МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»
обов’язкових компонент освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Облік і аудит

за темою №3− Випадкові величини. Закон розподілу. Числові характеристики випадкових величин

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 10.08.2022 № 1

Розробник: доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф. –м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Ст.викладач циклової комісії економіки та управління Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат економічних наук Цимбалістова О.А.

План лекції

1. Дискретні й неперервні випадкові величини. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.
2. Біноміальний розподіл. Рівномірний розподіл. Розподіл Пуассона.
3. Геометричний розподіл. Гіпергеометричний розподіл
4. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Рекомендована література:

Основна

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те видання : навчальний посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
2. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчаль-но-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.
3. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
4. Конспект лекцій.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с. [https://yandex.ua/search/?lr=143&oprnd=9346860898&text=жильцов%20теорія%20ймовірностей

Текст лекції

1. Дискретні й неперервні випадкові величини. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.

Випадкова величина – це величина, яка у результаті випробування приймає заздалегідь невідоме значення. Наприклад:

1. Кількість студентів, що є присутніми на лекції.
2. Кількість будинків, зданих в експлуатацію в поточному місяці.
3. Температура навколишнього середовища.
4. Вага осколка снаряда, що розірвався.

Випадкові величини поділяються на дискретні й неперервні.

Дискретною називають випадкову величину, що приймає окремі, ізольовані одне від іншого значення з визначеними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або зліченним.

Неперервною називають випадкову величину, що може приймати будь-яке значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку. Очевидно, число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

У наведених прикладах: 1 і 2 – дискретні випадкові величини, 3 і 4 – неперервні випадкові величини. Як правило, випадкові величини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх можливі значення – маленькими.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило (таблиця, функція), що дозволяє знаходити імовірності всіляких подій, зв'язаних із випадковою величиною (наприклад, імовірність того, що вона прийме якесь значення або потрапить на якийсь інтервал).

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються у табличній формі, аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній. Розглянемо ці способи докладніше.

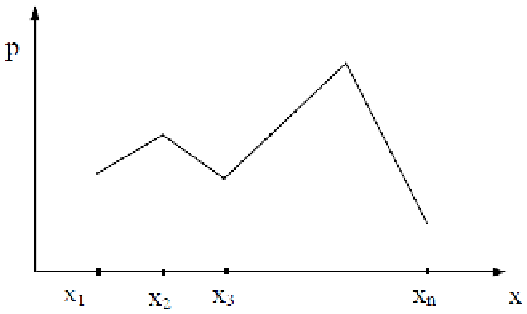
Рядом розподілу називається таблиця, у верхньому рядку якої перераховані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини X: x_1, x_2, ..., x_n, а в нижньому – ймовірності цих значень: p_1, p_2 ..., p_n , де $p_i = P\{X = x_i\}$.

X	x_1	x_2 ...	x_n
p	p_1	p_2 ...	p_n

Оскільки події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ... несумісні й утворюють повну групу, то сума всіх імовірностей, що розташовані у нижньому рядку ряду розподілу, дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Ряд розподілу використовується для задання закону розподілу тільки дискретних випадкових величин.

Якщо на площині XOY сполучити послідовно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), …, то дістанемо ламану, яку називають *многокутником розподілу* випадкової величини X.



2. Біноміальний розподіл. Рівномірний розподіл.
Розподіл Пуассона.

Найважливішими є такі типи дискретних розподілів: рівномірний, біноміальний, показниковий, геометричний, гіпергеометричний.

Біноміальний розподіл (*розподіл Бернуллі*) — це розподіл випадкової величини, яка набуває значення $k \in \{0,1,...,n\}$ з ймовірностями

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де число $p \in (0;1)$ — фіксоване. Біноміальний розподіл має випадкова величина, яка дорів-нює кількості «успіхів» у серії з n незалежних випробувань, у кожному з яких «успіх» відбувається з ймовірністю $p \in (0;1)$.

Рівномірний розподіл — це розподіл випадкової величини, яка набуває n різних зна-чень x_i з однаковими ймовірностями

$$p_k = \frac{1}{k},\ k = 1,2,...,n.$$

Показниковий розподіл (*розподіл Пуассона*) — це розподіл випадкової величини, яка набуває значень $k \in \{0,1,...,n,...\}$ з ймовірностями

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

де число $\lambda = np > 0$ — фіксоване.

3. Геометричний розподіл. Гіпергеометричний розподіл.

Геометричний розподіл — це розподіл випадкової величини, що набуває значень $k \in N$ з ймовірностями $p_k = q^{k-1} \cdot p$, $k = 1, 2, \ldots$, де число $p \in (0;1)$ - фіксоване, а $q = 1 - p$. Геометричний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб до першого «успіху» в серії незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність «успіху» дорівнює p.

