МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Аеронавігація

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2022 №8

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2022 №8

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2022 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 10.08.2021 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії природничих дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Рецензенти:
1. Доцент кафедри автомобілі та трактори Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук Черниш А.А.
2. Професор циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Номер та найменування теми	Кількість годин, відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		Лекції	Семінарські заняття	Практичні	Лабораторні заняття	Самостійна	
Семестр № 1							
ТЕМА № 1. **«**Матриці та визначники»	8	2		2		4	
ТЕМА № 2. «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)»	10	2		4		4	Експрес-контроль 30 хв.
ТЕМА № 3. «Геометричні вектори»	12	4		4		4	
ТЕМА № 4. «Пряма та криві на площині»	10	2		4		4	Експрес-контроль
ТЕМА № 5. «Площина та пряма в просторі»	8	2		2		4	
ТЕМА № 6. «Поверхні другого порядку»	4	2		-		2	
ТЕМА № 7. «Функції, границі, неперервність»	14	6		4		4	
ТЕМА № 8. «Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних»	24	10		10		4	Експрес-контроль 30 хв.
Всього за семестр №1	**90**	**30**		**30**		**30**	**залік**
Семестр № 2							
ТЕМА № 9. «Невизначений та визначений інтеграли»	16	4		6		6	Експрес-контроль 30 хв.
ТЕМА № 10. «Звичайні диференціальні рівняння»	18	4		6		8	Експрес-контроль
ТЕМА № 11. «Числові та функціональні ряди, розклад функцій у степеневі ряди, ряди Фур'є»	20	6		6		8	Експрес-контроль 30хв.
ТЕМА № 12. «Подвійні та потрійні інтеграли, властивості, обчислення»	10	2		2		6	
ТЕМА № 13. «Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула Остроградського»	10	2		2		6	
ТЕМА № 14. «Комбінаторика. Ймовірність подій»	10	2		2		6	
ТЕМА № 15. «Операції	10	2		2		6	

над подіями»							
ТЕМА № 16. «Випадкові величини»	10	2		2		6	**Експрес-контроль**
ТЕМА № 17. «Статистичний аналіз і оцінка похибок вимірювання»	10	2		2		6	
ТЕМА № 18. «Обробка та відображення експериментальних даних. Аналіз результатів експерименту	4	2		-		2	
Всього за семестр №2	**120**	**30**		**30**		**60**	**іспит**

2. Методичні вказівки до практичних занять

ТЕМА № 1. Матриці та визначники.
Практичне заняття №1. Матриці та дії над ними. Обчислення визначників.
Навчальна мета заняття: Навчити курсантів виконувати лінійні операції з матрицями та виконувати множення матриць, обчислювати визначники II-го та III-го порядків.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Додавання (віднімання) матриць, множення матриці на число.
2. Обчислення лінійних комбінацій матриць.
3. Множення матриць.
4. Обчислення визначників.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
7(с.8-24), **8**(с.6-19), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається матрицею?
2. Як позначаються елементи матриці?
3. Що таке розмірність матриці?
4. Яка матриця називається квадратною?
5. Що називається порядком матриці?
6. Яка матриця називається діагональною?
7. Яка матриця називається одиничною? Як вона позначається?
8. Які матриці можна додавати?
9. Як виконується додавання (віднімання) матриць?
10. Властивості операції додавання матриць.

11.Як множити матрицю на число?
12.Що називається лінійною комбінацією матриць?
13.Які матриці називаються узгодженими?
14.Як виконується множення матриць?
15.Властивості операції множення матриць.
16.Що таке транспонування матриці?
17.Властивості операції транспонування матриці.

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Додавання (віднімання) матриць, матриці множення на число

Приклад 1. Знайти суму та різницю матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Додаємо елементи матриць, що стоять на відповідних місцях:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+3 & -1+2 & 3-2 \\ -2-4 & 4+1 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

Віднімаємо елементи матриць, що стоять на відповідних місцях:

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-3 & -1-2 & 3+2 \\ -2+4 & 4-1 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знаючи матрицю A (дивись приклад 1), знайти матриці $2A$ і $-3A$.

Розв'язання. Кожний елемент матриці A множимо на число 2, дістаємо матрицю $2A$. Аналогічно, кожний елемент матриці A множимо на число -3, дістаємо матрицю $-3A$

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -4 & 8 & 2 \end{pmatrix};\quad -3A=\begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 6 & -12 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Знаходження лінійної комбінації матриць

Приклад 3. Знйти лінійну комбінацію матриць $3A$-$2B$+$4C$, якщо

задані матриці; $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знаходимо

$$3A\text{-}2B\text{+}4C=3\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -6 & 12\\ 9 & 15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 4\\ -8 & 2\\ -4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 8 & -12\\ 4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 10 & -2\\ 17 & 9\end{pmatrix}.$$

3. Множення матриць

Приклад 4. Дано дві матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$. Знайти AB та

BA

Розв'язання. Знайдемо AB:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+7\cdot3 & 1\cdot(-2)+7\cdot(-1) & 1\cdot0+7\cdot5\\ 3\cdot1+4\cdot3 & 3\cdot(-2)+4\cdot(-1) & 3\cdot0+4\cdot5\\ (-1)\cdot1+0\cdot3 & (-1)\cdot(-2)+0\cdot(-1) & (-1)\cdot0+0\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & -9 & 35\\ 15 & -10 & 20\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

А тепер знайдемо BA:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot3+0\cdot(-1) & 1\cdot7+(-2)\cdot4+0\cdot0\\ 3\cdot1+(-1)\cdot3+5\cdot(-1) & 3\cdot7+(-1)\cdot4+5\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix}.$$

З наведеного прикладу видно, що $AB\neq BA$.

4. Обчислення визначників.

Визначники другого порядку обчислюємо за формулою:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Приклад 5. Обчислити визначники ІІ-го порядку:

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-3)\cdot 4 = 22; \quad \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3-(-3)\cdot(-4) = -16$$

Приклад 6. Обчислити визначник III-го порядку $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 1+(-3)(-2)(-1)+1\cdot 5\cdot 3-3\cdot 4\cdot(-1)-1\cdot(-3)\cdot 1-2\cdot 5\cdot(-2) =$$

$$= 8-6+15+12+3+20 = 52.$$

Приклад 7. Обчислити визначник III-го порядку $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, розкриваючи його за елементами I-го рядка.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{11}-3A_{12}+3A_{13} = 2\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 14+3\cdot(-1)+3\cdot 9 = 28-3+27 = 52.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання:

1) Дано дві матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) $3A+4B$; б) AB.

2) Обчислити визначники $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

3) Обчислити визначники, розкладаючи їх за будь-яким рядком або стовпцем: а) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

ТЕМА № 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)
Практичне заняття № 2. Метод Крамера. Матричний метод.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розв’язувати СЛАР.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Метод Крамера.
2. Матричний метод.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8(с.67- 74), **7**(с.25-27,32-40), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Запишіть у загальному вигляді систему лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Що називається розв’язком системи?
3. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною?
4. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною, невизначеною?
5. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи.
6. Обґрунтуйте матричний метод розв’язання систем лінійних рівнянь.
7. Який визначник називається головним визначником системи?
8. Які визначники називаються допоміжними визначниками системи?
9. Запишіть правило Крамера розв’язання невироджених систем лінійних рівнянь. До яких рівнянь його можна застосовувати?

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів
(розв’язання задач).

1. Метод Крамера

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь й у випадку сумісності розв’язати її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0,$$ тобто система сумісна.

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера. Для цього знайдемо допоміжні визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -464,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -232,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -116.$$

Підставляючи знайдені значення визначників до формул Крамера, одержуємо розв'язок системи

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2.$$

2. Матричний метод

Приклад 2. Розв'язати систему матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у матричній формі $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці системи відмінний від нуля, то матриця A має обернену, і розв'язок системи має вигляд $X = A^{-1}B$.

Для обчислення оберненої матриці A^{-1}, скористаємось формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & -5\end{vmatrix}=-23,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & -5\end{vmatrix}=-16,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-14,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-13,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Оберненою матрицею системи є матриця $A^{-1}=-\dfrac{1}{58}\begin{pmatrix}-23 & -16 & -1\\ -2 & -14 & 10\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}$.

Матричний розв'язок системи має вигляд:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}-23 & -16 & -1\\ -2 & -14 & 10\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 20\\ 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}-464\\ -232\\ -116\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 4\\ 2\end{pmatrix},$$

звідки $x_1=8,\quad x_2=4,\quad x_3=2.$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера: а) $\begin{cases}3x+5y=12,\\ 2x+7y=19.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+y-z=8,\\ -x+3y+z=-2,\\ 2x+3z=-5.\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x+3y+7z=10,\\ -3x-4y+5z=-13,\\ -2x+y-2z=6.\end{cases}$

2) Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases}x+y-3z=2,\\ 2x-y+z=3,\\ -x+2y-z=-4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x+y-z=-3,\\ -2x+5y-z=1,\\ x+2y+z=6.\end{cases}$

ТЕМА № 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)
Практичне заняття № 3. Метод Жордана - Гауса

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розв'язувати СЛАР.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Метод Жордана – Гауса.

Літератури, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

9(с.67- 74), **7**(с.25-27,32-40), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається розв’язком системи?
2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною?
3. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною, невизначеною?
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи.
5. Поясніть суть методу Жордана-Гауса розв’язання систем лінійних рівнянь.
6. У чому полягає схема жорданових виключень?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів
(розв’язання задач).

1. Метод Жордана – Гауса.

Метод Жордана-Гаусса відрізняється від методу Гаусса тим, що невідомі послідовно виключаються не тільки з наступних рівнянь, але й з попередніх. Розв'язок системи рівнянь зводиться до перетворення жорданових таблиць. Перехід від однієї таблиці до іншої відбувається за допомогою двох кроків:
1-й крок. Серед елементів таблиці $a_{ij} \neq 0$ вибирають розрахунковий елемент.
Рядок і стовпець, на перетині яких розташовано розрахунковий елемент, називаються відповідно *розрахунковим рядком* та *стовпцем*.
На першому кроці всі елементи розрахункового рядка діляться на розрахунковий елемент. Далі всі елементи розрахункового стовпця, окрім розрахункового елемента, замінюють нулями.
2-й крок. Усі інші елементи жорданової таблиці обчислюють за правилом прямокутника. Нехай a_{ij} – розрахунковий елемент. Нам потрібно отримати отримати на місці елемента a_{lk} новий елемент a'_{lk}:

$$a'_{lk} = \frac{a_{ij} \cdot a_{lk} - a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}} = a_{lk} - \frac{a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}$$

Розрахунки зображено на схемі.

a_{lj}		a_{lk}

a_{lk}		a_{lj}

Після перетворень й отримання другої таблиці вибирають новий розрахунковий елемент і відбувається перехід до третьої таблиці й т.д. Жорданові перетворення закінчуються після визначення розрахункових елементів, кількість яких дорівнює рангу матриці системи.

Розв’язання системи в таблицях інколи називають методом жорданових виключень.

Примітка. Двічі в одному рядку вибирати розрахунковий елемент недоцільно.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом жорданових виключень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв’язання. Записуємо систему у вигляді таблиці.

	x_1	x_2	x_3
T_1	2 $\boxed{1}$ 1	1 –2 1	–3 2 3
T_2	0 1 0	5 –2 3	–7 2 1
T_3	0 1 0	$\boxed{26}$ –8 3	$\boxed{0}$ 0 1
	0 1 0	1 0 0	0 0 1

Коментар

При переході до другої таблиці згідно із алгоритмом вибираємо a_{21} за розрахунковий елемент.

При переході до третьої таблиці за розрахунковий вибираємо елемент a_{33}.

При переході до четвертої таблиці за розрахунковий вибираємо елемент a_{12}.

