівання виконується нерівність:

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) \leq M(X)}$$

Якщо $\boldsymbol{X}$ набуває лише невід'ємні значення, $\boldsymbol{M(X) < \infty, \alpha > 0}$, то

$$\boldsymbol{P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}}$$

***Друга форма* нерівності Чебишова.**

Якщо випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має скінченне математичне сподівання та дисперсію, то для довільного $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ справджується нерівність

$$\boldsymbol{(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$$

Приклади для розв'язання

Приклад 1. Виміряється швидкість вітру в даному пункті Землі. Випадкова величина X – проекції вектора швидкості вітру на фіксований напрямок. Оцінити ймовірність події $A = \{X \geq 80\,\text{км/ч}\}$, якщо шляхом багаторічних вимірів установлено, що $m_x = 16\,\text{км/ч}$.

Розв'язання

За ε візьмемо 80 км/год і, застосувавши першу нерівність Чебишова, одержимо $P(A) \leq \frac{m_x}{\varepsilon}$ => $P(X \geq 80\,\text{км/ч}) \leq \frac{16}{80} = 0{,}2$.

Приклад 2. Дисперсія випадкової величини Х дорівнює 0,001. Яка ймовірність того, що випадкова величина Х відрізняється від її математичного М(Х) більше ніж на 0,1?

Розв'язання

$$\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{M}(X)\right|>0{,}1\right)\leq\frac{\mathbf{D}(X)}{0{,}1^2}=\frac{0{,}001}{0{,}01}=0{,}1.$$

Приклад 3. У великій популяції тварин 40% мають мутацію. Скільки треба взяти тварин, щоб з імовірністю, не меншою 0,95, частина мутантів становила від 38% до 42% відібраних тварин?

Розв'язання Якщо відібрано *n* тварин, то можна вважати, що маємо *n* випробувань Бернуллі, де p = 0,4. Нехай X - кількість відібраних тварин, що мають мутацію. Тоді M(X) = np = 0,4n; D(X) = npq = 0,24n. Отже, треба знайти таке n, щоб виконувалася нерівність:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{n}-0{,}4\right|>0{,}02\right)\leq 0{,}05.$$

Цю нерівність можна записати ще так:

$$\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{M}(X)\right|>0{,}02n\right)\leq 0{,}05.$$

За нерівністю Чебишова

$$\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{M}(X)\right|>0{,}02n\right)\leq\frac{\mathbf{D}(X)}{(0{,}02n)^2}=\frac{0{,}24}{0{,}0004n^2}=\frac{600}{n}.$$

Таким чином, n слід вибрати так, щоб

$$\frac{600}{n}\leq 0{,}05.$$

Звідси n ≥12000, тобто стільки тварин необхідно відібрати, щоб гарантувати потрібний результат.

Приклад 4. Скільки доданків треба взяти в теоремі Чебишова, щоб з надійністю 96% і точністю до 0,01 виконувалася наближена рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}X_i.$$

Розв'язання. У цьому прикладі ε- = 0,01. Щоб мати надійність 96%, достатньо підібрати таке n, при якому виконувалася б нерівність:

$$\frac{c}{\varepsilon^2 n}\leq 0{,}04\Rightarrow n\geq\frac{c}{0{,}04\cdot 0{,}0001}=250000c.$$

Зауваження. Приклад показує, що навіть у випадку не дуже великих точності та надійності, треба брати значну кількість доданків (n — досить велике число). Це означає, що оцінки, отримані на основі нерівності Чебишова є завищеними. Більш точні оцінки можна дістати за допомогою теореми Ляпунова.

2. Теорема Бернуллі. Центральна гранична теорема Ляпунова.

Теорема Бернуллі. Нехай імовірність появи події А в кожному з n незалежних повторних випробувань дорівнює p, а m – число появ події А в n випробуваннях. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,\ \varepsilon>0.$$

Теорема Чебишова, або *закон великих чисел.* Нехай $X_1,...,X_n$ — послідовність незалежних випадкових величин, які задовольняють умовам

1) $\mathbf{M}(X_i)=a_i,\ i=1,...,n;$

2) $\mathbf{D}(X_i)\le c,\ i=1,...,n.$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right|<\varepsilon\right)=1,\ \varepsilon>0.$$

Центральна гранична теорема

Загальні поняття

Граничні теореми, що встановлюють граничні закони розподілу випадкових величин, об'єднують загальною назвою - *центральна гранична теорема.*

Застосування граничних теорем необхідне при розв'язанні, наприклад, наступних задач.

І Якщо сума багатьох випадкових величин мало відрізняється від постійної величини, тобто майже перестає бути випадковою величиною, то її поведінка може прогнозуватися з високою ймовірністю?

2 При яких умовах можна з високою ймовірністю прогнозувати число появ деякої випадкової події при великій кількості незалежних випробувань?

3. При яких обмеженнях сума багатьох випадкових величин буде розподілена за нормальним законом?

Центральна гранична теорема. Нехай задано послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин$X_1,...,X_n$ таких, що

$$\mathbf{M}(X_i)=0,\ \mathbf{D}(X_i)=b\ \ \forall i: i=1,...,n.$$

Розглянемо випадкову величину

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Маємо:

$$\mathbf{M}(Y_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}X_i\right)=0;\ \mathbf{D}(Y_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_i\right)=nb.$$

При $n\to\infty$ функція розподілу

$$F_{Y_n}(x)=P\{Y_n<x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi nb}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2nb}}dz.$$

Зауваження. При n ≥30 розподіл суми однаково розподілених випадкових величин мало відрізняється від нормального розподілу. Тому на практиці такі суми можна заміняти нормальною випадковою величиною. Такими сумами є шум в радіоприладах, помилки спостережень, помилки вимірювань у приладах, швидкості руху молекул газу і т.д.

Теорема ***(Ляпунова)***. Нехай задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ таких, що $M(X_i) = 0$, $D(x_i)= b_i^2$ $\forall\ i = 1,\ldots,n,\ldots$

Побудуємо суму випадкових величин $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Позначимо $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

Якщо виконується умова рівномірної securемализни величин, що утворюють суму $\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)^3 \to 0,\ n\to\infty,$

то при $n\to\infty$ функція розподілу

$$F_{Y_n}(x) = P\{Y_n < x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}B_n}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2B_n^2}}dz.$$

Приклади для розв'язання

Приклад 5.

На заводі виробляють кульки для підшипників. За зміну виробляють n=10000 кульок. Імовірність того, що кулька матиме дефект, дорівнює 0,05. Причини дефектів для кульок незалежні. Продукція проходить контроль якості, причому дефектні кульки зсипають у спеціальний бак. Визначити, на яку кількість кульок має бути розрахований бак, щоб з імовірністю 0,99 він не заповнився до кінця зміни.

Розв'язання. Число бракованих кульок X має біноміальний розподіл. Оскільки n велике, то за центральною граничною теоремою можна вважати розподіл майже нормальним з характеристиками:

$$\mathbf{M}(X) = np = 10000\cdot 0{,}05 = 500;$$

$$\mathbf{D}(X) = npq = 500\cdot 0{,}95 = 475;$$

$$\sigma(X) \approx 21{,}8.$$

Знайдемо таке значення a, для якого $P(X < a) = 0{,}99$, або

$$\Phi^*\left(\frac{a - M(X)}{\sigma(X)}\right) = \Phi^*\left(\frac{a-500}{21{,}8}\right) = 0{,}99.$$

За таблицями функції $\Phi^*(x)$ знаходимо:

$$\frac{a-500}{21{,}8} \approx 2{,}33,$$

звідки $a \approx 551$.

Отже, бак розрахований приблизно на 551 кульку.

*Приклад 6***.** Організовано лотерею. Учасник повинен позначити 5 різних номерів у таблиці з номерами від 1 до 90 і надіслати заповнений білет організаторам. Розіграш лотереї полягає в тому, що випадковим чином розігрують *5* різних номерів з 90. Якщо в учасника співпало: менше двох номерів - виграшу немає; два номери — 1 гривня; три — 100 грн; чотири — 10000 грн, п'ять — 1000000 грн.

а) Визначити нижню межу ціни на білет, при якій організатори в середньому не матимуть збитків;

б) визначити середній дохід М, який матимуть організатори за умови, що буде 1000000 учасників, які вибиратимуть номери незалежно один від одного, а ціна білета 0,3 грн;

с) користуючись правилом трьох сигм, знайти межі практично можливих виплат по лотереї; чи можна вважати сумарну виплату по лотереї розподіленою за нормальним законом?

