МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»
обов’язкових компонент освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Облік і аудит

за темою №4− Функція розподілу та щільність розподілу. Нормальний розподіл

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2022 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2022 №8

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 10.08.2022 № 1

Розробник: доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф. –м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Ст.викладач циклової комісії економіки та управління Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат економічних наук Цимбалістова О.А.

План лекції

1. Неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу.
2. Рівномірний розподіл та його характеристики.
3. Нормальний розподіл та його характеристики.
4. Показниковий розподіл та його характеристики.
5. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Рекомендована література:

Основна

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те видання : навчальний посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
2. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчаль-но-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.
3. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
4. Конспект лекцій.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с. [https://yandex.ua/search/?lr=143&oprnd=9346860898&text=жильцов%20теорія%20ймовірностей

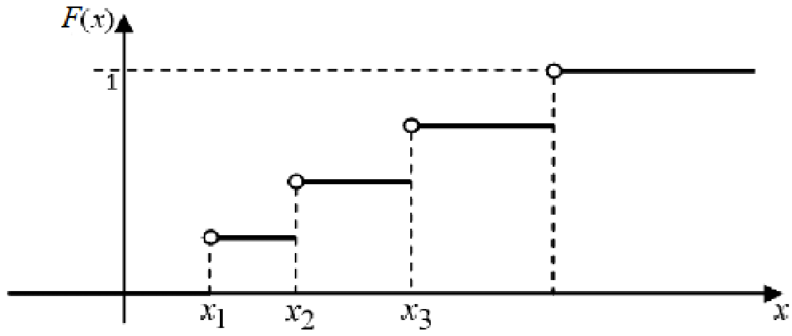
Текст лекції

1. Неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу.

Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її функція розподілу $F(x)$ є неперервною. Якщо X — неперервна випадкова величина, то ймовірність того, що X набуде довільного фіксованого значення x, дорівнює 0 ($P(X = x) = 0$, $x \in R$). Тому на відміну від дискретної випадкової величини розподіл неперервної випадкової величини неможливо задати, зазначивши певні значення, яких вона набуває, та відповідні їм ймовірності. Зрозу-міло також, що множина можливих значень неперервної випадкової величини незліченна.

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є *функ-ція розподілу (або інтегральна функція розподілу)* $F(x) = P(X < x)$. Для дискретних величин $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.

Якщо $x_1 < x_2 < \ldots$, тобто числа x_i впорядковані за величиною, то графік функції розподілу є кусково-сталим.



З властивостей ймовірностей випливають основні властивості функції розподілу:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$.

3) Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то: 1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x > b$.

Наслідок. Імовірність того, що випадкова величина прийме деяке значення в інтервалі (α, β), дорівнює приросту фукції розподілу в цьому інтервалі, тобто

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Неперервні випадкові величини поділяються на два класи: *абсолютно непе-рервні* та *сингулярні*. Випадкова величина X з функцією розподілу $F(x)$ нази-вається *абсолютно неперервною*, якщо існує невід'ємна функція $f(x)$, для якої виконується рівність

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

При цьому функція $f(x)$ називається *щільністю розподілу випадкової величини* X (або *диференціальною функцією розподілу*).

Очевидно, що:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $F(x) = f(x)$ у кожній точці неперервності функції $f(x)$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

4) $P(X \in [a, b]) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Іншими словами, ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a; b)$, $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ та $x = b$.

Сингулярні випадкові величини, на відміну від абсолютно неперервних, не-можливо задати за допомогою щільності розподілу. Найважливішими є такі типи абсолютно неперервних розподілів: рівномірний, нормальний, експоненціальний.

2. Рівномірний розподіл та його характеристики.

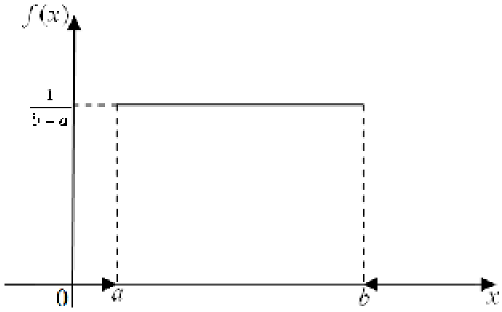
Розподіл випадкової величини X називається *рівномірним* на відрізку $[a; b]$, якщо його щільність має вигляд

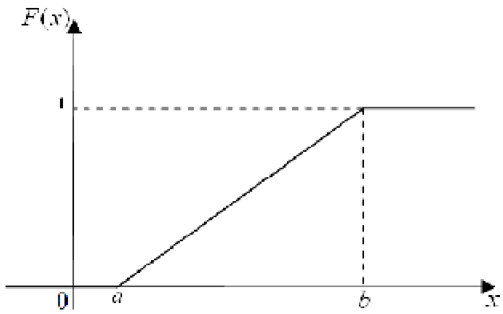
$$f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ x\notin[a,b];\\ \dfrac{1}{b-a},\ \textit{якщо}\ x\in[a,b].\end{cases}$$

Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ \textit{якщо}\ x\in(a,b];\\ 1,\ \textit{якщо}\ x>b.\end{cases}$$

Графіки щільності та функції розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини зображено відповідно рисунках.