У результаті трьох кроків жорданових перетворень система транспонувалась у наступну

$$\begin{cases} x_2 = -5, \\ x_1 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Приклад 3. Розв’язати систему методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв’язання.

Розвяжемо систему методом Жордана – Гауса.

Записуємо систему у вигляді таблиці.

База	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0	Коментар
T_1	3	–1	$\boxed{2}$	–1	2	У системі базисні змінні не визначено. Вводимо до базису x_2.
	–2	5	–5	4	–1	
	2	3	–1	2	3	
T_2	–3	1	–2	1	–2	На другому кроці вводимо до базису x_4.
	11	0	5	–1	9	
	11	0	5	–1	9	
T_3	8	1	17	0	7	
	–11	0	–5	1	–9	
	0	0	0	0	0	

У результаті двох кроків жорданових перетворень ми отримали систему з двома лінійно незалежними рівняннями

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 17x_3 = 7, \\ -11x_1 - 5x_3 + x_4 = -9. \end{cases}$$

Тут базисні змінні – x_2, x_4 а вільні – x_1, x_3. Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_2 = 7 - 8x_1 - 17x_3, \\ x_4 = -9 + 11x_1 + 5x_3. \end{cases}$$

Базисними розв'язками системи будуть – $X_2 = (1,\ -1,\ 0,\ 2)$, $X_3 = (0,\ -10,\ 1,\ -4)$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Розв'язати системи лінійних рівнянь за методам

Жордана – Гауса: а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 2y - z = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$

ТЕМА № 3. Геометричні вектори

Практичне заняття № 4. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність та незалежність векторів.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розв'язувати задачі на геометричні вектори, визначати лнійну залежність і незалежність векторів.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Координати вектора.
2. Лінійні операції над векторами.
3. Лінійна залежність і незалежність векторів.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с.90-95,99-106), **7**(52-66), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається вектором, нульовим вектором, модулем вектора? Запишіть як їх позначають.
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?
3. Які вектори називають рівними?
4. Що називають сумою двох векторів? Поясніть, як додають вектори за правилами трикутника та паралелограма.
5. Що називають добутком вектора на число? Запишіть властивості додавання та добутку вектора на число.
6. Що називається ортом даного вектора? Яким чином пов'язані даний вектор та його орт?
7. Який вектор називають протилежним даному? Як знайти різницю двох векторів?
8. Що називається проекцією вектора на вісь? Запишіть та пояснить формули для обчислення проекцій.
9. Що таке лінійна комбінація векторів? Чим відрізняється лінійно залежна система векторів від лінійно незалежної?
10. Яким чином додають та множать на число вектори, що задані координатами?
11. Продовжить речення: "Координати колінеарних векторів … ."
12. Що називають *ДПСК* та з чого вона складається?
13. Що називають прямокутними декартовими координатами даного вектора?
14. Яким чином обчислюють координати та модуль вектора?
15. Який вектор називається радіусом-вектором?
16. Як знайти координати точки простору?
17. Що називають напрямними косинусами вектора? Як їх визначають?
18. Запишіть формули поділу відрізка у даному відношенні.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів
(розв'язання задач).

1. Координати вектора.

Приклад 1. Дано $|a| = 13, |b| = 19, |a+b| = 24$. Обчислити $|a-b|$.

Розвязання. Побудуємо суму та різницю векторів за правилом паралелограма. Тоді довжина діагоналі, що виходить із спільного початку, є модуль суми векторів, а довжина іншої діагоналі – модуль різниці. За відомою формулою, що пов'язує довжини сторін та діагоналей паралелограма, маємо:

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 2\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{b}\right|^2$, звідки

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 2\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 2\cdot(13^2+19^2) - 24^2 = 484.$ Отже, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 22.$

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60^0, причому $|a| = 5, |b| = 8.$

Обчислити $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Розвязання. Побудуємо суму та різницю векторів за правилом паралелограма. Тоді довжина діагоналі, що виходить із спільного початку, є модуль суми векторів, а довжина іншої діагоналі – модуль різниці. Модуль різниці знаходимо за теоремою косинусів: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^0 =$

$= 25 + 64 - 80\cdot 0{,}5 = 49,$ отже, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 7.$ Аналогічно знаходимо модуль суми, але вже кут між сторонами паралелограма дорівнює 120^0. Маємо:

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 120^0 = = 25 + 64 + 80\cdot 0{,}5 = 129,$ отже, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{129}.$

Приклад 3. Дано модуль вектора $|a| = 2$ і кути, які він утворює з кординатними осями $\alpha = 45^0, \beta = 60^0, \gamma = 120^0.$ Обчислити проекції вектора на координатні осі.

Розвязання. Проекції вектора на осі знаходимо за формулами:

$a_x = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha = 2\cdot\cos 45^0 = \sqrt{2},\quad a_y = \left|\vec{a}\right|\cos\beta = 2\cdot\cos 60^0 = 1,\ a_z = \left|\vec{a}\right|\cos\gamma = 2\cdot\cos 120^0 = -1.$

2. Лінійні операції над векторами.

Приклад 4. Дано два вектори $\vec{a} = \{2;-1;3\}$ і $\vec{b} = \{-2;1;0\}.$ Знайти проекції на координатні осі наступних векторів: $\vec{a}+\vec{b};\ \vec{a}-\vec{b};\ 2\vec{a}+3\vec{b}.$

Розвязання. Знаходимо: $\vec{a}+\vec{b} = \{0;0;3\};\ \vec{a}-\vec{b} = \{4;-2;3\};$

$2\vec{a} = \{4;-2;6\},\ 3\vec{b} = \{-6;3;0\},\ 2\vec{a}+3\vec{b} = \{-2;1;6\}.$

Приклад 5. Записати лінійну комбінацію $3\overline{a}_1 + 5\overline{a}_2 - \overline{a}_3$ векторів $\overline{a}_1 = (4;\,1;\,3;\,-2)$; $\overline{a}_2 = (1;\,2;\,-3;\,2)$; $\overline{a}_3 = (16;\,9;\,1;\,-3)$.

Розвязання. Послідовно знаходимо: $3\vec{a}_1 = \{12;3;9;-6\},\ 5\vec{a}_2 = \{5;10;-15;10\};$

$3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \{1;4;-7;7\}.$

Приклад 6. Перевірити чи колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо відомі координати точок початку і кінця цих векторів $A = (-1;\,5;\,-10)$, $B = (5;\,-7;\,8)$, $C = (2;\,2;\,-7)$ і $D = (5;\,-4;\,2)$.

Розвязання. Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB} = \{6;-12{,}18\},\ \overrightarrow{CD} = \{3;-6;9\}.$

Перевіряємо умову колінеарності векторів (пропорційність координат):
$\frac{6}{3}=\frac{-12}{-6}=\frac{18}{9}=2.$ Вектори колінеарні.

Приклад 7. Знайти орт вектора $\vec{a}=\{6;-2;-3\}$.

*Розвязання.*Знаходимо модуль вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{36+4+9}=7,$ тепер знаходимо орт:
$\vec{a}^0=\left\{\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right\}.$

3. Лінійна залежність і незалежність векторів

Приклад 8. Показати, що вектори $\bar{x}_1=(1;\,2;\,1;\,2)$; $\bar{x}_2=(-1;\,3;\,2;\,1)$;
$\bar{x}_3=(-13;\,-1;\,2;\,-11)$ лінійно залежні.

Розвязання. Знаходимо ранг матриці даної системи векторів:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -13\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -13\\ 0 & 5 & 25\\ 0 & 3 & 15\\ 0 & 3 & 15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -13\\ 0 & 5 & 25\\ 0 & 3 & 15\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Оскільки ранг цієї матриці дорівнює 2 (другий та третій рядок пропорційні), то максимальне число лінійно незалежних векторів даної системи дорівнює двом, отже дані три вектори лінійно залежні.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1. Показати, що вектори $\bar{a}=(-2;\,0;\,1)$; $\bar{b}=(1;\,-1;\,-2)$;
$\bar{c}=(3;\,1;\,-1)$ лінійно незалежні.

2. Знайти довжину та напрямні косинуси вектора $\bar{a}=(1;\,-2;\,2)$

3. Перевірити, що чотири точки A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3), D(3;-5;3) є вершинами трапеції.

4. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}=\{2;-1;3\}$ і $\vec{b}=\{-6;3;-9\}$. Встановити, який з них довший другого і в скільки разів, як вони направлені – в одну чи в протилежні сторони.

ТЕМА № 4. Геометричні вектори
Практичне заняття № 5. Добутки векторів.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розкладати вектори за базисом, знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Скалярний добуток.

2. Векторний і мішаний добуток.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с.90-95,99-106), **7**(52-66), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається скалярним добутком векторів?
2. Які властивості скалярного добутку ви знаєте?
3. Що таке скалярний квадрат вектора?
4. У якому випадку скалярний добуток дорівнює нулю?
5. Напишіть формулу скалярного добутку в координатах?
6. Як визначити модуль вектора, заданого в координатах?
7. Як знайти кут між векторами?
8. Який фізичний зміст скалярного добутку?
9. Який добуток векторів називається векторним?
10. Який геометричний зміст векторного добутку?
11. Який фізичний зміст векторного добутку?
12. Як обчислити векторний добуток в координатах?
13. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
14. Сформулюйте властивості мішаного добутку?
15. Напишіть мішаний добуток у координатах.
16. Який геометричний зміст мішаного добутку?
17. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Скалярний добуток.

Приклад 1. Дано точки $A(-3,\ 1,\ 4)$, $B(-5,\ -1,\ 2)$, $C(0,\ 4,\ 1)$, $D(3,\ 3,\ -1)$, $E(9,\ -5,\ 4)$, $F(10,\ -5,\ 1)$. Потрібно: а) обчислити скалярний добуток векторів $2\overrightarrow{CD}\cdot 3\overrightarrow{EF}$; б) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$; в) знайти кут φ між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$;

Розв'язання. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

Дістаємо: $\overrightarrow{AB}(-2,\ -2,\ -2)$, $\overrightarrow{CD}(3,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{EF}(1,\ 0,\ -3)$.

а) Скористаємось властивістю скалярного добутку та його формулою:

$(2\overrightarrow{CD})\cdot(3\overrightarrow{EF}) = 6(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}) = 6(3\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot(-3)) = 54$.

б) Знаходимо $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(-1,\ -1,\ -1)$. Для того, щоб вектори були колінеарними, необхідно, щоб їхні координати були пропорційними. Оскільки $\frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{-2}$, то вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не колінеарні.

Ортогональність векторів перевіримо, знаходячи їх скалярний добуток: $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CD} = (-1)3 + (-1)(-1) + (-1)(-2) = 0$. Отже, вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ ортогональні.

в) Знаходимо косинус кута φ:

$$\cos\varphi = \frac{(-2,-2,-2)(1,0,-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{(-2)1+(-2)0+(-2)(-3)}{2\sqrt{30}} = -\frac{2}{\sqrt{30}},$$

тоді $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \approx 111^o 30'$.

Приклад 3. Знайти кут, який утворюють орти $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$, якщо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ та $\vec{b} = 5\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Нехай φ – кут між векторами $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2})(5\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}) = 5\overrightarrow{e_1}^2 - 4\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + 10\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} - 8\overrightarrow{e_2}^2 = 5\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2 + 6\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} - 8\left|\overrightarrow{e_2}\right|^2.$$

Оскільки $\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = 1$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5 + 6\cos\varphi - 8 = 6\cos\varphi - 3$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тоді $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Дістаємо: $6\cos\varphi - 3 = 0$, звідки $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Отже, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

2. Векторний добуток. Мішаний добуток.