Розв'язання.

а) Нехай p_i - ймовірність того, що збігається i номерів. Тоді:

$$p_2 = \frac{C_5^2 C_{85}^3}{C_{90}^5} \approx 2,25 \cdot 10^{-2};\; p_3 = \frac{C_5^3 C_{85}^2}{C_{90}^5} \approx 8,12 \cdot 10^{-4};$$

$$p_4 = \frac{C_5^4 C_{85}^1}{C_{90}^5} \approx 9,67 \cdot 10^{-6};\; p_5 = \frac{1}{C_{90}^5} \approx 2,28 \cdot 10^{-8}.$$

Мінімальна ціна білета повинна дорівнювати математичному сподіванню виграша учасника, який купив цей білет *(* X_i - виграш i - го учасника). Тому

$$\mathbf{M}(X_i) = 2,25 \cdot 10^{-2} \cdot 1 + 8,12 \cdot 10^{-4} \cdot 100 +$$
$$+9,67 \cdot 10^{-6} \cdot 10000 + 2,28 \cdot 10^{-8} \cdot 1000000 = 0,223.$$

Отже, мінімальна ціна білета наближено дорівнює 0,23 грн.

б) М = (0,3 -0,223) -1000000 = 77000 грн.

с) Загальна сума виграшів X, яку треба сплатити за результатами розіграша, складається з виграшів окремих гравців X_i:

$$X = \sum_{i=1}^{1000000} X_i$$

Величини X_i – незалежні (вважається, що гравці обирають номери незалежно один від одного). Сума великої кількості незалежних, однаково розподілених величин розподілена майже за нормальним законом (центральна гранична теорема). З'ясуємо, чи достатньо 1000000 учасників, щоб величину X можна було вважати розподіленою нормально? Маємо:

$$M(X_i) = 0,223 \text{ для } i = 1, \dots, 1000000;$$

$$D(X_i) = M((X_i)^2) - (M(X_i\,))^2 = 2,25 \cdot 10^{-2} \cdot 1^2 + 8,12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 +$$
$$+9,67 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 + 2,28 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{12} - (0,223)^2 \approx 2,38 \cdot 10^4$$

для $i = 1, \dots, 1000000$.

Таким чином,

$$M(X) = 10^6 \cdot M(X_i\,) = 0,223 \cdot 10^6\;;$$

$$D(X) = 10^6 \cdot D(X_i) = 2{,}38 \cdot 10^{10};$$
$$\sigma(X) \approx 1{,}54 \cdot 10^5$$

Звідси $\mathbf{M}(X) - 3\sigma(X) = -2{,}39 \cdot 10^5$.

Для випадкової величини X 5 якщо вона розподілена за нормальним законом, межі практично можливих значень - M(X) ± 3σ(X) (за правилом трьох сигм). У даному випадку значення лівої межі від'ємне, тому випадкову величину X не можна вважати розподіленою нормально.

Приклад 7. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність появи події A, яка полягає у тому, що випадкова величина X набуде значення, яке відрізнятиметься від математичного сподівання M (X) на величину, що не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення. Чи зміниться відповідь, якщо відомо, що випадкова величина X має нормальний розподіл?

Розв'язання.

За нерівністю Чебишова

$$P(A) = P(|X - M(X)| < 3\sigma(X)) \geq 1 - \frac{D(X)}{\left(3\sigma(X)\right)^2} = 1 - \frac{D(X)}{9D(X)} = \frac{8}{9}$$

Отже

$$P(A) \geq \frac{8}{9} \approx 0{,}89$$

Якщо X має нормальний розподіл, то

$$P(A) = P(|X - M(X)| < 3\sigma(X)) \approx 2\Phi\left(\frac{3\sigma(X)}{\sigma(X)}\right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973\,.$$

Приклад 8. Імовірність настання події A в кожному випробуванні 0,3. Використовуючи нерівність Чебышева, оцінити ймовірність того, що в 10000 випробуваннях відхилення відносної частоти появи події A від його ймовірності не перевершить по абсолютній величині 0,01.

Розв'язання.

Відповідно до нерівності Чебышева ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання буде менше деякого числа ε, обмежена відповідно до нерівності $P(|X - m_X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_X}{\varepsilon^2}$.

Треба визначити математичне сподівання й дисперсію числа появи події A при одному досвіді. Для події A випадкова величина може ухвалювати одне із двох значень: 1- подія з'явилася, 0- подія не з'явилася. При цьому ймовірність значення 1 дорівнює ймовірності p=0,3, а ймовірність значення 0- дорівнює ймовірності ненастання події A

$$q = 1 - p = 0{,}7.$$

По визначенню математичного сподівання маємо:

$$m_x = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = 0{,}3$$

Дисперсія: $D_x = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = pq = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$

У випадку n незалежних випробувань одержуємо $m_x = np; \quad D_x = npq;$

У нашому випадку одержуємо: $m_x = 3000; \quad D_x = 2100;$

Імовірність відхилення відносної частоти появи події А в n випробуваннях від імовірності на величину, що не перевищує ε=0,01 рівна:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P(|m - np| < n\varepsilon) = P(|m - m_x| < n\varepsilon) = P(|m - 3000| < 100)$$

Вираз отриманий в результаті цих простих перетворень являє собою ймовірність відхилення числа m появи події А від математичного сподівання на величину не більшу, ніж δ=100.

Відповідно до нерівності Чебышева ця ймовірність буде не менше, чим величина $1 - \dfrac{D_x}{\delta^2} = 1 - \dfrac{2100}{10000} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$

Приклад 9. Скільки слід перевірити деталей, щоб з ймовірністю, не меншої 0,96, можна було очікувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти придатних деталей від ймовірності деталі бути придатною, яка дорівнює 0,98, не перевищить 0,02.

Розв'язання.

Умова задачі фактично означає, що виконується нерівність:

$$P\left(\left|\frac{n}{m} - 0{,}98\right| \le 0{,}02\right) \ge 0{,}96$$

Тут n – число придатних деталей, m – число перевірених деталей. Для застосування нерівності Чебышева перетворимо отриманий вираз:

$$P(|n - 0{,}98m| \le 0{,}02m) \ge 1 - \frac{D_x}{(0{,}02m)^2} \ge 0{,}96$$

Домножимо вираз в дужках на m, одержуємо ймовірність відхилення по модулю кількості придатних деталей від свого математичного сподівання, отже, можна застосувати нерівність Чебышева, тобто ця ймовірність повинна бути не менше, чим величина $1 - \dfrac{D_x}{(0{,}02m)^2}$, а за умовою задачі ще й не менше, чим 0,96.

Таким чином, одержуємо нерівність $0{,}96 \le 1 - \dfrac{D_x}{(0{,}02m)^2}$. $D_x = mpq$.

$$D_x \le (0{,}02m)^2 - 0{,}96 \cdot (0{,}02m)^2; \quad m \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 \le 0{,}04 \cdot (0{,}02m)^2;$$

$$m \geq \frac{0{,}98 \cdot 0{,}02}{0{,}04 \cdot 0{,}0004}; \qquad m \geq 1225$$

Для виконання необхідних умов необхідно не менш 1225 деталей.

Приклад 10. Добова потреба електроенергії в населеному пункті є випадковою величиною, математичне сподівання якої 3000 кВт/година, а дисперсія становить 2500. Оцінити ймовірність того, що в найближчу добу витрата електроенергії в цьому населеному пункті буде від 2500 до 3500 кВт/година.

Розв'язання.

Потрібно знайти ймовірність влучення випадкової величини в заданий інтервал:

$$P(2500 \leq X \leq 3500) = ?$$

Крайні значення інтервалу відхиляються від математичного сподівання на ту саму величину, а саме – на 500. Тоді можна записати з урахуванням нерівності Чебышева:

$$P(2500 \leq X \leq 3500) = P(\left| X - m_x \right| \leq 500) \geq 1 - \frac{D_x}{500^2}$$

Звідси одержуємо:

$$P \geq 1 - \frac{2500}{250000} = 0{,}99$$

Шукана ймовірність буде не менше, чим 0,99.

Приклад 11. Середнє квадратичне відхилення кожної з 2500 незалежних випадкових величин не перевершує 3. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їхніх математичних сподівань не перевершує 0,3.

Розв'язання

Потрібно знайти ймовірність

$$p = P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n} \right| \leq 0{,}3 \right)$$

Нерівність Чебышева у випадку суми випадкових величин має вигляд:

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M_{xi}}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2\varepsilon^2}$$

Якщо середнє квадратичне відхилення не перевершує 3, те, мабуть, дисперсія не перевершує 9. Величина (за умовою задачі рівна 0,3.