Гіпергеометричний розподіл — це розподіл випадкової величини, яка набуває значень $k \in \{0,1,...,m\}$ з ймовірностями

$$p_k = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-n}}{C_N^m}, \quad \text{де } n \geq m,\ N \geq n.$$

Приклад 1. Нехай X — випадкова величина, яка дорівнює кількості випадань грані «6» при двох підкиданнях кубика. Побудувати ряд розподілу та многокутник розподілу випадкової величини X. Вважати випадання кожної цифри рівноймовірним.

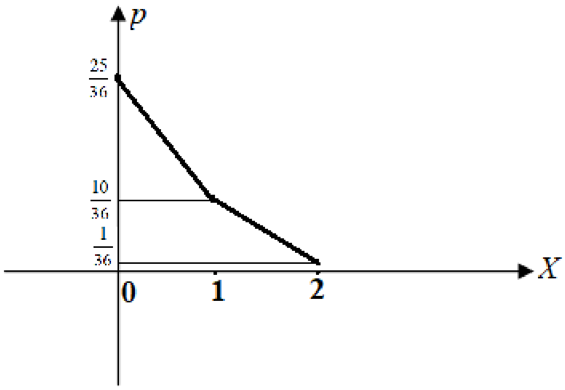
Розв'язання. Випадкова величина X може приймати значення 0,1,2 з ймовір-ностями, які обчислюємо за формулою Бернуллі, тобто маємо біноміальний розподіл. За умовою $p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$, тоді послідовно маємо:

$$p_0 = C_2^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36};\quad p_1 = C_2^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{10}{36};\quad p_2 = C_2^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}.$$

Ряд розподілу має вигляд:

X	0	1	2
p	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Многокутник розподілу:



***Приклад* 2.** Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка розіб'ється, дорівнює 0,004. Знайти ряд розподілу випадкової величини X, що характеризує кількість розбитих пляшок, і ймовірність того, що розбитих пляшок буде більше трьох.

Розв'язання. Оскільки число $n = 1000$ велике, а ймовірність розбиття однієї пляшки $p = 0,004$ мала, то маємо закон розподілу Пуассона. Обчислюємо $\lambda = np = 4$ та записуємо формулу ймовірності для ряду розподілу

$$P(X = k) = \frac{4^k}{k!} e^{-4},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Для знаходження ймовірності того, що що розбитих пляшок буде більше трьох, знайдемо ймовірність протилежної події «розбитих пляшок не більше трьох». Для цього потрібно знайти суму ймовірностей:

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4} + \frac{4^2}{2!} e^{-4} + \frac{4^3}{3!} e^{-4} = e^{-4}\left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right) = 0,4335.$$

Отже, ймовірність шуканої події $P(X \ge 4) = 0,5665$.

4.Числові характеристики дискретних випадкових величин.

До основних числових характеристик, які описують розподіл випадкової величини, належать *математичне сподівання*, *дисперсія*, *середнє квадра-тичне відхилення*, *мода*, *медіана*.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X, яка набуває значень x_i з ймовірностями p_i, називається число

$$M(X) = \sum_i x_i p_i$$

Математичне сподівання має такі властивості:

1. Якщо $P(X = C) = 1$, то $M(X) = C$.
2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$.
3. $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$.
4. Якщо X_1 та X_2 *незалежні випадкові величини* (тобто $P((X_1 < a, X_2 < b)) = P(X_1 < a) \cdot P(X_2 < b)$ для будь-яких чисел a і b), то $M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2)$.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квад-рата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2).$$

Ця формула еквівалентна наступній

$$D(X) = M\,(X^2)\text{-}[M(X)]^2.$$

Для дискретної випадкової величини формули (2) і (3) набувають відповідно такого вигляду:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i$$

$$D(X) = \sum_i x^2{}_i p_i - \left(M(X)\right)^2$$

Дисперсія має такі властивості:

1. $D\,(X) \geq 0$.
2. Якщо $P\,(X = C) = 1$, то $D\,(X) = 0$.
3. $D\,(C \cdot X) = C^2 \cdot D\,(X)$.
4. Якщо X_1 та X_2 незалежні випадкові величини, то $D\,(X_1 + X_2) = D\,(X_1) + D(X_2)$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають число $\sigma(X) = D(X)$.

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують ступінь роз-сіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Модою $Mo(X)$ дискретної випадкової величини називають найімовірніше її значення в деякому околі цього значення. Розподіл називається *унімодаль-ним*, якщо він має єдину моду (біноміальний, нормальний, показниковий тощо). Розподіл називається *полімодальним*, якщо він має більше однієї моди (рівномірний тощо).

Медіаною випадкової величини називається таке число $Me\,(X)$, для якого ви-конується умова $P\,(X < Me\,(X)) = P\,(X > Me\,(X))$.

Приклад 4. Випадкова величина X має ряд розподілу, наведений у таблиці

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0.2

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою $M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 = 2$.

Дисперсію випадкової величини X знайдемо за формулою

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} x^2{}_i p_i - (M(X))^2 = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,6 + 9 \cdot 0,2 - 2^2 = 0,4\,.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,4} \approx 0,633.$$

Мода і медіана дорівнюють $Mo\,(X) = Me\,(X) = 2$.