Приклад 4. Дано точки $A(-3,\ 1,\ 4)$, $B(-5,\ -1,\ 2)$, $C(0,\ 4,\ 1)$, $D(3,\ 3,\ -1)$, $E(9,\ -5,\ 4)$, $F(10,\ -5,\ 1)$. Потрібно: а) знайти модуль векторного добутку векторів $2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$; б) обчислити мішаний добуток трьох векторів; в) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CD}$, $-\overrightarrow{EF}$;

Розв'язання. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

Дістаємо: $\overrightarrow{AB}(-2,\ -2,\ -2)$, $\overrightarrow{CD}(3,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{EF}(1,\ 0,\ -3)$.

а) Використаємо властивість векторного добутку:

$$(2\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{EF} = 2(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{EF}) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Модуль цього вектора знайдемо за формулою:

$$\left|(2\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{6^2+(-8)^2+2^2} = 2\sqrt{26}.$$

б) Оскільки мішаний добуток це – векторно-скалярний добуток, то скористаємось властивістю скалярного добутку, властивістю векторного добутку та формулою мішаного добутку:

$$(9\overrightarrow{AB}, 2CD, -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}) = -6(\overrightarrow{AB}, CD, \overrightarrow{EF}) = -6\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 132$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Вектори задано в координатній формі: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Знайти: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$.

2) Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2,\ 1,\ 0)$ і $\vec{b} = (0,\ -2,\ 1)$.

3) Визначити, при якому α вектори $\vec{a} = (-2,\ 3,\ \alpha)$ і $\vec{b} = (-1,\ -2,\ 2)$ взаємно перпендикулярні?

4. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = (3,\ -1,\ 2)$ і $\vec{b} = (1,\ 2,\ -1)$.

5. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ 3,\ 4)$, $C(4,\ 3,\ 2)$.

6. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$;

ТЕМА № 4. Пряма та криві на площині

Практичне заняття № 6. Різні види рівнянь прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити різні види рівнянь прямої на площині.

Кількість годин – 2.

Навчальні питання:

1. Різні види рівнянь прямої на площині
2. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

9(с.119-120,127-136), **7**(с.72-80), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Напишіть загальне рівняння прямої.
2. Напишіть рівняння прямої. що проходить через дві точки.
3. Напишіть рівняння прямої з нормальним вектором.
4. Напишіть рівняння прямої з напрямляючим вектором.
5. Напишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
6. Напишіть рівняння прямої. що проходить через задану точку у заданому напрямку.
7. Як знайти кут між прямими?
8. Як знайти відстань від точки до прямої?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Різні види рівнянь прямої на площині

Приклад 1. Складти рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1,-2)$ і $B(-3,5)$.

Розв'язання. Підставимо у формулу $x_1=1$, $x_2=-3$, $y_1=-2$, $y_2=5$, отримаємо

$$\frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{x-1}{-3-1}\Leftrightarrow\frac{y+2}{7}=\frac{x-1}{-4}\Leftrightarrow-4y-8=7x-7\Leftrightarrow 7x+4y+1=0.$$

Приклад 2. Дано вершини трикутника *ABC*: *A*(1, 2), *B*(5, 3), *C*(1, –1). Знайти: а) рівняння сторони *AB*; б) рівняння висоти *CH*; в) рівняння медіани *AM*; г) точку *N* перетину медіани *AM* і висоти *CH*; д) рівняння прямої, що проходить через вершину *C* паралельно стороні *AB*.

Розв'язання. а) Знайдемо рівняння сторони *AB* як прямої, що прохо-дить через дві задані точки $A(1,2)$ і $B(5,3)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-2}{3-2}\Leftrightarrow\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}\Leftrightarrow x-1=4y-8\Leftrightarrow$$

$x-4y+7=0$ – рівняння *AB*.

б) Знайдемо кутовий коефіцієнт сторони *AB*. Для цього приведемо рівняння *AB* до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$4y=x+7\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{4}.$$

У силу перпендикулярності сторони AB і висоти CH кутовий коефіцієнт висоти, що проведена з вершини *C*, дорівнює -4. Рівняння цієї висоти має вигляд

$$y+1=-4(x-1)\quad\Leftrightarrow\quad 4x+y-3=0.$$

в) Точка *M* поділяє сторону *BC* навпіл, тому координати точки *M* знаходимо за формулами:

$x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}$, $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2}$. Тому $x = \dfrac{5+1}{2} = 3,\ y = \dfrac{3+1}{2} = 2.$

Отже, M (3, 2).

Складемо рівняння медіани AM як прямої, що проходить через точки A(1, 2) і M(3, 2).

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{2-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 0 \text{ – рівняння } AM.$$

г) Точку N перетину медіани AM і висоти CH знайдемо, розв'язавши систему, складену з рівнянь прямих AM і CH:

$$\begin{cases} 4x + y - 3 = 0, \\ y - 2 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{4}; 2\right).$$

д) Складемо рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

$x - 4y + 7 = 0$ – рівняння AB, $k = \dfrac{1}{4}$. У силу паралельності прямих кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через C паралельно стороні AB, теж дорівнює $\dfrac{1}{4}$. Отже, $y - 1 = \dfrac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0.$

2. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.

Приклад 3. Знайти гострий кут між двома прямими $y = 2x + 4$ і $y = 3x - 1$.

Розв'язання. Оскільки нам потрібно знайти гострий кут, то формулу кута між прямими візьмемо за абсолютною величиною:

$tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. В нашому випадку $k_1 = 2,\quad k_2 = 3,$ тому маємо:

$tg\varphi = \left|\dfrac{3-2}{1+6}\right| = \dfrac{1}{7}$, звідси $\varphi = 8^0 8'$.

Приклад 4. Знайти відстань від точки $M_0(2;5)$ до прямої $6x + 8y - 5 = 0$

Розв'язання. Скористаємося формулою $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Маємо:

$$d = \frac{|6 \cdot 2 + 8 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{47}{10} = 4{,}7 .$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

У трикутнику ABC задані координати його вершин $A(-6; -1)$, $B(5; 4; 6)$, $C(5; -5)$.

1.1 Скласти рівняння сторони AB

1.2 Рівняння сторони AB записати у вигляді:

а) рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки;

б) загального рівняння прямої;

в) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3 Скласти рівняння прямої, яка проходить через вершину C паралельно AB. Записати його у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом. Знайти кут нахилу цієї прямої до осі Ox

1.4 Скласти рівняння висоти CD і записати його в загальному вигляді

1.5 Скласти рівняння медіани AM

1.6 Визначити відстань від вершини C до сторони AB

1.7 Надати геометричну інтерпретацію розв'язку.

ТЕМА № 4. Пряма та криві на площині
Практичне заняття № 7. Криві другого порядку: коло,еліпс, гіпербола, парабола.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів навичок складання рівнянь кривих II-го порядку, побудови кривих за їх канонічним рівнянням.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Коло, еліпс.
2. Гіпербола, парабола.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с.119-120,127-136), **7**(с.72-80), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається кривою другого порядку?
2. Що називається колом?
3. Як записується загальне рівняння кола?
4. Що називається еліпсом?
5. Як записується канонічне рівняння еліпса?
6. Яка залежність між параметрами a, b, c еліпса?
7. Як знайти ексцентриситет еліпса та що він характеризує?
8. Напишіть рівняння директрис еліпса.
9. Що називається гіперболою?
10. Як записується канонічне рівняння гіперболи?
11. Яка залежність між параметрами a, b, c гіперболи?
12. Як знайти ексцентриситет гіперболи та що він характеризує?
13. Напишіть рівняння асимптот та директрис гіперболи.
14. Що називається параболою?
15. Як записується канонічне рівняння параболи?

16. Як називається число p і що воно означає?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Коло, еліпс.

Приклад 1. Знайти координати центра і радіус кола

$$x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0.$$

Розв'язання. Потрібно перетворити це рівняння до виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Для цього виділяємо повні квадрати:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}; \qquad y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1;$$

Задане рівняння тепер перепишемо у вигляді:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 - 1 = 0, \text{ або остаточно } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{4}.$$

Отже, маємо центр кола C(0,5;-1), радіус $R = \frac{3}{2}$.

Приклад 2. Написати рівняння кола, що проходить через три точки A(0;1), B(2;0), C(3;-1).

*Розв'язання.*Шукане рівняння має вигляд $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Оскільки коло проходить через вказані точки, координати кожної з цих точок задовольняють рівняння кола. Підставляючи почергово в шукане рівняння координати даних точок, дістанемо систему трьох рівнянь для визначення a, b, R.

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = R^2 \\ (2-a)^2 + b^2 = R^2 \\ (3-a)^2 + (-1-b)^2 = R^2 \end{cases}$$

Візьмемо перше та друге рівняння, а потім перше та третє. Праві частини цих рівнянь однакові, отже рівні й ліві їх частини; дістаємо:

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = (2-a)^2 + b^2, \\ a^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (-1-b)^2. \end{cases}$$

Розкриваючи дужки та спрощуючи, маємо систему

$$\begin{cases} 4a - 2b = 3 \\ 6a - 4b = 9, \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{9}{2}$. Підставляючи ці значення в перше рівняння сисиеми, дістанемо $R^2 = \frac{65}{2}$. Шукане рівняння кола має вигляд $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$, або після спрощення $x^2 + y^2 3x + 9y - 10 = 0.$

Приклад 4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь $b = 3$, координати фокуса $F(5, 0)$.

Розв'язання. Для того, щоб написати рівняння еліпса, необхідно знайти велику піввісь a. Знаючи координати фокуса, знаходимо половину фокусної відстані c=5. Скориставшись основним співвідношенням, маємо

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 9 = 34\,.$$

Звідси дістаємо канонічне рівняння еліпса : $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Приклад 5. Знайти довжини осей, координати фокусів та ексцен-триситет еліпса: $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Розв'язання. Приведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду. Для цього поділимо обидві частини на 144, дістаємо:

$$\frac{4x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1\,.$$

Звіди маємо: $a^2 = 36, b^2 = 16,$ отже, $a = 6, 2a = 12, b = 4, 2b = 8.$ Знаючи a і b, із співвідношення $a^2 - b^2 = c^2$ знаходимо $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{5}.$ Координати фокусів $F_1(-2\sqrt{5};0), F_2(2\sqrt{5};0).$ Екцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

2. Гіпербола, парабола

Приклад 6. Скласти канонічні рівняння: а) гіперболи; б) параболи (A – точка, що лежить на кривій, a – дійсна напіввісь, ε – ексцентриситет): а) $a = 4$, ε = 1,5 ;   б) вісь симетрії $0y$ і $A(3, –2)$.

Розв'язання. а) Для гіперболи маємо: a = 4, e = 1,5. $\varepsilon = \frac{c}{a}.$ Знайдемо c: $c = \varepsilon a = 1{,}5 \cdot 4 = 6.$ Далі знаходимо: $b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Отже, рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$

б) Парабола симетрична відносно осі $0y$, а тому її канонічне рівнян-ня має вигляд $x^2 = -2py.$ Підставивши до цього рівняння координати точ-ки A, маємо: $9 = -2p(-2)$, $p = \frac{9}{4}$. Отже, рівняння параболи $x^2 = -\frac{9}{2}y$, або $y = -\frac{2}{9}x^2.$

Приклад 6. Знайти рівняння асимптот гіперболи $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Розв'язання. У гіперболи дві асимптоти, що визначаються рівняннями $y = \pm\frac{b}{a}x.$ Приведемо рівняння гіперболи до канонічного виду, поділивши обидві його частини на 6: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1.$ Звідси $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$, тому рівняння асимптот такі: $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x,$ або $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$ і $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

1. Задано рівняння лінії другого порядку. Звести рівняння до найпростішого вигляду та визначити тип кривої:

а) $x^2+5y^2-12x+30y+21=0$

б) $x^2+y^2-8x+12y+36=0$

2. Скласти рівняння кола що проходить через точки $A(8;5)$, $B(-1;-4)$, центр якого лежить на осі ординат.

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в точках (-4;0) і (4;0), а ексцентриситет дорівнює 0,8.