Тоді $p \ge 1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2\varepsilon^2}=1-\frac{9n}{n^2\cdot 0{,}09}$. Звідси одержуємо при n=2500:

$$p \ge 1-0{,}04=0{,}96$$

Приклад 12. Вибірковим шляхом потрібно визначити середню довжину деталей, що виготовляються. Скільки потрібно досліджувати деталей, щоб з ймовірністю, більшою чим 0,9, можна було стверджувати, що середня довжина відібраних виробів буде відрізнятися від математичного сподівання цього середнього (середня довжина деталей усієї партії) не більш, ніж на 0,001 див.? Установлено, що середнє квадратичне відхилення довжини деталі не перевищує 0,04 см.

Розв'язання.

За умовою якщо середнє квадратичне відхилення не перевищує 0,04, то дисперсія, мабуть, не перевищує $(0{,}04)^2$. Також за умовою задане, що

$$p=P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}-m_x\right| \le 0{,}001\right) > 0{,}9$$

Якщо перетворити співвідношення в дужках і після цього застосувати нерівність Чебышева, одержуємо:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_x\right| \le 0{,}001n\right) \ge 1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2\cdot 0{,}001^2} > 0{,}9$$

$$1-\frac{n\cdot 0{,}04^2}{n^2\cdot 0{,}001^2} > 0{,}9$$

$$0{,}1\cdot 0{,}001^2 n > 0{,}04^2$$

$$n > \frac{0{,}04^2}{0{,}1 \cdot 0{,}001^2}$$

$$n > 16000$$

Для досягнення необхідної ймовірності необхідно відібрати більш 16000 деталей.

Тема № 5. Варіаційні ряди та їх характеристики

Практичне заняття №7

Навчальна мета заняття: ознайомитися з поняттям варіаційного ряду, опанувати методику обчислення числових характеристик ряду.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання:

Вступ

1. Графічне зображення варіаційних рядів
2. Числові характеристики варіаційних рядів

Висновки

Література:

Матеріали лекції 5.

[1, с. 165 - 200]

[3, с. 115 - 146]

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Графічне зображення варіаційних рядів

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

Варіаційним рядом називається ранжируваний у порядку зростання або убування ряд варіант із відповідними їм вагами.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот, або послідовності інтервалів і відповідних їм частот (як частота, що відповідає інтервалу, приймають суму частот, що потрапили в цей інтервал.

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки *)* F*(x) називається відносна частота того, що ознака (випадкова величина ξ) прийме значення, менша заданого x $F^*(x)=\dfrac{m_x}{n}=\sum\limits_{x_i<x}\dfrac{m_i}{n}$.

Полігоном частот_називають ламану, відрізки якої з'єднують крапки (x_1,m_1), (x_2,m_2),…, (x_k,m_k). Полігон частот, як правило, служить для зображення дискретного варіаційного ряду. Для побудови полігона на осі абсцис відкладають варіанти x_i , а на осі ординат – відповідні їм частоти m_i . Крапки (x_i,m_i) з'єднують відрізками прямих і одержують полігон частот. Гістограма служить тільки для зображення інтервальних варіаційних рядів.

Гістограмою частот_називають східчасту фігуру, що складається із прямокутників, підставами яких служать часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\dfrac{m_i}{h}$ (щільність частоти).

Приклади для розв'язання

Приклад 1.

1. Записати вибірку у вигляді:

- варіаційного ряду; статистичного ряду частот; статистичного ряду відносних частот.

2. Побудувати полігон, гістограму та кумуляту для вибірки, поданої у вигляді таблиці частот.

Вибірка:

2 4 2 4 3 3 3 2 0 6 1 2 3 2 2 4 3 3 5 1 0 2 4 3 2 2 3 3 1 3 3 3
1 1 2 3 1 4 3 1 7 4 3 4 2 3 2 3 3 1 4 3 1 4 5 3 4 2 4 5 3 6 4 1
3 2 4 1 3 3 1 0 0 4 6 4 7 4 1 3

Розв'язання.

1. Запишемо вибірку у вигляді:

- варіаційного ряду:

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4
4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7

- статистичного ряду частот:

варіанта	0	1	2	3	4	5	6	7
частота	4	13	14	25	16	3	3	2

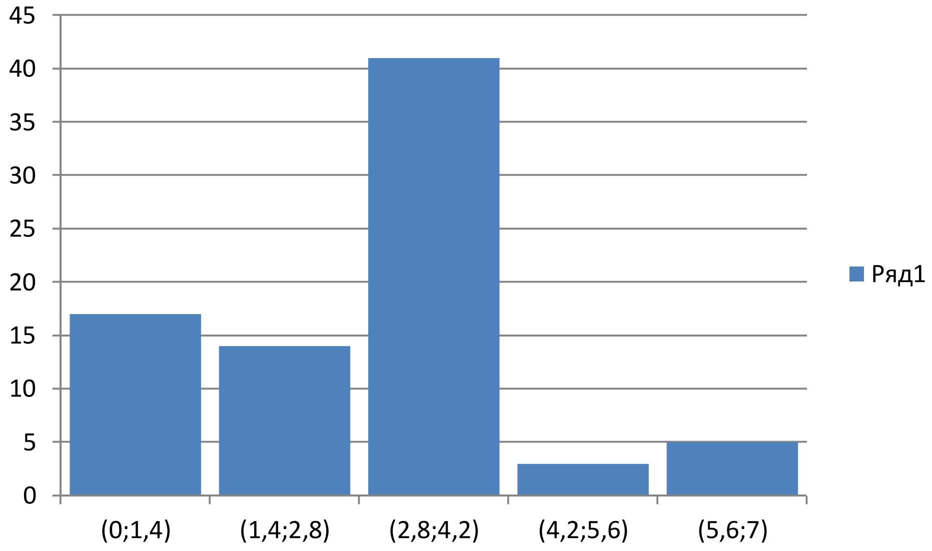
- статистичного ряду відносних частот:

варіанта	0	1	2	3	4	5	6	7
відносна частота	0,05	0,1625	0,175	0,3125	0,2	0,0375	0,0375	0,025

1. Побудуємо полігон для вибірки, поданої у вигляді таблиці частот

Для побудови гістограми побудуємо інтервальний статистичний розподіл. Виберемо S=5 інтервалів. Розмах вибірки 7-0=7, тому довжина інтервалу $\frac{7}{5}$ =1,4.

Номер інтервалу	Межі інтервалів	Частота	Частота, поділена на довжину інтервалу
1	(0;1,4)	17	12,14
2	(1,4;2,8)	14	10
3	(2,8;4,2)	41	29,29
4	(4,2;5,6)	3	2,14
5	(5,6;7)	5	3,57

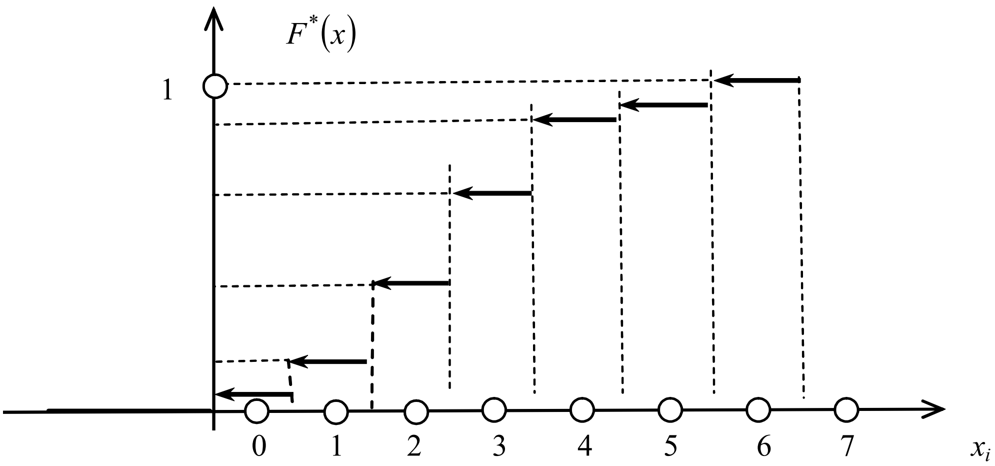


Гістограма частот

Згідно з означенням та властивостями кумулята для вибірки, поданої у вигляді таблиці частот $F^*(x)$ має такий вигляд :

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 0{,}05 & 0 < x \le 1, \\ 0{,}2125 & 1 < x \le 2, \\ 0{,}3875 & 2 < x \le 3, \\ 0{,}7 & 3 < x \le 4, \\ 0{,}9 & 4 < x \le 5, \\ 0{,}9375 & 5 < x \le 6, \\ 0{,}975 & 6 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Графічне зображення $F^*(x)$ подано на рис.