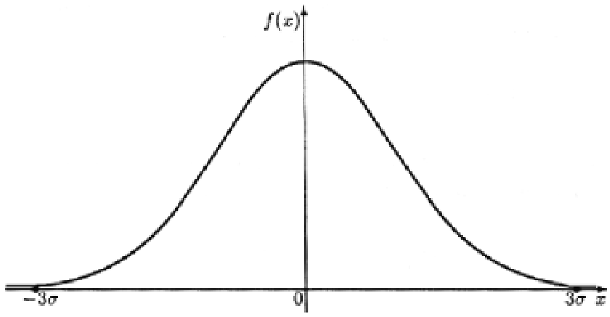


3. Нормальний розподіл та його характеристики

Розподіл випадкової величини X називається *нормальним* з параметрами $a > 0$ і $\sigma > 0$, якщо його щільність має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функція $y = f(x)$ швидко прямує до нуля при $x \to \pm\infty$. Площа фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і віссю Ox, дорівнює одиниці. Площі криволінійних трапецій над проміжками $[a - \sigma; a + \sigma]$, $[a - 2\sigma; a + 2\sigma]$, $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ не залежать від a та σ і дорівнюють відповідно 0,6827; 0,9545; 0,9973. Отже, ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина на-буде значення з відрізка $[a — 3\sigma; a + 3\sigma]$, дорівнює 0,9973. У цьому разі гово-рять, що всі значення нормально розподіленої випадкової величини X потра-пляють у *«проміжок* 3σ» $[a —3\sigma; a + 3\sigma]$ з *практичною достовірністю*. На рисунку зображено графік функції щільності нормального розподілу з пара-метром a = 0.



Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Ця функція не є елементарною. Її значення табульовані за допомогою функ-ції Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

Функція $F(x)$ і $\Phi(x)$ пов'язані співвідношенням:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення, яке належить відрізку [α; β] обчислюються за формулою:

$$P(X\in[\alpha,\beta])=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значень з проміжку [a – δ; a + δ] обчислюються за формулою:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Нормальний розподіл відіграє надзвичайно важливу роль у теорії ймовірностей та її застосуваннях. Наприклад, випадкова похибка вимірювання, як правило, нормально розподілена.

Приклад 1. Випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами a = 7 і σ =2. Порівняти ймовірності потрапляння значень випадкової величини X у проміжки [3; 7] і [–100; 1]. Зазначити інтервал, у який випадкова величина X потрапляє з практичною достовірністю.

Розв'язання. Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл, то α=3, β=7 і

$$P(X\in[3,7])=\Phi\left(\frac{7-7}{2}\right)-\Phi\left(\frac{3-7}{2}\right)=\Phi(0)-\Phi(-2).$$

За таблицею значень функції Лапласа маємо:

$$\Phi(0)=0,\Phi(-2)=-\Phi(2)=-0,4772 \text{ і } P(X\in[3,7])=0,4772.$$

Аналогічно,

$$P(X \in [-100,1]) = \Phi\left(\frac{1-7}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-100-7}{2}\right) = \Phi(-3) - \Phi(-53,5)$$

$= -\Phi(3) + \Phi(53,5)$

За таблицею значень функції Лапласа маємо:

$\Phi(3) = 0,49865$, $\Phi(53,5) = \Phi(5) = 0,5$ і $P(X \in [-100,1]) = 0,00135$.

Отже, $P(X \in [-100,1]) < P(X \in [3,7])$.

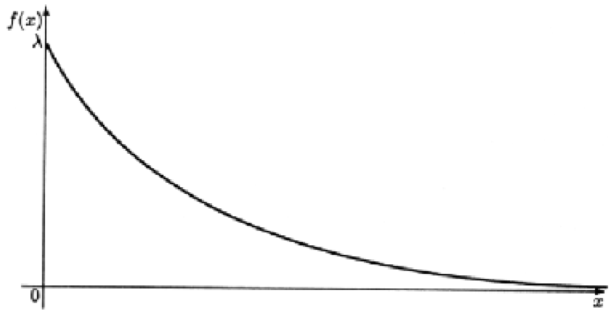
Нормально розподілена величина з практичною достовірністю потрапляє в так званий інтервал «трьох сигм» $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, тому $P(X \in [1,13]) = 0,9973$.

4. Показниковий розподіл та його характеристики.

Розподіл випадкової величини *X* називається *показниковим* (*експоненціальним*) з параметром $\lambda > 0$, якщо його щільність має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & якщо\ x \geq 0. \end{cases}$$

Графік функції щільності експоненціального закону зображено на рисунку:



Функція розподілу цієї випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & якщо\ x \geq 0. \end{cases}$$

Якщо $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, то $P(X \in [a,b]) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Якщо $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, то $P(X \in [0,b]) = 1 - e^{-\lambda b}$.

Показниковий розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування (зокрема, при описі роботи телефонних станцій).

5. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини *X* зі щільністю $f(x)$, заданою на проміжку $[a,b]$, обчислюється за формулою

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсія обчислюється за формулою: $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2$.

Можна показати, що для нормального розподілу $M(X) = a, D(X) = \sigma^2$, а для показникового розподілу $M(X)=\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Приклад 2. Випадкову величину *X* задано щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & \textit{якщо}\ \ x\le 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \textit{якщо}\ \ 0<x\le\dfrac{1}{4},\\ 16x, & \textit{якщо}\ \ \dfrac{1}{4}<x\le\dfrac{\sqrt{2}}{4},\\ 0, & \textit{якщо}\ \ x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини *X*.

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини *X* обчислимо за формулою $M(X)=\int\limits_a^b x\cdot f(x)dx$. Маємо: $M(X)=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\dfrac{x}{2\sqrt{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}}16x^2dx\approx 0{,}1940.$

Обчислюємо дисперсію: $D(X)=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}}16x^3dx-(0{,}1940)^2\approx 0{,}0155.$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}1244.$$

Мода $M_0(X)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, оскільки точка $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ є точкою максимуму функції $f(x)$.

Медіана $M_e(X)=\dfrac{1}{2}$, оскільки $P\left(X<\dfrac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}f(x)dx=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{4}}f(x)dx=\dfrac{1}{2}=P\left(X>\dfrac{1}{2}\right).$