4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ох , якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а уявна - 40.

5. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ох, якщо довжина дійсної осі дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 20.

6. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус знаходиться в точці: а) $F(5;0)$, б) $F(0;2)$.

ТЕМА № 5. Площина та пряма в просторі.

Практичне заняття № 8. Різні види рівнянь площини. Різні види рівнянь прямої у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів складати рівняння площини та прямої у просторі.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Різні види рівнянь площини та прямої у просторі.
2. Взаємне розміщення прямої і площини.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

9(с. 121-126), **7**(с.105-119), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Напишіть рівняння площини, знаючи задану точку і нормальний вектор.
2. Напишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
3. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.
4. Як знайти кут між площинами?
5. Як обчислити відстань від точки до площини?

6. Напишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки.
7. Напишіть канонічні рівняння прямої.
8. Напишіть параметричні рівняння прямої.
9. Як звести загальні рівняння прямої до канонічного вигляду?
10. Як знайти кут між прямими?
11. Як визначити взаємне розташування прямої та площини?
12. Запишіть умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Різні види рівнянь площини та прямої.

Приклад 1. Дано чотири точки $A_1(1,-2,1)$, $A_2(3,-1,-1)$, $A_3(2,0,1)$, $A_4(2,-1,4)$. Скласти рівняння: а) площини $A_1A_2A_3$; б) прямої A_1A_2; в) прямої A_4M, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$; г) прямої A_3N, паралельної прямій A_1A_2. Обчислити: д) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$; е) косинус кута між координатною площиною *0xy* і площиною $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. а) Складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$, що проходить через три точки A_1, A_2, A_3.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник, отримаємо загальне рівняння площини

$$4x+2y-3z+3=0.$$

б) Складемо рівняння прямої A_1A_2 як прямої, що проходить через дві точки A_1 і A_2:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{-1+2}=\frac{z-1}{-1-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

в) Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку $A_4(2,-1,4)$:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(m,n,p)$ колінеарний нормальному вектору площини $\overrightarrow{N}=(A,B,C)$. Тому з умови колінеарності векторів можемо записати, що $m=-4,\ n=-2,\ p=3$, а отже, рівняння прямої A_4M, що перпендикулярна до площини $A_1A_2A_3$, має вигляд :

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-3}.$$

г) Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку $A_3(2,0,1)$:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{p}.$$

З умови паралельності шуканої прямої до прямої A_1A_2 випливає, що $m=2,\ n=1,\ \ p=-2$. Тому рівняння прямої A_3N, що паралельна прямій A_1A_2, має вигляд $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

д) Обчислимо синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$. Складемо рівняння прямої A_1A_4:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+2}{-1+2}=\frac{z-1}{4-1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}.$$

Рівняння площини $A_1A_2A_3$: $4x+2y-3z+3=0$.

Тоді $m = 1,\ n = 1,\ p = 3,\ A = 4,\ B = 2,\ C = -3$ і дістаємо шуканий кут:

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 2+3\cdot(-3)|}{\sqrt{1+1+9}\sqrt{16+4+9}}=\frac{3}{\sqrt{319}}\approx 0{,}168.$$

е) Рівняння координатної площини *0xy* має вигляд: $z=0$. Обчислимо косинус кута між координатною площиною *0xy* і площиною $A_1A_2A_3$, використовуючи формулу для обчислення кута між двома площинами :

де $A_1=0,\quad B_1=0,\quad C_1=1,\quad A_2=4,\quad B_2=2,\quad C_2=-3$. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{-3}{\sqrt{16+4+9}}=-\frac{3}{\sqrt{29}}\approx -0{,}557.$$

Приклад 2. Знайти канонічне рівняння прямої $\begin{cases}x+y+2z-6=0,\\ 2x+2y-3z+2=0.\end{cases}$

Розв'язання. Щоб скласти канонічні рівняння прямої, необхідно знайти координати будь-якої точки M_0, що належить прямій, і напрямний вектор $\vec{s}$ цієї прямої. Координати точки можна знайти так: покладемо в системі рівнянь довільне значення однієї змінної, наприклад, $x_0=1$. Отримаємо систему рівнянь з двома невідомими. Розв'язавши її, знаходимо $y_0=1$, $z_0=2$. Таким чином, $M_0(1,1,2)$ – одна з точок, що належать прямій. Знайдемо напрямний вектор прямої. Оскільки нормальні вектори площин $\overrightarrow{n_1}=(1,1,2)$ та $\overrightarrow{n_2}=(2,2,-3)$, то

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+7\vec{j}.$$

Отже, канонічне рівняння даної прямої має вигляд $\dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-2}{0}$.

2. Взаємне розміщення прямої і площини.

Приклад 3. Визначити взаємне розташування прямої $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{5}$ та площини $x+y-2z-4=0$.

Розв’язання. Визначимо невідомі $x,\ y,\ z$ із системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{5}=t,\\ x+y-2z-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+3t,\\ y=-1-t,\\ z=2+5t,\\ x+y-2z-4=0.\end{cases}.$$

Підставляючи ці значення невідомих у останнє рівняння системи, ми приходимо до рівняння з одним невідомим $1+3t-1-t-2(2+5t)-4=0$. Розв'язавши його, знаходимо: $t=-1$. Отже, пряма перетинає площину в одній точці.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(3,\ 7,\ -1)$ перпендикулярно до осі $0x$.
2. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь $0y$ і точку $A(2,\ 5,\ 1)$.
3. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $A(1,\ -2,\ -1)$, $B(2,\ 3,\ 0)$, $C(6,\ 2,\ -2)$.
4. Знайти відстань від точки $A(2,\ -1,\ 3)$ до площини $2x+2y-z+4=0$.
5. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $A(2,\ 4,\ -1)$ паралельно вектору $\vec{s}=(3,\ 5,\ -1)$.
6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(3,\ 2,\ -2)$ і $B(-2,\ 3,\ -4)$.
7. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases}2x+3y-16z-7=0,\\ 3x+y-17z=0.\end{cases}$

ТЕМА № 7. Функції, границі, неперервність
Практичне заняття № 9. Елементарні функції. Границі функції. Розкриття невизначеностей.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розрізняти класи основних елементарних функцій, розкриттю невизначеностей та знаходженню границі функції.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Класи елементарних функцій та їх графіки.
2. Границі функції. Розкриття невизначеностей.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
5(с.142-150),**8(1)(**с.161-206), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Які функції називаються лінійними?
2. Як побудувати графік лінійної функції?
3. Які функції називаються степеневими?
4. Наведіть графіки основних степеневих функцій.
5. Які функції називаються показниковими? Графіки?
6. Які функції називаються логарифмічними? Графіки?
7. Накресліть графіки тригонометричних функцій.
8. Сформулюйте означення границі функції в точці
9. Яку функцію називають нескінченно малою, а яку - нескінченно великою?
10. Сформулюйте основні теореми про границі функцій.
11. Які види невизначеностей ви знаєте?
12. Як розкрити невизначеність $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$?
13. Як розкрити невизначеність $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, якщо $P(x)\to 0$ і $Q(x)\to 0$?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Класи елементарних функцій та їх графіки.

Приклад 1. Побудувати графіки функцій:

1) $y=-3x^2$; 2) $y=\dfrac{4}{x-2}$; 3) $y=\sqrt{2x}$; 4) $y=\sin x-1$;

Приклад 2. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\dfrac{2x+2}{|x|-3}$; 2) $y=\ln(x^2-4)$; 3) $y=\sqrt{9-x^2}$;

2. Границі функції. Невизначеності

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x-2\cos x}{x^3-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x-2\cos x}{x^3-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+\sin x-2\cos x)}{\lim\limits_{x\to x_0}(x^3-1)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}x^2+\lim\limits_{x\to x_0}\sin x-2\lim\limits_{x\to x_0}\cos x}{\lim\limits_{x\to x_0}x^3-\lim\limits_{x\to x_0}1}=\frac{0+0-2}{-1}=2.$$

Приклад 4. Обчислити: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\left[\dfrac{const}{0}\right]=\infty$.

Якщо в результаті підстановки значення границі до виразу отримаємо одну із невизначеностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, то їх потрібно розкривати.

Приклад 5. Обчислити: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-4}{x^3-2x+3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. У подібних випадках необхідно в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь невідомого x і скоротити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-4}{x^3-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{2}{1}=2,$$

або, скориставшись правилом спрощеного обчислення, отримаємо той самий результат.

Приклад 6. Знайти вказану границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання. Підстановка числа $x = 1$ під знак границі приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо на (x – 1). Скорочення можливе, оскільки $x\to 1$ (прямує), але $x\neq 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x+6)}=\frac{2}{7}.$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; 4. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+3x^2)$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$; 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

ТЕМА № 7. Функції, границі, неперервність
Практичне заняття № 10. Неперервність фукції, точки розриву.
Навчальна мета заняття: Навчити курсантів досліджувати функції на неперервність, знаходити точки розриву.
Кількість годин - 2

Навчальні питання:
1. Дослідження функції на неперервність.
Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
3(с.42-120),**12(**с.161-206), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Дайте визначення неперервності функції в точці.
2. В яких точках неперервні елементарні функції?
3. В якій точці функція називається неперервною зліва (справа)?
4. В яких випадках виникають точки розриву?
5. Які точки називаються точками розриву I-го роду? Навести приклад.
6. Які точки називаються точками розриву II-го роду? Навести приклад.
7. Які точки розриву називаються усувними? Навести приклад.

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).
1. Дослідження функції на неперервність

Приклад 1. Знайти точки розриву функцій, якщо вони існують. Зробити ескіз графіка.

а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

Розв'язання. Функція визначається кількома аналітичними виразами. Така функція називається *кусково-неперервною.* Основні елементарні функції є неперервними у області свого визначення. Кожна з функцій, що входить до її аналітичного виразу, є неперервною в своїй області визначення. Точками можливого розриву графіка функції є ті, в яких змінюється аналітичний вираз, тобто точки $x=-1$ і $x=1$. Обчислимо односторонні границі в цих точках.

Для точки $x=-1$ маємо:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (x+4) = 3,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} (x^2+2) = 3.$$

Односторонні границі рівні між собою, тому в цій точці функція неперервна.

Для точки $x=1$ маємо:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2+2) = 3,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2x = 2.$$

Односторонні границі функції в точці $x=1$ існують, але не рівні між собою. Отже, ця точка є точкою розриву першого роду. Графік цієї функції зображено на рис. 1

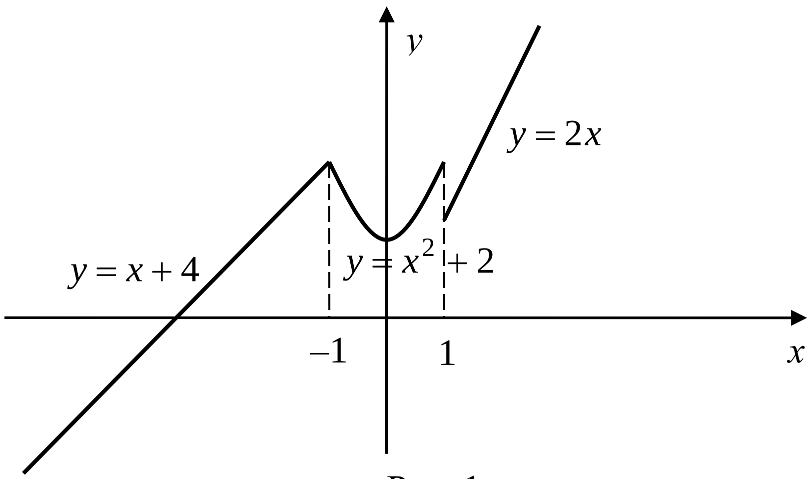


Рис. 1

б) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$.