Кумулята для вибірки

2. Числові характеристики варіаційних рядів

Середньою арифметичною варіаційного ряду називається сума добутків всіх варіант на відповідні частоти, ділена на суму частот:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i m_i}{n},$$

де x_i - варіанти дискретного ряду або середини інтервалів інтервального варіаційного ряду, m_i – відповідні їм частоти, $n = \sum_{i=1}^{m} m_i$.

Варіаційний розмах R дорівнює різниці між найбільшим і найменшим варіантами ряду : $R=x_{max}-x_{min}$

Середнім лінійним відхиленням варіаційного ряду називається середнє арифметичне абсолютних величин відхилень варіант від них середньої арифметичної: $d = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left| x_i - \overline{x} \right| m_i}{n}$.

Дисперсією $\widetilde{D}$ **варіаційного ряду** називається середнє арифметичне квадратів відхилень варіант від них середньої арифметичної:

$$\widetilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 m_i}{n}.$$

Дисперсію розподілу ознаки в генеральній сукупності називають відповідно **генеральною дисперсією**: $\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 M_i}{N}$,

де M_i – число елементів генеральної сукупності зі значенням ознаки x_i, N – об'єм генеральної сукупності. Бажано як міра варіації мати характеристику, виражену в тих же одиницях, що й значення ознаки. Такою характеристикою є **середнє квадратичне відхилення σ___**- арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії: $\sigma = \sqrt{\widetilde{D}}$.

<u>Коефіцієнт варіації</u>, дорівнює процентному відношенню середнього квадратического відхилення до середній арифметичного: $\widetilde{v} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\%$ $(\overline{x} \neq 0)$.

Мода **(Mo*).** ***Модою дискретного статистичного розподілу вибірки*** називають варіанту, що має найбільшу частоту появи. Мод може бути декілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається ***одномодальним***, коли має дві моди – ***двомодальним*** і т. д.;

Медіана **(Me*).** ***Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки*** називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

Приклади для розв'язання.

Приклад 2. Обчислити числові характеристики варіаційного ряду розподілу: середнє арифметичне значення; моду; медіану; дисперсію; середнє квадратичне відхилення; коефіцієнт варіації.

Вибірка:

2 4 2 4 3 3 3 2 0 6 1 2 3 2 2 4 3 3 5 1 0 2 4 3 2 2 3 3 1 3 3 3
1 1 2 3 1 4 3 1 7 4 3 4 2 3 2 3 3 1 4 3 1 4 5 3 4 2 4 5 3 6 4 1
3 2 4 1 3 3 1 0 0 4 6 4 7 4 1 3

Розв'язання.

- середнє арифметичне значення:

$\bar{x}_{\text{В}} = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, де x_i — варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i — частота цієї варіанти; n — обсяг вибірки ($n = \sum n_i$).

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{0\cdot 4 + 1\cdot 13 + 2\cdot 14 + 3\cdot 25 + 4\cdot 16 + 5\cdot 3 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2}{80} = 2{,}8375;$$

- модою є варіанта 3;

- Me = $\dfrac{8+1}{2}$ = 4,5, тобто медіана розташована між четвертим і п'ятим порядковим номером варіант.

- дисперсія $D_{\text{В}} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_{\text{В}})^2$;

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{0^2\cdot 4 + 1^2\cdot 13 + 2^2\cdot 14 + 3^2\cdot 25 + 4^2\cdot 16 + 5^2\cdot 3 + 6^2\cdot 3 + 7^2\cdot 2}{80} = 10{,}3875.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_{\text{В}})^2 = 10.3875 - (2.8375)^2 = 2.336.$$

$$D_{\text{В}} = 2{,}336.$$

- середнє квадратичне відхилення: $\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}}$ $\sigma_{\text{В}} = \sqrt{2.336} \approx 1.53.$

$\sigma_{\text{В}}$ = 1,53.

- коефіцієнт варіації: $V = \dfrac{\sigma_{\text{В}}}{\bar{x}_{\text{В}}} 100\%$ $V = \dfrac{1.53}{2.8375} 100\% = 53.9\%.$

Приклад 3. При лабораторній перевірці пряжи були отримані результати міцності ніті

150	210	240	160	210	240	170	210
241	242	180	189	219	250	151	220
191	190	221	249	222	190	200	230
259	260	231	200	202	229	271	229
203	209	239	280	230	211	250	261

Скласти вариаційний ряд і знайти:

a) Моду, медіану, вибіркову середню, дисперсію.

b) Вибіркове середньоквадратичне відхилення σ, коефіцієнт варіації V.

c) Знайти асиметрію і ексцес.

Розв'язання: Умовна варіанта $\mathbf{u_i} = \frac{x_i - C}{h}$;

$x_i' - x_i''$	x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
145-165	155	3	-4	-12	48	-192	768	243
165-185	175	2	-3	-6	18	-54	162	32
185-205	195	8	-2	-16	32	-64	128	8
205-225	215	9	-1	-9	9	-9	9	0
225-245	235	10	0	0	0	0	0	10
245-265	255	6	1	6	6	6	6	96
265-285	275	2	2	4	8	16	32	162
∑		40		-33	121	-297	1105	551

а) Мода (варіанта, що має найбільшу частоту) *Mo* = 235. Медіана (серединна варіанта) *Me* = 215. Крок h = Δ = 20.

Умовний нуль С = 235.

Вибіркова середня $\overline{x_В} = M_1^* \cdot h + C$; $\overline{x_В} = -0,825 \cdot 20 + 235 = 218,5$.

Дисперсія $D_В = [\,M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2$.

Умовний момент першого порядку $M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}$; $M_1^* = \frac{-33}{40} = -0,825$.

Умовний момент другого порядку $M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}$; $M_2^* = \frac{121}{40} = 3,025$.

Дисперсія $D_В = [\,3,025 - (-0,825^{\,2})\,] \cdot 20^2 = 937,75$.

Середньоквадратичне відхилення : $\sigma = \sqrt{D}$; $\sigma = \sqrt{937,75}$ =30,62,

б) Коефіцієнт варіації: $V = \frac{\sigma_В}{\overline{x_В}} 100\%$; $V = \frac{30,62}{218,5} 100\%$ =14%. Середнє абсолютне відхилення: $\Theta = \frac{\sum |x_i - \overline{x_В}| \cdot n_i}{n}$;.

$\sum |x_i - \overline{x_В}| n_i = |(155 - 218,5) \cdot 3 + (175 - 218,5) \cdot 2 + (195 - 18,5) \cdot 8 + + (215 - 218,5) \cdot 9 + (235 - 218,5) \cdot 10 + (255 - 218,5) \cdot 6 + (275 - 218,5) \cdot 2| = |-190,5 - 87 - 188 - 31,51 + 219 + 165 + 113| = |-497| + 497 = 998$.

$\Theta = \frac{|-497| + 497}{40} = \frac{998}{40} = 24,85$.

в) Умовні емпіричні моменти k-го порядку $M_K^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n}$. Асиметрія $A = \frac{m_3}{\sigma^3}$. Ексцес $E_K = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3$. Знаходимо умовні емпіричні моменти першого, другого, третього, четвертого порядків $M_1^* = -0{,}825$; $M_2^* = 3{,}025$;

$M_3^* = \frac{\sum n_i u_i^3}{n}$; $M_3^* = \frac{-297}{40} = -7{,}425$; $M_4^* = \frac{\sum n_i u_i^4}{n}$; $M_4^* = \frac{1105}{40} = 27{,}625$.

Знайдемо центральні емпіричні моменти третього та четвертого порядків:

$m_3 = [\, M_3^* - 3\, M_2^* M_1^* + 2\, (M_1^*)^3 \,] \cdot h^3$;

$m_3 = [\, -7{,}425 - 3 \cdot (3{,}025) \cdot (-0{,}825) + 2 \cdot (-0{,}825) \,] \cdot 20^3 =$

$= [\, -7{,}425 + 7{,}4869 - 1{,}123 \,] \cdot 8000 = -8{,}489 \cdot 10^3$;

$m_4 = [\, M_4^* - 4\, M_3^*\, M_1^* + 6\, M_2^*\, (M_1^*)^2 - 3\, (M_1^*)^4 \,] \cdot h^4$;

$m_4 = [27{,}625 - 4\,(-7{,}425)(-0{,}825) + 6 \cdot 3{,}025\, (-0{,}825)^2 - 3(-0{,}825)^4 \,] \cdot 20^4 =$

$=[27{,}625 - 24{,}5025 + 12{,}3533 - 0{,}4633 \,] \cdot 16 \cdot 10^4 =$

$= [\, 39{,}9783 - 24{,}9657 \,] \cdot 16 \cdot 10^4 = 240{,}201 \cdot 10^4$.

Асиметрія $A_C = \frac{-8{,}489 \cdot 10^3}{30{,}56^3} = \frac{-8{,}489 \cdot 10^3}{28{,}5404 \cdot 10^3} = -0{,}2974$; $A_c = -0{,}297$;

$\frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{240{,}2 \cdot 10^4}{87{,}19078 \cdot 10^4} = 2{,}7549$; Ексцес $E_K = 2{,}7549 - 3 = -0{,}2451$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Тема № 6. Перевірка статистичних гіпотез

Практичне заняття №8. Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу

Навчальна мета заняття: ознайомитися з методикою перевірки статистичних гіпотез.

Кількість годин: 2 год.

Навчальні питання:

Вступ

1. Критерій згоди Пірсона χ^2. Обчислення емпіричного значення критерію згоди $\chi^2_{емп}$.

Висновки

Література:
Матеріали лекції 6.
[1, с. 233 - 248]
[3, с. 176 - 216]

Матеріально-технічне забезпечення: комп’ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Критерій згоди Пірсона χ^2. Обчислення емпіричного значення критерію згоди $\chi^2_{\text{емп}}$

Закон розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$, параметрами якого є відповідні вибіркові числові характеристики, називається **теоретичним законом розподілу**.

Критерій згоди Пірсона $\boldsymbol{\chi^2}$.

При здійсненні такої заміни немає впевненості, що закон розподілу обраний правильно. Тому розроблено процедуру, яка дозволяє оцінити ступінь відповідності обраного закону даним вибірки. Критерії здійснення такої перевірки називаються **критерії згоди**, найбільш відомим з яких є **критерій Пірсона $\boldsymbol{\chi^2}$** (хи-квадрат).

Критерій Пірсона $\boldsymbol{\chi^2}$ обчислюється за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

де $\boldsymbol{n_i'}$ – частоти, отримані за теоретичним законом розподілу (теоретичні частоти).

З формули видно, що у випадку, коли відповідні теоретичні та емпіричні частоти співпадають, $\chi^2 = 0$. Тобто чим ближче χ^2 до нуля, тим краще узгоджуються вибіркові дані та обраний теоретичний закон розподілу.

Розраховане значення критерію χ^2 порівнюється з його критичним значенням $\chi^2_{\alpha,l}$, яке знаходиться за статистичними таблицями . Якщо $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,l}$, то гіпотеза про закон розподілу приймається. У противному випадку гіпотеза відкидається.

Зауваження. У деяких статистичних таблицях критичне значення χ^2 надається залежно від рівня довіри γ, $\gamma = 1 - \alpha$.

Приклади для розв'язання

Приклад 1. Перевірити, чи погодиться гіпотеза про нормальний розподіл з емпіричним розподілом вибірки, даним у виді наступної таблиці, при рівні значимості α = 5%.

x_i	10	15	20	25	30
n_i	10	25	30	25	10

Розв'язання:

1) α = 5% = 0,05; $n = \sum n_i$ =10+25+30+25+10= 100;

2) Точкові оцінки. Незміщеною оцінкою генеральної середньої / математичного сподівання / служить вибіркова середня

$$\overline{x_{\text{В}}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{10\cdot 10 + 15\cdot 25 + 20\cdot 30 + 25\cdot 25 + 30\cdot 10}{100} = 20.$$

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії служить виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}}$.

s^2 = $\frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_{\text{В}}})^2}{n-1}$; $\overline{\sigma}_{\text{В}} = \sqrt{s^2} = s$; n –1 = 100 – 1 = 99; $\overline{\sigma_{\text{В}}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum n_i (x_i - \overline{x_{\text{В}}})^2}$.

$$\overline{\sigma}_{\text{В}} = \sqrt{s^2} = s = \sqrt{\frac{1}{99}(10\cdot 10^2 + 25\cdot 5^2 + 0 + 25\cdot 5^2 + 10\cdot 10^2)} \approx 5 .$$

3) Обчислимо теоретичні частоти по формулі

$n_i^/ = \frac{n \cdot h}{\overline{\sigma_{\text{В}}}} \varphi(u_i) = 100 \cdot \varphi(u_i)$, з огляду на те, що $h = x_i - x_{i-1}$=15 – 10 = 5; $\overline{\sigma_{\text{В}}} = 5$.

Складемо розрахункову таблицю, де значення функції $\varphi(u_i)$ беремо з $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{u^2}{2}}$.

i	x_i	$u_i=\frac{x_i-\overline{m}}{\overline{\sigma}}$	$\varphi(u_i)$	$n_i^/=100\cdot\varphi(u_i)$
1	10	–2	0,054	5,4
2	15	–1	0,2420	24,2
3	20	0	0,3989	39,89
4	25	1	0,2420	24,2
5	30	2	0,054	5,4

3) Порівняємо емпіричні і теоретичні частоти.

a) складемо розрахункову таблицю, з якої знайдемо значення критерію, що спостерігається, $\chi^2_{набл}$ Пірсона .

i	n_i	$n_i^/$	$n_i-n_i^/$	$(n_i-n_i^/)^2$	$\frac{1}{n_i^/}(n_i-n_i^/)^2$
1	10	5,4	4,6	21,6	4
2	25	24,2	0,8	0,64	0,026
3	30	39,9	9,9	98	2,45
4	25	24,2	0,8	0,64	0,026
5	10	5,4	4,6	21,6	4
Σ	**100**				$\chi^2_{набл}=10{,}5$

$$\chi^2_{набл}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{n_i^/}(n_i-n_i^/)^2= 4 + 0{,}026 + 2{,}45 + 0{,}026 + 4 =10{,}5;$$

$\chi^2_{набл}=10{,}5$

b) По таблиці критичних точок розподілу χ^2, за рівнем значущості

α = 0,05 і числу ступенів вільності К = s – 3 =5 – 3 = 2 знаходимо критичне значення критерію Пірсона $\chi^2_{кр}(0{,}05\,;2)=6$.

10,5 > 6 , тобто $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, то гіпотезу в нормальному розподілі відкидаємо, тобто емпіричні і теоретичні розподіли сильно відрізняються.

Приклад 2. Встановити розбіжність між емпіричними частотами n_i й обчисленими теоретичними частотами $n_i^/$, користуючись критерієм Пірсона, при рівні значимості α = 0,01 , виходячи з гіпотези в нормальному розподілі генеральної сукупності X :

n_i	8	16	40	72	36	18	10
$n_i^/$	6	18	36	76	39	18	7

Розв'язання: Знайдемо значення критерію Пірсона за формулою $\chi^2_{набл} = \frac{1}{n_i^/}\sum (n_i - n_i^/)^2$

Для цього складемо розрахункову таблицю

i	n_i	$n_i^/$	$n_i - n_i^/$	$(n_i - n_i^/)^2$	$\frac{1}{n_i^/}(n_i - n_i^/)^2$
1	8	6	2	4	0,67
2	16	18	– 2	4	0,23
3	40	36	4	16	0,44
4	72	76	– 4	16	0,21
5	36	39	– 3	9	0,23
6	18	18	0	0	0
7	10	7	3	9	1,3
$\sum$	**200**				$\chi^2_{набл} = 3{,}08$

З таблиці $\chi^2_{набл} = 3{,}08$. По таблиці критичних точок розподілу χ^2 таблиці № 3 додатка за рівнем значимості α = 0,01 і числу ступенів вільності К = s – 3 = 7 – 3 = 4 знаходимо критичне значення критерію Пірсона $\chi^2_{кр}(0{,}01;4) = 13{,}3$.