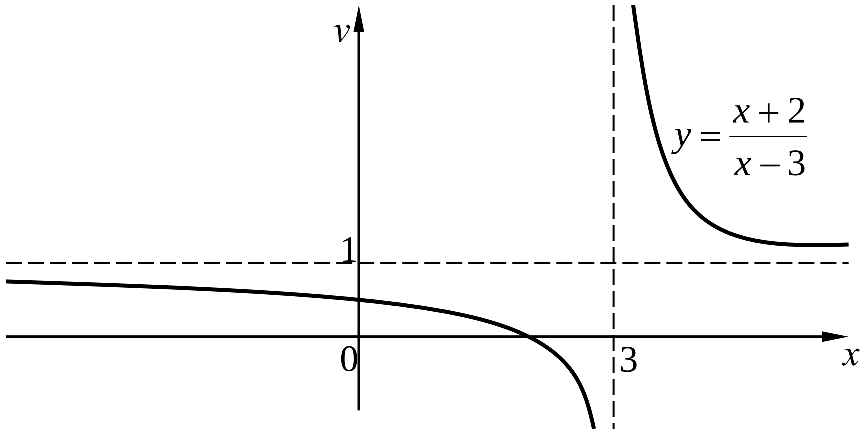
Розв'язання. Ця функція є дробово-раціональною. Вона неперервна всюди, де знаменник відмінний від нуля. У точці $x=3$ функція не визначена, і тому вона є точкою розриву. Обчислимо односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} \frac{x+2}{x-3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{x+2}{x-3} = +\infty.$$

Односторонні границі дорівнюють нескінченності, й тому $x=3$ – точка розриву функції II роду.

Для побудови графіка функції досліджуємо поведінку функції при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1.$$



Цей результат свідчить, що $y = 1$ – горизонтальна асимптота заданої функції.

в) $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$.

Розв'язання. Задана функція неперервна всюди, за винятком точки $x = -1$. Для з'ясування характеру розриву в цій точці знайдемо границі зліва і справа при $x \to -1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0, \qquad \text{оскільки} \quad \frac{1}{x+1} \to -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty, \qquad \text{оскільки} \quad \frac{1}{x+1} \to +\infty.$$

Отже, $x = -1$ – точка розриву функції другого роду, тому що границя справа дорівнює нескінченності. Границю зліва $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)$ називають *кутовою точкою графіка функції.*

Досліджуємо поведінку функції при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x+1}} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

Отже, y = 1 – горизонтальна асимптота заданої функції (рис. 2).

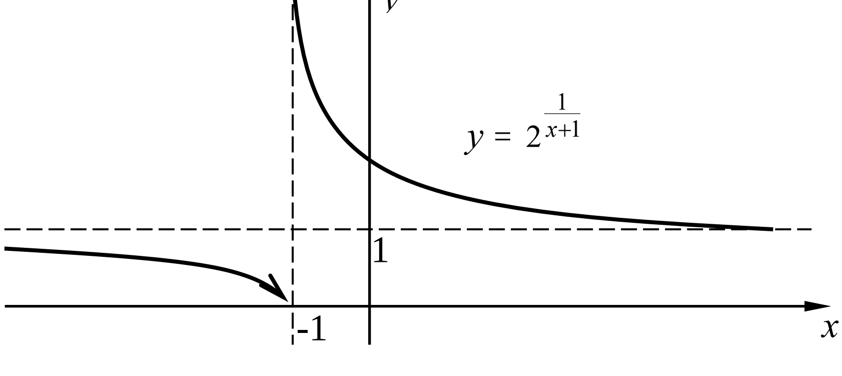


Рис.2

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1. Знайти точки розриву функцій, побудувати графіки:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{якщо } x\le 0, \\ 1+2x, \text{якщо } 0<x<2, \\ x-2, \text{якщо } x\ge 2 \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x+\pi, \text{якщо } x<-\pi, \\ \sin x, \text{якщо } -\pi<x\le 0, \\ 3-2x, \text{якщо } x>0 \end{cases}$

2. Задана функція $y = f(x)$ і два значення аргументу x_1 і x_2.

2.1. Установити, чи є ця функція неперервною або розривною для кожного з даних значень аргументу;

2.2. У випадку розриву функції знайти її односторонні границі.

а) $f(x)=3^{\frac{1}{2+x}}$; $x_1=0, x_2=-2$; б) $f(x)=6^{\frac{1}{4-2x}}$; $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$.

Тема № 8. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних.

Практичне заняття № 11. Похідна та диференціал.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів обчислювати похідні першого та другого порядку та диференціали.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Застосування правил диференціювання та таблиці похідних.
2. Похідна складеної функції.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

4(с.11- 50),**10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається приростом аргументу?
2. Що називається приростом функції?
3. Що називається похідною функції однієї змінної?
4. Які правила знаходження похідної ви знаєте?
5. Як обчислити похідну складеної функції?
6. Які функції називають складеними?
7. Які формули диференціювання Ви знаєте?
8. Ща таке похідна другого, третього порядку?
9. Що називається диференціалом функції однієї змінної?
10. Чому дорівнює диференціал аргументу цієї функції?

11. Як обчислити диференціал функції?
12. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Застосування правил диференціювання та таблиці похідних

Приклад 1. Обчислити похідну першого порядку заданої елементарної функції однієї змінної $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$;

Розв'язання. За допомогою формул дії над степенями ($\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$ і $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$) перетворюємо задану функцію до вигляду зручного для диференціювання.

$$y=\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{2-\frac{3}{4}}=x^{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}=x^{\frac{5}{4}};\qquad y'=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)'=\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}=\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}}=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}=\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}\,.$$

Приклад 2. Обчислити похідну другого порядку заданої елементарної функції однієї змінної $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$;

Розв'язання. $$y''=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)''=\frac{5}{4}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{5}{16}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

2. Похідна складеної функції.

Приклад 3. Обчислити похідну першого порядку заданої складеної функції $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, однієї змінної $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

$$y'=(\sqrt{x-\sqrt{x}})'=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot(x-\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}\,.$$

Приклад 4. Обчислити похідну другого порядку попередньої складеної функції $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, однієї змінної.

Розв'язання.

$$y'' = (\sqrt{x-\sqrt{x}})'' = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}\right)' = \frac{(2\sqrt{x}-1)'(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - (4\sqrt{x\sqrt{x}-x})'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - \frac{4}{2\sqrt{x\sqrt{x}-x}}(x\sqrt{x}-x)'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{x\sqrt{x}-x})\sqrt{x\sqrt{x}-x} - (x^{1+\frac{1}{2}}-x)'(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}-x}} = \frac{4(x\sqrt{x}-x) - (\frac{3}{2}\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x^2(\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

Приклад 5. Обчислити похідну першого порядку функції однієї змінної $y = arctg\frac{x}{3} + \ln 2x$ в точці $x = 3$.

Розв'язання. Застосовуємо формули $(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ і $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$.

$$y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' + \frac{1}{2x}\cdot(2x)' = \frac{9}{9+x^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{3}{9+x^2} + \frac{1}{x}.$$

Підставляємо в одержану похідну $x = 3$:

$$y'(3) = \frac{3}{9+3^2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{18} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити похідну другого порядку попередньої функції однієї змінної у точці $x = 3$.

Розв'язання.

$$y'' = \left(\frac{3}{9+x^2} + \frac{1}{x}\right)' = \left(3(9+x^2)^{-1} + x^{-1}\right)' = -3(9+x^2)^{-2}\cdot 2x - x^{-2} = -\frac{6x}{(9+x^2)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$y''(3) = -\frac{6\cdot 3}{(9+3^2)^2} - \frac{1}{3^2} = -\frac{18}{18^2} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{6}.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Знайти похідні: $y = 3 - 2\sqrt{x} + 6x^3$; $y = \ln x\cdot\sqrt[3]{x}$; $y = \sqrt[3]{x^2}$;

$y = \frac{x^3-5x}{8-2x^4}$; $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$; $y = x + ctg\frac{1}{x}$; $y = \frac{3}{x}\cdot\arcsin\frac{x}{3}$, $x = 1$; $y = \frac{\sqrt[4]{x}}{x}$; $y = \frac{1}{2}\ln(x^3-3)$;

$y = (x-3x^3)\sin 2x$, $x = \pi$; $y = arctg(2\sqrt{x})$; $y = (x-4x^2)tg4x$, $x = \frac{\pi}{16}$.

Тема № 8. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних.

Практичне заняття № 12. Монотонність функцій. Екстремуми функції.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити інтервали

монотонності, екстремуми функцій та найбільше і найменше значення її на відрізку.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Монотонність функцій
2. Екстремуми функції.
3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.
4. Опуклість та угнутість функції.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
4(с.71- 115),**10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:
1. Яка функція називається зростаючою на проміжку?
2. Яка функція називається спадною на проміжку?
3. Сформулюйте умову зростання (спадання) функції.
4. Що таке максимум функції?
5. Що таке мінімум функції?
6. Що називається екстремумом функції?
7. Які точки називаються критичними? Стаціонарними?
8. У яких точках може бути екстремум функції?
9. Сформулюйте необхідну умову екстремуму.
10. Сформулюйте достатні умови екстремуму.
11. В яких точках функція може набувати свого найбіль-шого та найменшого значень?
12. Яка функція називається опуклою (угнутою) на проміжку?
13. Які умови опуклості (угнутості) функції?
14. Які точки називаються точками перегину?
15. Як знайти точки перегину ?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Монотонність функцій.

Приклад 1. Знайти проміжки зростання та спадання функцій:

а) $y = x^3 - 12x + 11$; б) $y = 4x^3 - 42x^2 + 18x + 20$; в) $y = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$.

2. Екстремуми функції.

Приклад21. Знайти екстремуми функцій:

а) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$; б) $y=x^4-\frac{20}{3}x^3+8x^2$; в) $y=2x+3\sqrt[3]{(2-x)^2}$.

3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Приклад3. Знайти найбільше та найменше значення функцій на відрізку:

а) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-7x^2-24x+1$ на відрізку [-5;2] ; б) $y=xe^{-2x}$ на відрізку [0; 1].

4. Опуклість та угнутість функції.

Приклад43. Знайти інтервали опуклості та угнутості функції,
точки перегину:

а) $y=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$; б) $y=e^{-x}$ (крива Гауса).

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Знайти: а) Екстремуми функцій: 1) $f(x)=(x+3)^3(x-1)^2$;

2) $\frac{x^2+5}{2-x}$; 3) $f(x)=(3x+2)e^{3x}$.

б) Найбільше та найменше значення функцій: 1) $y=\frac{x^2-3x}{x-4}$ на відрізку [-1;3];

2) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ на відрізку $[0;\frac{3\pi}{2}]$.

Тема № 8. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних.
Практичне заняття № 13. Загальна схема дослідження функції.

Навчальна мета заняття: : навчити курсантів проводити
дослідження функції та будувати її графік

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання

1. Загальна схема дослідження функції
та побудова її графіка.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
5(с.15- 80),**10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів
(фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається областю визначення функції?
2. Що називається областю значень функції?
3. Які функції називаються парними, непарними?
4. Які функції називаються періодичними?
5. Як дослідити поведінку функції поблизу точок розриву?
6. Що таке асимптоти? Які вони бувають?
7. Як знайти вертикальні асимптоти? Горизонтальні?
8. Як знайти похилі асимптоти?
9. Сформулюйте загальну схему дослідження функції.

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв’язання задач).

1. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ та побудувати її графік.

Приклад 2. Дослідити функцію $y=\dfrac{e^x}{x}$ та побудувати її графік.