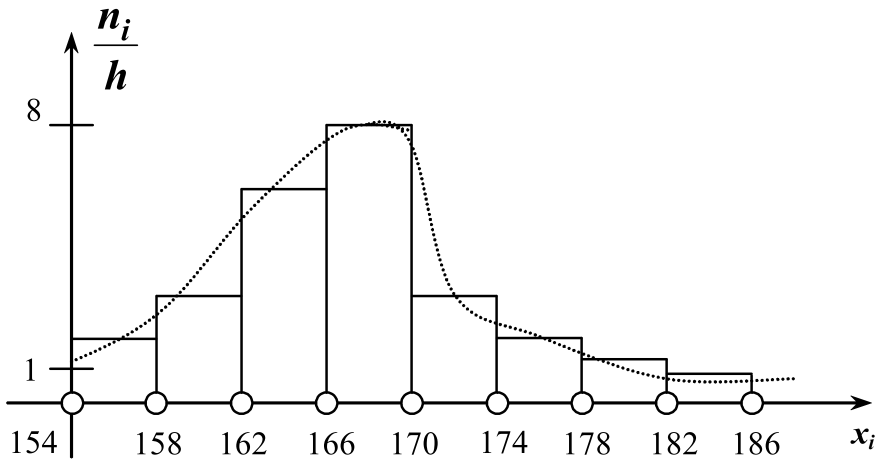
Тому що $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, 3,08 < 13,3 – гіпотеза в нормальному розподілі генеральної сукупності приймається. Іншими словами, розбіжність між емпіричними і теоретичними частотами мало.

*Приклад 3***.** Вимірювання зросту юнаків віком 17 років дав такі результати:

I_i, см	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182	182–186
n_i	8	14	20	32	12	8	4	2

Визначити гіпотетично, який закон розподілу має ознака X – зріст юнака. При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність висунутої нульової гіпотези.

*Розв'язання***.** Для заданого статистичного розподілу побудуємо гістограму частот.



За формою гістограми частот можемо припустити, що ознака X має нормальний закон розподілу. Отже, висуваємо нульову гіпотезу H_0: ознака X має нормальний закон розподілу ймовірностей. Для перевірки правильності H_0 використаємо критерій узгодженості Пірсона.

Необхідно обчислити теоретичні частоти, для цього знайдемо значення $\bar{x}_В$, $\sigma_В$, побудувавши дискретний розподіл за заданим інтервальним:

x_i	156	160	164	168	172	176	180	184
n_i	8	14	20	32	12	8	4	2

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{156\cdot 8 + 160\cdot 14 + 164\cdot 20 + 168\cdot 32 +}{100}$$

$$\frac{+172\cdot 12 + 176\cdot 8 + 180\cdot 4 + 184\cdot 2}{100} = \frac{16704}{100} = 167{,}04 \text{ см;}$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{156^2\cdot 8 + 160^2\cdot 14 + 164^2\cdot 20 + 168^2\cdot 32 + 172^2\cdot 12 + 176^2\cdot 8 +}{100}$$

$$\frac{+180^2\cdot 4 + 184^2\cdot 2}{100} = \frac{2794304}{100} = 27943{,}04;$$

$$D_В = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_В)^2 = 27943{,}04 - (167{,}04)^2 =$$

$$= 27943{,}04 - 27902{,}3616 = 40{,}68;$$

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} = \sqrt{40{,}68} \approx 6{,}38 \text{ см.}$$

Обчислення теоретичних частот наведено в таблиці:

x_i	x_{i+1}	n_i	$z_i = \frac{x_i - \bar{x}_В}{\sigma_В}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_В}{\sigma_В}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$n_i' = n(\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i))$
154	158	8	– 2,04	– 1,42	– 0,4793	– 0,4222	6
158	162	14	– 1,42	– 0,79	– 0,4222	– 0,2852	14
162	166	20	– 0,79	– 0,16	– 0,2852	– 0,0636	22
166	170	32	– 0,16	0,464	– 0,0636	0,1772	24

170	174	12	0,464	1,09	0,1772	0,3621	19
174	178	8	1,09	1,72	0,3621	0,4573	10
178	182	4	1,72	2,34	0,4573	0,4904	3
182	186	2	2,34	2,97	0,4904	0,4986	1

Обчислення спостережуваного значення $\chi^2_{\text{сп}}$ наведено в таблиці:

i	n_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	8	6	2	4	0,667
2	14	14	0	0	0
3	20	22	– 2	4	0,182
4	32	24	8	64	2,667
5	12	19	– 7	49	2,579
6	8	10	– 2	4	0,4
7	4	3	1	1	0,333
8	2	1	1	1	1

$$\chi^2_{\text{сп}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 7{,}828.$$

За таблицею (додаток 4) знаходимо значення

$$\chi^2_{\text{kp}}(\alpha = 0{,}01;\ k = 8 - 2 - 1) = \chi^2_{\text{kp}}(0{,}01; 5) = 15{,}1.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{сп}} \in [0;\ 15{,}1]$, немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0 про нормальний закон розподілу ймовірностей ознаки X.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Практичне заняття №9

Навчальна мета заняття: ознайомитися з методикою перевірки статистичних гіпотез.

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання:

Вступ

1. Перевірка гіпотез про рівність математичного сподівання гіпотетичному значенню.
2. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормально розподілених сукупностей. Критерій Стьюдента.
3. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей. Критерій Фішера-Снедекора

Висновки

Література:
Матеріали лекції 6.
[1, с. 233 - 248]
[3, с. 176 - 216]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютер; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

При ознайомлені з матеріалом звернути увагу на наступні теоретичні відомості.

1. Перевірка гіпотез про рівність математичного сподівання гіпотетичному значенню

1.1. Дисперсія генеральної сукупності відома

Правило 1.

Для того, щоб при заданому рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: a = a_0$ про рівність генеральної середньої a нормальної сукупності з відомою дисперсією гіпотетичному (передбачуваному значенню a_0 при конкуруючий гіпотезі $H_1: a \neq a_0$ – треба обчислити спостережуване значення критерію $U_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a_0)}{\sigma}$ і по таблиці функції Лапласа знайти критичну точку $u_{\text{кр}}$ двусторонньої критичної області з рівності $\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - \alpha)/2$.

Якщо $|U_{\text{набл}}| < u_{\text{кр}}$ – немає підстав відкинути нульову гіпотезу.

Якщо $|U_{\text{набл}}| > u_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу відкидають.

Правило 2. при конкуруючій гіпотезі $H_1: a > a_0$ критичну точку правобічної критичної області знаходять із рівності $\Phi(u_{\text{кр}}) = (1 - 2\alpha)/2.$

Якщо $U_{\text{набл}} < u_{\text{кр}}$ – немає підстав відкинути нульову гіпотезу.

Якщо $U_{\text{набл}} > u_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу відкидають.

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_1: a < a_0$ спочатку знаходять допоміжну критичну точку $u_{\text{кр}}$ по правилу 2, а потім приймають границю лівосторонньої критичної області $u_{\text{кр}} = -u_{\text{кр}}$

Якщо $U_{\text{набл}} > -u_{\text{кр}}$ – немає підстав відкинути нульову гіпотезу.

Якщо $U_{\text{набл}} < -u_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу відкидають.

1.2. Дисперсія генеральної сукупності невідома.

Якщо дисперсія генеральної сукупності невідома (наприклад, у випадку малих вибірок), то як критерій перевірки нульової гіпотези приймають випадкову величину

$T = \frac{(\bar{x}-a_0)}{S}$ де $S = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2 - [\sum n_i x_i]^2 / n}{n-1}}$ - виправлене середнє квадратичуе відхилення. Величина T має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями волі.

Правило 1. Для того щоб при заданому рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу $H_0: a = a_0$ про рівність невідомої генеральної середньої а (нормальної сукупності з невідомої дисперсією) гіпотетичному значенню a_0 при конкуруючій гіпотезі $H_1: a \neq a_0$, треба обчислити спостережуване значення критерію і по таблиці критичних крапок розподілу Стьюдента, по заданому рівню значимості α, поміщеному у верхньому рядку таблиці, і числу ступенів волі $k = n - 1$ знайти критичну точку $t_{\text{двуст.кр}}\ (\alpha, k)$.

Якщо $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст.кр}}$ *– немає підстав відкинути нульову гіпотезу. Якщо* $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст.кр}}$ *– нульову гіпотезу відкидають.*

Правило 2. При конкуруючій гіпотезі $H_1: a > a_0$ за рівнем значимості α поміщеному в нижньому рядку таблиці додатка, і числу ступенів волі $k = n - 1$ знаходять критичну точку $t_{\text{правост.кр}}\ (\alpha, k)$ правобічної критичної області.

Якщо $T_{\text{набл}} < t_{\text{правост.кр}}$ *– немає підстав відкинути нульову гіпотезу. Якщо* $T_{\text{набл}} > t_{\text{правост.кр}}$ *– нульову гіпотезу відкидають.*

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_1: a < a_0$ спочатку знаходять «допоміжну» критичну точку (за правилом 2) $t_{\text{правост.кр}}\ (\alpha, k)$ и покладають границю лівосторонньої критичної области $t_{\text{лівост.кр}}\ (\alpha, k) = -t_{\text{правост.кр}}$.

Якщо $T_{\text{набл}} > -t_{\text{правост.кр}}$ *немає підстав відкинути нульову гіпотезу. Якщо* $T_{\text{набл}} < -t_{\text{правост.кр}}$ *— нульову гіпотезу відкидають.*

2. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормально розподілених сукупностей. Критерій Стьюдента.

Критерій Стьюдента використовується для перевірки гіпотез про рівність генеральних середніх, якщо статистичні дані розподілені за нормальним законом. Формуються гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – середні двох генеральних сукупностей рівні, тобто $\overline{\boldsymbol{x_1}} = \overline{\boldsymbol{x_2}}$;

$\boldsymbol{H_1}$ – середні двох генеральних сукупностей не рівні, тобто $\overline{\boldsymbol{x_1}} \neq \overline{\boldsymbol{x_2}}$.

Перевірка виконується за даними двох вибірок об'ємом $\boldsymbol{n_1}$ та $\boldsymbol{n_2}$. При цьому можливі такі випадки.

Випадок 1. Генеральні дисперсії рівні ($\boldsymbol{S_1^2 = S_2^2}$). Тоді $\boldsymbol{t}$ – критерій Стьюдента обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}}\,.$$

Розраховане значення $\boldsymbol{t}$ – критерію порівнюється з критичним значенням $\boldsymbol{t}_{\text{кр}}$, де $\boldsymbol{t}_{\text{кр}}$ – критичне значення розподілу Стьюдента з параметрами $\boldsymbol{\alpha/2}$ і ступенем воли $\boldsymbol{l = n_1 + n_2 - 2}$, яке надається в статистичних таблицях.

Випадок 2. Генеральні дисперсії не рівні ($\boldsymbol{S_1^2 \neq S_2^2}$). Тоді $\boldsymbol{t}$ – критерій Стьюдента обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}}\,.$$

Розраховане значення $\boldsymbol{t}$ – критерію також порівнюється з критичним значенням $\boldsymbol{t}_{\text{кр}}$, але ступені волі розраховуються за формулою:

$$\boldsymbol{l = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 + 1}} + 2}\,.$$

Випадок 3. Вибірки не є незалежними, оскільки на них впливає певний фактор і його вплив не відомий, або вибірки є даними, отриманими до і після проведення певного експерименту. Тоді формується парна вибірка, і для кожної пари елементів знаходиться $\boldsymbol{d}$ – різниця їх значень. Подальша перевірка здійснюється над вибіркою різниць. $\boldsymbol{t}$ – критерій Стьюдента обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{t}=\frac{\overline{\boldsymbol{x_d}}}{\boldsymbol{S_d}\big/\sqrt{\boldsymbol{n-1}}}.$$

де $\overline{\boldsymbol{x_d}}$ – вибіркове середнє для вибірки різниць;

$\boldsymbol{S_d}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення для вибірки різниць;

$\boldsymbol{n}$ – об’єм вибірки різниць.

Розраховане значення $\boldsymbol{t}$ – критерію також порівнюється з критичним значенням розподілу Стьюдента з параметрами $\boldsymbol{\alpha/2}$ і ступенями волі $\boldsymbol{l=n-1}$.

У всіх випадках гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ приймається, якщо розраховане значення $\boldsymbol{t}$ – критерію менше за абсолютною величиною критичного значення $\boldsymbol{t}_{\text{кр}}$:

$$|\boldsymbol{t}|<\boldsymbol{t}_{\text{кр}}.$$

3. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей. Критерій Фішера-Снедекора

Перевірка гіпотези про рівність генеральних дисперсій здійснюється за $\boldsymbol{F}$ – критерієм (Фішера) тільки тоді, коли статистичні дані незалежні і розподілені за нормальним законом. Формулюються гіпотези:

$\boldsymbol{H_0}$ – дисперсії двох нормально розподілених генеральних сукупностей рівні, тобто $\boldsymbol{S_1^2=S_2^2}$;

$\boldsymbol{H_1}$ – дисперсії двох нормально розподілених генеральних сукупностей не рівні, тобто $\boldsymbol{S_1^2\neq S_2^2}$.

$\boldsymbol{F}$ – критерій (Фішера) розраховується за формулою:

$$\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{S_1^2}}{\boldsymbol{S_2^2}},\boldsymbol{S_1^2>S_2^2}.$$

Гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ приймається, якщо розраховане значення $\boldsymbol{F}$ менше критичного значення розподілу Фішера $\boldsymbol{F}_{\text{крит}}$, взятого із рівнем значущості $\boldsymbol{\alpha}$ і ступенями волі $\boldsymbol{l_1}$ та $\boldsymbol{l_2}$ для чисельнику і знаменнику відповідно: $\boldsymbol{l_1=n_1-1}$, $\boldsymbol{l_2=n_2-1}$, де $\boldsymbol{n_1}$, $\boldsymbol{n_2}$ – об’єми вибірок.

Зауваження. Дисперсія у чисельнику дробу у формулі повинна бути більше дисперсії у знаменнику, тобто значення F – критерію повинно бути більше одиниці.

Приклади для розв'язання.

Приклад 1 По двох незалежних вибірках, обсяги якихn$_1$=11 та n$_2$=14, добутих з нормальних генеральних сукупностей X та У, знайдені виправлені вибіркові дисперсії S_x^2 = 0,76 і S_y^2 = 0,38. При рівні значущості а = 0,05, перевірити нульову гіпотезу H_0: D (X) = D (у) про рівність генеральних дисперсій, при конкуруючої гіпотезі H_1: D {X)> D {Y).

Розв'язання. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

Fнабл = 0,76 / 0.38 = 2. За умовою конкуруюча гіпотеза має вигляд D (X)> D (Y),

тому критична область - правобічна. По таблиці додатка , за рівнем значущості α = 0,05 і числах ступенів свободи $k_1 = n_1 -1 = 11 -1 = 10$ і $k_2 = n_2-1 = 14 - 1 = 13$ знаходимо критичну точку Fкр (0,05; 10; 13) = 2,67. Так як Fнабл < Fкр - немає підстав відкинути гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Іншими словами, вибіркові виправлені дисперсії різняться незначно.

Приклад 5. За заданими статистичними розподілами вибірок, які реалізовано з генеральних сукупностей, ознаки яких X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу,

y_i	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
n'_i	1	2	4	2	3

x_j	0,8	1,6	2,4	3,2	4
n''_j	2	6	1	1	2

при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : D_x = D_y$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : D_x > D_y$.

Розв'язання. Обчислимо значення s_x^2, s_y^2:

$$\bar{y}_B = \frac{\sum y_i n_{1i}}{n_1} = \frac{1{,}2\cdot 1 + 2{,}2\cdot 2 + 3{,}2\cdot 4 + 4{,}2\cdot 2 + 5{,}2\cdot 3}{12} =$$

$$= \frac{1{,}2 + 4{,}4 + 12{,}8 + 8{,}4 + 15{,}6}{12} = \frac{42{,}4}{12} \approx 3{,}53;$$

$$\frac{\sum y_i^2 n_{1i}}{n_1} = \frac{1{,}2^2\cdot 1 + 2{,}2^2\cdot 2 + 3{,}2^2\cdot 4 + 4{,}2^2\cdot 2 + 5{,}2^2\cdot 3}{12} = \frac{168{,}48}{12} = 14{,}04;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum y_i^2 n_{1i}}{n_1} - (\bar{y}_B)^2 = 14{,}04 - (3{,}53)^2 = 14{,}04 - 12{,}4609 = 1{,}5791;$$

$$s_y^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} D_{\text{В}} = \frac{12}{12-1}\cdot 1{,}5191 = 1{,}723;$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_j n_{2j}}{n_2} = \frac{0{,}8 \cdot 2 + 1{,}6 \cdot 6 + 2{,}4 \cdot 1 + 3{,}2 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{12} =$$

$$= \frac{1{,}6 + 9{,}6 + 2{,}4 + 3{,}2 + 8}{12} = \frac{24{,}8}{12} = 2{,}067;$$

$$\frac{\sum x_j^2 n_{2j}}{n_2} = \frac{0{,}8^2 \cdot 2 + 1{,}6^2 \cdot 6 + 2{,}4^2 \cdot 1 + 3{,}2^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2}{12} = \frac{64{,}64}{12} = 5{,}39;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_j^2 n_{2j}}{n_2} - (\bar{x}_B)^2 = 5{,}39 - (2{,}067)^2 = 5{,}39 - 4{,}272489 = 1{,}1175;$$

$$s_x^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} D_{\text{В}} = \frac{12}{12-1} \cdot 1{,}1175 \approx 1{,}22.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$K^* = \frac{s_\delta^2}{s_m^2} = \frac{1{,}723}{1{,}22} = 1{,}41.$$