Приклад 3. Дослідити функцію $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$ та побудувати її графік.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Виконати дослідження функцій та побудувати їх графіки:

1) $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x}$; 2) $y=(x-2)\sqrt{x}$; 3) $y=x\ln x$; 4) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Тема № 8. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних. Практичне заняття № 14. Частинні похідні. Повний диференціал функції двох змінних. Мішані похідні, градієнт.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити частинні похідні, повний диференціал, мішані похідні, градієнт

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Частинні похідні.
2. Повний диференціал функції двох змінних.
3. Мішані похідні.
4. Похідна за напрямком. Градієнт.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

5(с.71- 115), **10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Дайте визначення функції двох змінних.
2. Що є областю визначення функції двох змінних?
3. Що є графіком функції двох змінних?
4. Що називається частинним приростом функції?
5. Що таке повний приріст функції?
6. Що називається частинною похідною?
7. Як обчислюється частинна похідна?
8. Запишіть формулу повного диференціала функції двох змінних.
9. Які похідні називаються мішаними?
10. Що називається скалярним полем?
11. Які лінії (поверхні) називаються лініями (поверхнями) рівня?
12. Що називається приростом аргументу (функції) за напрямком?
13. Дайте визначення похідної за напрямком.
14. Напишіть формулу похідної за напрямком для функції двох змінних (на площині).
15. Напишіть формулу похідної за напрямком для функції трьох змінних (у просторі).
16. Що називається градієнтом функції?
17. Напишіть формулу для обчислення градієнта.
18. Сформулюйте властивості градієнта.

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок
здобувачів освіти(розв'язання задач).

1. Частинні похідні.

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку:

1) $z = 3x^2 - 5xy^3 + 5y - 10$; 2) $z = \sin(4x - 2y + 3)$; 3) $z = e^{\frac{y}{x}}$; 4) $u = z^{xy}$;

5) $z = x^{\cos y}$; 6) $z = arctg\dfrac{x^2}{y}$; 7) $u = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Приклад 3. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ задовольняє рівняння

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

2. Повний диференціал функції двох змінних.

Приклад 4. Знайти повний диференціал і повний приріст функції
$z = 3x^2 + xy - y \ \ +1.$

б) частинні похідні: 1) $z = 5x^2 + 6xy$; 2) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$; 3) $z = \ln tg\frac{x}{y}.$

в) повний диференціал функції: 1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 2) $z = x + ye^{\frac{x}{y}}.$

3. Мішані похідні.

Приклад 5. Знайти всі частинні похідні другого порядку від функцій:
1) $z = xy$; 2) $z = e^{ax+by}$; 3) $z = \ln(x^2 + y^3)$; 4) $u = \sin(xyz)$; 5) $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}.$

4. Похідна за напрямком. Градієнт

Приклад 6. Знайти похідну функції $f(x) = x^2 - y^2$ у точці $M(1,1)$ за напрямком $\bar{l}$, що складає кут 60^0 з додатним напрямком осі Ox.

Приклад 7. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ у точці P_1(1;2;-1) за напрямком від точки P_1 до точки P_2 (2;4;-3).

Приклад 8. Знайти похідну функції $u = xz^2 + x^2y + y^2z$ в точці A(2; 1; –1) за напрямком вектору $\overline{a}$ (2; 1; 3) і градієнт функції в цій точці.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання:
а) частинні похідні: 1) $z = 5x^2 + 6xy$; 2) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$; 3) $z = \ln tg\frac{x}{y}.$

б) повний диференціал функції: 1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 2) $z = x + ye^{\frac{x}{y}}.$

в) Знайти мішані похідні другого порядку:
1) $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; 2); 2) $z = y^{\ln x}$; 3) $z = \arcsin(xy)$; 4) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}.$

г) Знайти похідну функції $f(x)$ в точці A за напрямком вектору $\overline{a}$ і градієнт функції в цій точці:
1) $u = x^2 + (y - z)^2$; A(–1; 3; 3); $\overline{a}$ (–2; 2; –1;
2) $u = x^2(y + z)^2$; A(1; 3; –2); $\overline{a}$ (–2; 4; –3).

Тема № 8. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних.
Практичне заняття № 15. Екстремум функції двох змінних.
Найбільше й найменше значення функції в замкненій області.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити екстремуми функції двох змінних і найбільше та найменше значення їх в замкненій області.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Екстремуми функції двох змінних.
2. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
5(с.81- 118),**10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:
1. Що таке максимум функції двох змінних?
2. Що таке мінімум функції двох змінних?
3. В яких точках може бути екстремум функції двох змінних?
4. Як знайти точки, в яких може бути екстремум?
5. Запишіть достатні умови екстремуму функції двох змінних.
6. Як знаходити найбільше та найменше значення функції двох змінних?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Екстремуми функції двох змінних

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язок. 1) Знаходимо критичні точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1, & y_1 = 1. \\ x_2 = 0, & y_2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} A(1,\ 1) \\ B(0,\ 0) \end{matrix}$$

2) Знаходимо значення похідних другого порядку в критичних точках:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

$$r\big|_A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_A = 6, \quad s\big|_A = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_A = -3, \quad t\big|_A = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_A = 6.$$

Отже, в точці A маємо $rt - s^2 = 27 > 0, \quad r > 0$. Точка A є точкою мінімуму, $z_{\min} = -1$.

$$r\big|_B = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_B = 0, \quad s\big|_B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_B = -3, \quad t\big|_B = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_B = 0.$$

$$rt - s^2 = -9 < 0 .$$

Згідно достатньої умови, у точці B екстремуму немає.

Приклад 2. Знайти екстремуми функцій:

a) $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$; *b*) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

2. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ у трикутнику з вершинами $O(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$.

Розв'язання. Тут область D – трикутник OBC.

1. Знайдемо критичні точки перших похідних функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$$

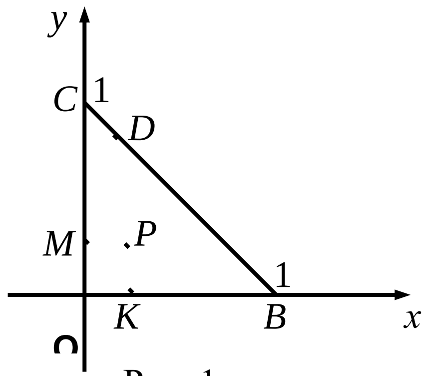


Рис. 1

Точка P знаходиться в середині трикутника OBC.Обчислимо значення функції в точці P:

$$z(P) = z\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

2. Знайдемо найбільше і найменше значення на стороні OB трикут-ника OBC. Для цього підставимо рівняння границі $y = 0$ в функцію z і в результаті маємо функцію однієї змінної $z = 3x^2 - 2x + 2$.

Критичні точки знаходимо з рівняння $z'(x) = 0$:

$$6x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad K\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$$

Отже, найбільше і найменше значення на стороні OB досягається або на кінцях відрізка, тобто в точках O і B, або в точці K. Підставляємо отримані координати в функцію.

$$z(K) = z\left(\frac{1}{3},\ 0\right) = \frac{5}{3}.$$

3. Знайдемо найбільше і найменше значення на стороні OC трикутника OBC. Для цього підставимо рівняння границі $x = 0$ в функцію z і в результаті маємо функцію однієї змінної $z = 3y^2 - 2y + 2$.

Критичні точки визначаємо з рівняння $z'(y) = 0$:

$$6y - 2 = 0 \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad M\left(0;\ \frac{1}{3}\right) \quad z(M) = z\left(0,\ \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

4. Знайдемо найбільше і найменше значення на стороні BC трикутника OBC. На ній $x+y=1$ $(0\le x\le 1)$ і $z=6x^2-6x+3$.

Критичні точки визначаємо з рівняння $z'(x)=0$:

$$12x-3=0 \quad \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow D\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right) \qquad z(D)=z\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)=\frac{30}{16}.$$

5. Обчислюємо значення функції в вершинах трикутника:

$z(O)=z(0,\ 0)=2$; $z(B)=z(1,\ 0)=3$; $z(C)=z(0,\ 1)=3$

Отже, $\sup\limits_{D} z=z(B)=z(C)=3$, а $\inf\limits_{D} z=z(P)=\dfrac{4}{3}$.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції

$z=8x^2+9y^2-16x$ в области, обмеженій лініями $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\le 1$, $0\le x\le 2$, $y\ge -1$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Знайти: *a*) екстремуми функцій:

1) $z=2xy-3x^2-2y^2+10$; 2) $z=x^3+y^3-3xy$.

b) найбільше і найменше значення функції $z=x^2+8y^2+4x$ в области, обмеженій лініями $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}\le 1$, $-1\le x\le 3$, $y\ge 1$.

Тема № 9. Невизначений інтеграл.

Практичне заняття № 16. Методи інтегрування.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів обчислювати найпростіші невизначені інтеграли.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Безпосереднє інтегрування.
2. Інтегрування заміною змінної.
3. Інтегрування частинами.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

8, 10(с.208-240), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань студентів (фронтальне опитування).

1. Сформулюйте означення первісної та невизначеного інтегралу
2. Назвіть властивості невизначеного інтегралу
3. Наведіть таблицю основних інтегралів

4. В чому полягає безпосереднє інтегрування?
5. У чому суть методу підстановки? Запишіть формулу інтегрування.
6. Напишіть формулу інтегрування частинами.
7. Які класи функцій можна інтегрувати частинами?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок студентів (розв'язання задач).

1. Метод безпосереднього інтегрування

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int (2x+1)^2\,dx.$

Розв'язання.

$$\int (2x+1)^2\,dx = \int \left(4x^2+4x+1\right)dx = 4\int x^2dx + 4\int xdx + \int dx = = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int (x+3)^8\,dx.$

Розв'язання. $\int (x+3)^8\,dx = \int (x+3)^8\,d(x+3) = \dfrac{(x+3)^9}{9} + C.$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \cos\dfrac{x}{2}\,dx.$

Розв'язання. $\int \cos\dfrac{x}{2}\,dx = 2\int \cos\dfrac{x}{2}\,d\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\sin\dfrac{x}{2} + C.$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}.$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{x}{x+5}\,dx.$

Розв'язання. $\int \dfrac{x}{x+5}\,dx = \int \dfrac{x+5-5}{x+5}\,dx = \int dx - 5\int \dfrac{dx}{x+5} = x - 5\ln|x+5| + C.$

2. Метод заміни змінної

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int x\sqrt{x-3}\,dx.$

Розв'язання. Замінимо $\sqrt{x-3}=t,$ звідки $x=t^2+3, dx=2tdt.$ Тоді маємо:

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int \left(t^2+3\right)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int \left(t^4+3t^2\right)dt = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{\cos x\sin x}.$

Розв'язання. $\int \dfrac{dx}{\cos x\sin x} = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x tgx} = \left[\begin{array}{l} tgx = t, \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array}\right] = = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tgx| + C.$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x}dx = \begin{bmatrix} \cos x = t, \ \sin x dx = -dt, \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{t^2 - 1}{t^4}dt = \int \frac{1}{t^2}dt - \int \frac{1}{t^4}dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

3. Метод інтегрування частинами

При застосуванні цього методу використовуємо формулу

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int (x+1)\sin x dx$.

Розв'язання.

$$\int (x+1)\sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x + 1 & du = dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -(x+1)\cos x +$$

$$+ \int \cos x\, dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C .$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int x^2 e^x dx$.

Розв'язання.

$$\int x^2 e^x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x & du = 2\, dx \\ dv = e^x\, dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C .$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Обчислити інтеграли: $\int ctg 7x dx$; $\int \frac{dx}{3x-7}$; $\int \cos(6-2x)dx$;

$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{x}}$; $\int \frac{x+1}{x^2-1}dx$; $\int x\sqrt[4]{x}dx$; $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$; $\int y\sqrt{3y^2+1}\,dy$; $\int xe^{x^2}dx$;

$\int x\cos x\, dx$; $\int \frac{\ln x}{x^2}$; $\int arctg\, x\, dx$.

Тема № 9. Визначений інтеграл.
Практичне заняття № 17. Визначений інтеграл.
Формула Ньютона – Лейбниця. Методи інтегрування.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів обчислювати визначені інтеграли.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Формула Ньютона – Лейбниця. Безпосереднє інтегрування.
2. Інтегрування заміною змінної, інтегрування частинами.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), методичні вказівки до проведення практичних занять.