Для альтернативної гіпотези $H_\alpha : D_x > D_y$ будуємо правобічну критичну область. Знайдемо за таблицею критичну точку

$$k_{\kappa\text{р}}(\alpha = 0{,}01,\ k_1 = 12 - 1 = 11,\ k_2 = 12 - 1 = 11) = k_{\kappa\text{р}}(0{,}01;\ k_1 = 11;\ k_2 = 11) = 4{,}4.$$

Оскільки $K^* \in [0;\ 4{,}4]$, нульова гіпотеза $H_0 : D_x = D_y$ є правильною.

Приклад 2. Задані вибіркові середні $\bar{x}$ та $\bar{y}$, знайдені по вибіркам обсягом n = 40 і m = 50, добутим з нормальних сукупностей X і Y з відомими дисперсіями D(x) = 80 і D(y) = 100 вибіркові середні, яких дорівнюють $\bar{x}$=130 та $\bar{y}$=140.

Треба при рівні значимості α = 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: $M(x) = M(y)$, при конкуруючій гіпотезі H_1: $M(x) \neq M(y)$.

Розв'язання: Знайдемо спостережуване значення $Z_{\text{спост.}}$

$$Z_{спост} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(x)}{n} + \frac{D(y)}{m}}} = \frac{130 - 140}{\sqrt{\frac{80}{40} + \frac{100}{50}}} = -\frac{10}{2} = -5$$

За умовою конкуруюча гіпотеза має вигляд M(x) ≠ M(y), при цьому критична область – двостороння.

Знайдемо праву критичну точку з рівності:

$$\Phi(Z\kappa\kappa) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$$

За таблицею №2 додатку знаходимо функцію Лапласа $Z_{\text{кр}}$ = 1,96.

Так як $|Z_{\text{спост}}| > Z_{\text{кр}}$, то нульову гіпотезу H_0 відкидаємо. Отже, вибіркові середні відрізняються значимо.

Приклад 3. По двох незалежних вибірках, обсяги якихn=12 та m=18, добутих з нормальних генеральних сукупностей Х та У, знайдені вибіркові середні x_c =31,2 та y_c=29,2 та виправлені дисперсії $S_x^2 = 0{,}76$ і $S_y^2 = 0{,}38$. При рівні значущості a = 0,05, перевірити нульову гіпотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкуруючої гіпотезі H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Виправлені дисперсії різні, тому перевіримо попередньо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, використовуючи критерій Фишера - Снедекора. Знайдемо відношення більшої дисперсії до меншої: $\boldsymbol{F}_{\text{набл}} = 0{,}84/0{,}40 = 2{,}1$. Дисперсія S_x^2 значно більше дисперсії S_y^2, тому у якості конкуруючій приймемо гіпотезу H_1*: D(X) > D(Y).* У цьому випадку критична область - правобічна. По таблиці додатка , за рівнем значимості α= 0,05 і числам ступенів волі k_1 =-*n*—1 = 12—1=11 і *k2* = *m* —1=18—1=17 знаходимо критичну точку F*кр(0,05;* И; 17) = 2,41. Тому що Fнабл < Fкр - немає підстав відкинути нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій. Припущення про рівність генеральних дисперсій виконується, тому зрівняємо середні.

Обчислимо спостережуване значення критерію Стьюдента:

$$T_{спот} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} = 7.1$$

За умовою, конкуруюча гіпотеза має вигляд $M(X) \neq M(Y)$, тому критична область -двостороння. За рівнем значимості 0,05 і числу ступенів волі *k*=*n*+*m*—2= 12+18 — 2 = 28 знаходимо по таблиці додатка критичну крапку tдвуст кр (0.05; 28) == 2,05. $T_{\text{набл}} > t_{\text{двуст.}}$кр - нульову гіпотезу про рівність середніх відкидаємо. Інакше кажучи, вибіркові середні відрізняються значимо.

Приклад 4. З нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням σ = 5,2 витягнуто вибірку об'єму n=100 і по ній знайдена вибіркова середня x = 27,56. Потрібно при рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: *a* =a_o = 26 при конкуруючій гіпотезі H_1: *a* ≠ 26.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$\text{Uабл} = (\overline{x} - a_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = (27.56 - 26)\frac{\sqrt{100}}{5.2} = 3\ .$$

За умовою гіпотеза, що конкурує, має вигляд $a \neq a_0$, тому критична область - двостороння. Знайдемо критичну точку з рівності

$$\Phi(\boldsymbol{u}_{\text{кр}}) = (\mathbf{1} - \alpha)/\mathbf{2} = (\mathbf{1} - \mathbf{0{,}05})/\mathbf{2} = \mathbf{0{,}475}.$$

По таблиці функції Лапласа знаходимо $u_{\text{кр}}$ = 1,96. Так як $U_{\text{набл}} > u_{\text{кр}}$ - нульову гіпотезу відкидаємо. Іншими словами, вибіркова і гіпотетична генеральна середні розрізняються значимо.

Приклад 5. По вибірці об'єму $n = 16$ з нормальної генеральної сукупності знайдена вибіркова середня $x = 118{,}2$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 3{,}6$. Потрібно при рівні значимості 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_0} = \mathbf{120}$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{120}$.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$T_{набл} = (\bar{x} - a_0)\frac{\sqrt{n}}{S} = (118{,}2 - 120)\frac{\sqrt{16}}{3{,}6} = -2\,.$$

За умовою гіпотеза, що конкурує, має вигляд $a \neq a_0$, тому критична область - двостороння. За рівнем значимості 0,05 і числу ступенів волі $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$ знаходимо по таблиці додатка критичну точку $t_{\text{двуст кр}}(0.05;\ 15) = 2{,}13$. Так як $\text{Т}_{\text{набл}} < t_{\text{двуст.кр}}$ – нульову гіпотезу про рівність середніх приймаємо.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

3. Рекомендована література (основна, додаткова), інформаційні та навчальні ресурси в Інтернеті

Основна література

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. Київ: Центр навчальної літератури, 2019. 424 с.
2. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
3. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с
4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. К.: КНЕУ, 2017. 304 с.

Додаткова література

5. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Ф. К. Благодир, Л. А. Благодир, С. О. Рудницький. Умань : Сочінський М. М., 2021. 125 с
6. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб. / [Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал] ; М-во освіти і науки України, Нац. ун-т ”Львів. політехніка”. Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015. 361 с.
7. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика» для студентів спеціальності «Інформаційні технології проектування» / М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т ”Харків. політехн. ін-т” ; [уклад.: М. В. Матюшенко, Г. В. Федченко, І. Б. Шеліхова]. Харків: Підруч. НТУ ”ХПІ”, 2015. 35с.
8. Міхайленко В.М, Теренчук С.А., Кубайчук О.О. Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика. К.: Вид-во Європейського університету, 2017. 163 с.

9. Міхайленко В.М, Теренчук С.А., Кубайчук О.О. Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика. Збірник задач. К.: Вид-во Європейського університету, 2017. 116 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

10. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. К: НТУУ «КПІ», 2014. 212 с. − Бібліогр.: с.205. − [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://surl.li/dceiv
11. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/13578/1/O_Zhyltsov_KUBG_TY_UN.pdf
12. Голомозий В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. 366 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/kmv/gkr-problems.pdf
13. Гече Ф. Е. Математика для економістів. Ч. ІІ. Теорія ймовірностей і математична статистика (тексти лекцій і приклади розв'язування задач). Для студентів заочної форми навчання. Тернопіль, 2018. 144 с [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://surl.li/kehvq
14. Гече Ф. Е. Теорія ймовірностей і математична статистика. Навч. метод. посібник. У 2 ч. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – Електронне видання, 2018. 166 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://surl.li/oecu