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань студентів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Сформулюйте означення визначеного інтегралу.
2. Назвіть властивості визначеного інтегралу.
3. Напишіть формулу Ньютона – Лейбниця.
4. Як виконується заміна границь інтегралу у методі підстановки?
5. Напишіть формулу інтегрування частинами.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок студентів (розв'язання задач).

1. Формула Ньютона – Лейбниця. Безпосереднє інтегрування.

Приклад 1. Обчислити визначені інтеґрали: а) $\int_1^2 xdx$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Знаходимо первісну, а потім застосовуємо формулу Ньютона – Лейбниця:

а) $$\int_1^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

б) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

2. Інтегрування заміною змінної

Приклад 2. Обчислити визначений інтеґрал: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=\sin t & x=0 & t=0 \\ dx=\cos t dt & x=1 & t=\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеґрал: $\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\left|\begin{array}{lll}\sqrt{x+1}=t & x=3 & t=2\\ x=t^2-1 & x=8 & t=3\\ dx=2tdt & & \end{array}\right|=\int_2^3\frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int_2^3(t^2-1)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=\frac{32}{3}.$$

3. Інтегрування частинами

Приклад 4. Обчислити інтеґрал $\int_0^{\pi}x\cos xdx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\pi}x\cos xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{array}\right|=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=cosx\Big|_0^{\pi}=-2.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Обчислити інтеграли

$$\int_1^e\frac{6x}{3x^2-1}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}\sin x\,dx;\ \int_0^1 x^2(2x^3+4)^4dx;\ \int_4^{e+3}\frac{\ln(x-3)}{x-3}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\cdot\cos x\,dx;$$

Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^2+x-2$, $y=0$; 2) $y=-x^2+2x+8$, $y=0$.

Тема № 9. Визначений інтеграл.

Практичне заняття № 18. Застосування визначених інтегралів.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів обчислювати площі плоских фігур, об'єми тіл обертання, розв'язувати фізичні задачі.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Обчислення площ плоских фігур.
2. Довжина дуги кривої.

3. Обчислення об’ємів тіл обертання.
4. Фізичні застосування визначеного інтегралу.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань студентів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

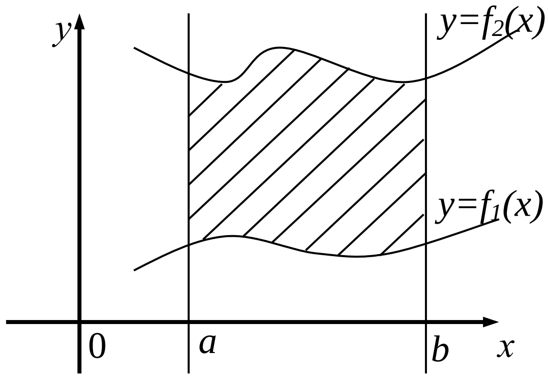
1. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?
2. Напишіть формули для обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу.
3. Напишіть формулу для обчислення довжини дуги кривої.
4. Напишіть формулу для обчислення об’єму тіла обертання.
5. Які ви знаєте фізичні застосування інтеграла?

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок студентів
(розв’язання задач).

1. Обчислення площ плоских фігур.

Якщо на $[a,\ b]$ функції $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ неперервні, то площа області, обме-женої знизу графіком функції $y=f_1(x)$, зверху – графіком функції $y=f_2(x)$, зліва – прямою $x=a$, справа – прямою $x=b$ обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx.$$

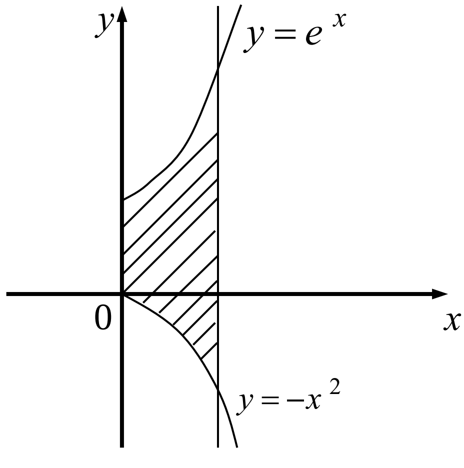


Приклад 1. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=-x^2$, $y=e^x$, віссю ординат і прямою $x=1$

Розв'язання.

$$S=\int_0^1\left[e^x-(-x^2)\right]dx=\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3}\quad \text{(кв.од.)}$$



Приклад 2. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої одною аркою циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ і віссю Оx.

Розв'язок. $S = \int\limits_0^{2\pi} 2(1-\cos t)2(1-\cos t)dt = 4\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$

$$= 4\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt == 4\left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi \text{ (кв. од.)}$$

2. Довжина дуги кривої

Якщо крива $y = f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ – гладка (тобто похідна $y' = f'(x)$ неперервна), то довжина відповідної дуги цієї кривої знаходиться за формулою

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^{\,2}}\,dx.$$

Приклад 3. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\sin x$ від $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язок. Знаходимо похідну $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$, тоді за формулою (4) маємо:

$$L = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + ctg^{\,2}x}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left| tg\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left| tg\frac{\pi}{6}\right| = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

3. Об’єм тіла обертання

Нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція змінної x, обертається навколо осі абсцис, описуючи деяку поверхню. Визначимо об'єм тіла обертання, утвореного цією поверхнею та двома площинами $x = a$ і $x = b$, що проходять перпендикулярно осі обертання $0x$. Об'єм тіла обертання визначається формулою:

$$V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 dx = \pi\int\limits_a^b f^{\,2}(x)dx$$

Приклад 5. Знайти об'єм сегмента параболоїда, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2px$ і $x = a$, навколо осі $0x$ (рис.3).

Розв'язок. Оскільки x змінюється від 0 до a, то

$$V_x = \pi\int\limits_0^a y^2 dx = \pi\int\limits_a^a 2pxdx = \pi px^2\Big|_0^a = \pi pa^2 \text{(куб. од.)}$$

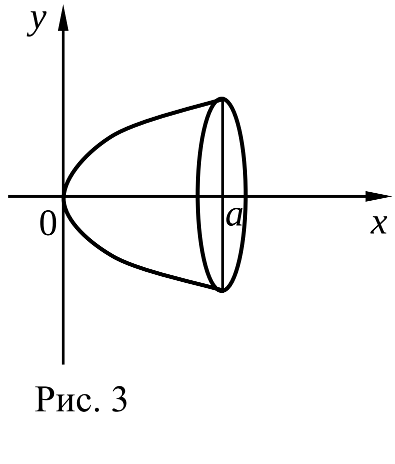


Рис. 3

4.Фізичні застосування інтеграла

Приклад 6. Гвинтова пружина стискається на *x (м)* пропорційно діючій силі *F (Н)*. Обчислити роботу, що виконує сила *F*, яка стискає пружину на 0,04 *м*. Для стискання пружини на 0,01 *м* потрібна сила 10*Н*.

Розв'язання. За законом Гука абсолютне подовження x пружини (в *м*) прямо пропорційне силі F (в *Н*): $F = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності.
За умовою $F=10Н$, $x=0{,}01м$, тому

$$k=\frac{F}{x}=\frac{10}{0{,}01}=1000\frac{Н}{м}\ ;\quad k=\frac{F}{x}\ \frac{10}{0{,}01}=1000\ \frac{Н}{м}$$

Робота виконана силою $F = f(x)$ при зміщенні по осі OX матеріальної точки від $x=a$ до $x=b$, визначається за формулою

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

За умовою $f(x) = kx$, *(k=1000, f(x)=1000x), a=0, b=0,04 м*

$$A=\int_0^{0{,}04}1000xdx=1000\int_0^{0{,}04}xdx=1000\frac{x^2}{2}\int_0^{0{,}04}=1000\frac{0{,}04^2}{2}$$

$$A=\int_0^{0{,}04}1000xdx=1000\int_0^{0{,}04}xdx=1000\frac{x^2}{2}\int_0^{0{,}04}=1000\frac{0{,}04^2}{2}=0{,}8\ Дж$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання: а) Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
1) $y=x^2+x-2$, $y=0$; 2) $y=-x^2+2x+8$, $y=0$.
б) Знайти довжину лінії:
1) $y=\ln x$ від $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$; 2) однієї арки циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.
3) Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням однієї арки синусоїди навколо осі *Ox.*

Тема № 10. Звичайні диференціальні рівняння.
Практичне заняття № 19. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв'язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Знаходження загального розвязку рівняння.
2. Знаходження частинного розвязку рівняння.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
16(1)(с.285-315,322-340), **12**(с.208-240), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Яке рівняння називається ДР першого порядку ?
2. Що називається розв’язком ДР?
3. Яка крива називається інтегральною кривою?
3. Що називається загальним розв’язком ДР?
4. Що називається частинним розв’язком?
5. У чому полягає задача Коші?
6. Напишіть загальний вигляд ДР з відокремлюваними змінними?
7. Який алгоритм розв’язання ДР з відокремлюваними змінними?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок студентів (розв’язання задач).

1. Знаходження загального розвязку рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $\cos y\, dy = 2x\, dx$.

Розв'язання. У цьому рівняння змінні вже відокремлені, тому його розв'язок

$$\int \cos y\, dy = \int 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad \sin y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin(x^2 + C).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x)y\, dx + (1-y)x\, dy = 0$.

Розв'язання. Розділяючи змінні, знаходимо:

$$\frac{(1+x)}{x}dx + \frac{(1-y)}{y}dy = 0, \quad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = C.$$

Інтеґруючи, дістаємо: $\ln|x| + x + \ln|y| - y = C$, або $\ln|xy| + x - y = C$. Останнє співвідношення є загальним інтеґралом даного рівняння.

2. Знаходження частинного розвязку рівняння.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 y\, dx + y^3 x\, dy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Розв'язання. Розділяючи змінні, знаходимо: $x\, dx + y^2\, dy = 0$. Інтегруючи, маємо:

$$\int x\, dx + \int y^2\, dy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C.$$

Одержали загальний інтеґрал вихідного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$. Для цього до загального розв'язку підставляємо початкову умову і визначаємо сталу C.

$$\frac{1}{3} = C - 0 \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{3}.$$

Потім, підставивши її значення до загального розв'язку, отримуємо частинний розв'язок, тобто розв'язок задачі Коші $y^3 = 1 - \frac{3}{2}x^2$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1. Знайти загальні розвязки ДР:

1.1 $x^2dx = 3y^2dy$; 1.2 $y^2dx + (x-2)dy = 0$; 1.3 $(1+y^2)dy$-$\sqrt{x}\,dx$;

1.4 $\sqrt{x}\,dy$=$\sqrt{y}\,dx$.

2. Знайти частинні розвязки рівнянь, що задовольняють указаним умовам:

2.1 $ydy = xdx$, $y(-2) = 4$; 2.2 $ds = (3t^2 - 2t)dt$, $s(2) = 4$.

Тема № 10. Звичайні диференціальні рівняння.

Практичне заняття № 20. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння І-го порядку

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв'язувати однорідні та лінійні диференціальні рівняння

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Однорідні рівняння І-го порядку.
2. Лінійні рівняння І-го порядку.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

8, 10(с.208-240), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Яке ДР рівняння називається однорідним?
2. Якою підстановкою розв'язується однорідне рівняння?
3. Яке ДР рівняння І-го порядку називається лінійним?
4. Якою підстановкою розв'язується лінійне рівняння?
5. Яке ДР рівняння І-го порядку називається рівнянням Бернуллі?
6. Якою підстановкою розв'язується рівняння Бернуллі?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок студентів

(розв'язання задач).

1. Однорідні рівняння І-го порядку.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Застосуємо підстановку $y = ux, \quad y' = u'x + u$. Підставляючи в рівняння, дістаємо $u'x + u = \dfrac{x^2 + u^2}{2u}$, або $\dfrac{du}{dx}x = \dfrac{1 - u^2}{2u}$. В цьому рівнянні змінні розділяються: $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Інтегруючи, маємо: $\ln C - \ln\left|1 - u^2\right| = \ln|x|$, звідки $|x|\left|1 - x^2\right| = C.$ Остаточно, $x\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right) = C.$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:

1) $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = xdy$; 2) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

3. Лінійні рівняння І-го порядку

Приклад 3. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = x^2$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння $x(u'v + uv') + uv = x^2$.

Зведемо це рівняння до системи : $\begin{cases} xv' + v = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо: $v' = -\dfrac{v}{x}, \quad \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}, \quad \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x},$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо: $xu'x^{-1} = x^2$, $u' = x^2$, $u = \int x^2 dx,\ u = \dfrac{x^3}{3} + c.$

Остаточно записуємо розв'язок: $y = uv,\ y = \left(\dfrac{x^3}{3} + c\right)x^{-1} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c}{x}.$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок лінійного рівняння:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = xe^x, y(1) = 0$; 2) $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = 0.$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1. Знайти загальні розвязки ДР:

а) $x^2 y' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$; б) $y'\operatorname{ctg} x + y = 1 - \sin x$; в) $y' - 2y = y^2 e^x$.

2. Знайти частинні розвязки рівнянь, що задовольняють указаним умовам:

а) $y' + y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$; б) $xy' - 2y = 2x^4$, $y(0) = 1$.

Тема № 10. Звичайні диференціальні рівняння.
Практичне заняття № 21. Лінійні диференціальні рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв'язувати лінійні диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Лінійні однорідні рівняння ІІ-го порядку.
2. Лінійні неоднорідні рівняння ІІ-го порядку.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Напишіть загальний вигляд лінійного ДР ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
2. Яке рівняння називається характеристичним для лінійного однорідного ДР зі сталими коефіцієнтами?
3. Як записати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?
4. Як записати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні?
5. Як записати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР, якщо корені характеристичного рівняння комплексні числа?
6. Як записати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння?
7. Як знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння в залежності від вигляду правої частини?
8. Як записати частинний розв'язок ЛНДР, якщо його права частина має вигляд $f(x) = P_n(x)$?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок студентів (розв'язання задач).

1. Лінійні однорідні рівняння ІІ-го порядку.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного ДР ІІ порядку:
1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 4y' = 0$; 3) $y'' + 6y' + 13y = 0$; 4) $y'' - 2y' + y = 0$.

2. Лінійні неоднорідні рівняння ІІ-го порядку.

Приклад 2. Знайти частинний розв’язок лінійного неоднорідного ДР ІІ-го порядку:
1) $y'' + y = 2x - 3$; 2) $y'' - 6y' + 9y = x^2 + x - 3$; 3) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x}$;
4) $y'' + 2y' + y = 2e^{x}$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання: 1. Знайти загальні розвязки однорідних ДР:
а) $y'' - 9y = 0$; б) $y'' + y = 0$; в) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; г) $4y'' + 4y' + y = 0$.
2. Знайти частинні розвязки неоднорідних рівнянь:
а) $y'' + 4y = x^2 - 2$; б) $y'' - y = 2e^{x}$; в) $y'' - 4y' + 5y = xe^{x}$.

Тема №11. Числові та функціональні ряди, розклад функцій у степеневі ряди, ряди Фур’є.
Практичне заняття № 22. Числові ряди.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів визначати збіжність чи розбіжність рядів за допомогою достатніх ознак збіжності.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Ознака Даламбера.
2. Радикальна ознака Коші.
3. Інтегральна ознака Коші.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.129-180), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:
1. Що називається числовим рядом? сумою ряду?
2. Який ряд називається збіжним? Розбіжним?
3. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності ряду.
4. Напишіть ряд – геометрична прогресія.
5. Напишіть гармонічний ряд.
6. Сформулюйте ознаку Даламбера.
7. Сформулюйте радикальну ознаку Коші.

8. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.
9. Який ряд називається узагальненим гармонічним рядом?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Ознака Даламбера

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера: маємо $a_n=\frac{n}{2^n}$,

$a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$. Знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1.$$

Даний ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Оскільки $u_n=\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$, то $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Обчислимо границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot 5^n\cdot n!}=5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{5}{e}>1$.

Отже, заданий ряд розбіжний за ознакою Даламбера.

2. Радикальна ознака Коші.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\arcsin\left(\frac{n+3}{2n+5}\right)\right]^n}==\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+3}{2n+5}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}<1.$$

Робимо висновок, що ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші, тобто знайдемо границю $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1;$$

отже, даний ряд за радикальною ознакою Коші розбігається.

3. Інтегральна ознака Коші.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (*узагальнений гармонічний ряд*).

Розв'язання. Скористуємося інтеґральною ознакою Коші. Зробивши заміну n на x у загальному члені $a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$, будемо мати $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^{A}=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}A^{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{-1+\alpha}, & \alpha>1 \ \text{збіжний},\\ \infty, & \alpha<1 \ \text{розбіжний}.\end{cases}$$

При $\alpha=1$: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{1}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\ln|x|\Big|_1^{A}=\lim_{A\to\infty}(\ln A-\ln 1)=\infty$. Ряд розбіжний.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Дослідити на збіжність наступні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2+2n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}$.

Тема №11. Числові та функціональні ряди, розклад функцій у степеневі ряди, ряди Фур'є.

Практичне заняття № 23. Знакочережні ряди. Степеневі ряди.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів визначати збіжність знакопочережних рядів, радіус та інтервал збіжності степеневих рядів. Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Знакопочережні ряди.
2. Степеневі ряди.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
16(2)(с.129-180), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Який ряд називається знакозмінним?
2. Який ряд називається знакопочережним?
3. Сформулюйте ознаку Лейбниця.
4. Який ряд називається функціональним?
5. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
6. Які ряди називаються абсолютно збіжними?
7. Які ряди називаються умовно збіжними?
8. Які ряди називаються степеневими?
9. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?
10. Що є областю збіжності степеневого ряду?
11. Як визначити збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів
(розв'язання задач).

1. Знакопочережні ряди.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Розв'язок. Перша умова ознаки Лейбніца виконується: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$ Так як $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то виконана і друга умова. Отже, даний ряд збіжний.

Складемо ряд з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отримали гармонічний ряд, який розбіжний. Отже, даний ряд умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Степеневі ряди.

Приклад 3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$.

Розв'язання.

Тут $u_n=\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$, $u_{n+1}=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$. Тоді маємо

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|(x-3)^{n+1}\right|n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\left|(x-3)^n\right|}==|x-3|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)3}=\frac{1}{3}|x-3|$. Отже, інтервал збіжності визначається із нерівності $\frac{1}{3}|x-3|<1$, $|x-3|<3 \Rightarrow$ $0<x<6$. Інтервал збіжності $x\in(0,\ 6)$.

Приклад 4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots$$

Розв'язання.

Маємо $c_n=\frac{1}{n}, c_{c+1}=\frac{1}{n+1}$

Знайдемо радіус збіжності ряду: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

Отже, ряд збігається для значень x в інтервалі (-1,1).

Приклад 5. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}(x-2)^n$.

Розв'язання. Маємо $a_n=\frac{5^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$. Тоді

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n(n+1)!}{n!\,5^{n+1}}=\infty$. Даний ряд є збіжним при будь-якому x.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Дослідити на збіжність знакопочережні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

2) Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n \frac{3n}{4n^2+3}$.

Тема №11. Числові та функціональні ряди, розклад функцій у степеневі ряди, ряди Фур’є.

Практичне заняття № 24. Розкладання функцій у степеневі ряди і ряди Фур’є.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розкладати функції у степеневі ряди і ряди Фур’є.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Ряди Тейлора і Маклорена.
2. Ряди Фур’є.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

10(с.129-180), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Який ряд називається рядом Тейлора?
2. Як обчислюються коефіцієнти Тейлора?
3. Який ряд називається рядом Маклорена?
4. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції e^x.
5. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції $\sin x$.
6. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції $\cos x$.
7. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$.
8. Напишіть біноміальний ряд.
9. Коефіцієнти і ряди Фур’є.

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв’язання задач).

1. Ряди Тейлора.

Приклад 1. Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями $(x – a)$:

1) $f(x) = 4x^3 – x^2 – x + 5$; a=1; 2) $f(x) = x^4 – 3x^2 + x – 1$; a=-1; 3) $f(x) = e^x$; a=2.

2. Ряди Маклорена.

Приклад 2. Розкласти функцію в ряд Маклорена:

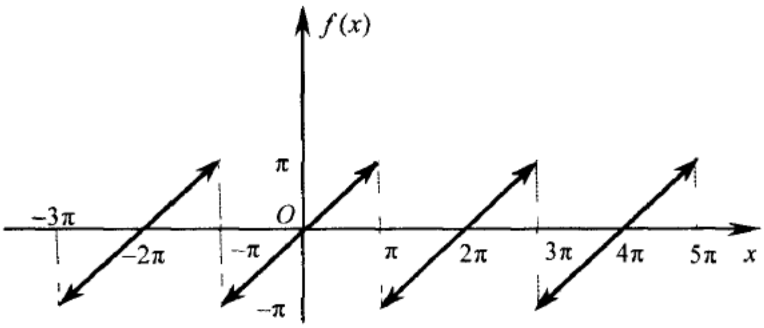
1) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$; 2) $f(x)=e^{-x^2}$; 3) $f(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x^2}$.

3. Ряди Фур'є.

1. Розкладання функцій в ряди Фур'є

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ з періодом 2π, задану на інтервалі $-\pi\le x\le\pi$ формулою $f(x)=x$.

Розв'язання. Графік цієї функції та її продовження на всю числову вісь зображено на рисунку:



Для знаходження коефіцієнтів Фур'є застосуємо формули (4).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi n}\left(-2\pi\cos n\pi+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=-\frac{2(-1)^n}{n}$; Таким чином, $a_0=a_n=0, b_n=-\frac{2(-1)^n}{n}$. Отже, ряд Фур'є нашої функції має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2(-1)^n}{n}\sin nx=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями $(x-a)$:
а) $f(x)=x^3-2x-3$; $a=2$; б) $f(x)=x^3-2x^2-6x-2$; $a=-2$.

2) Розкласти функцію в ряд Маклорена:

а) $f(x)=x\sin 2x$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

3)Розкласти в ряд Фур'є функції:

а) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, x\in[-\pi;\,0)\\ -3x, x\in[0;\,\pi)\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x+5, x\in[-\pi;\,0)\\ x-\dfrac{\pi}{6}, x\in[0;\,\pi)\end{cases}$.

Тема №12. Подвійні та потрійні інтеграли, властивості, обчислення. Практичне заняття № 24. Обчислення кратних інтегралів.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів обчислювати подвійні і потрійні інтеграли.
Кількість годин - 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Зведення кратних інтегралів до повторних та їх обчислення.
2. Застосування кратних інтегралів.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
10(с.158-167, 178-190), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Що називається подвійним інтеґралом від функції $f(x,y)$ по області D?
2. У чому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла?
3. Сформулюйте основні властивості подвійного інтеґрала.
4. Як обчислюються подвійні інтеграли?
5. Які інтеграли називають внутрішнім і зовнішнім у двократному інтеґралі?
6. Чи можуть бути межі інтеґрування у внутрішньому інтеґралі сталими?
7. Розкажіть про застосування подвійних інтегралів.
8. Що називається потрійним інтеґралом від функції $f(x,y,z)$ по області *V*?
9. Сформулюйте основні властивості потрійного інтеґрала.
10. Як обчислюються потрійні інтеграли?

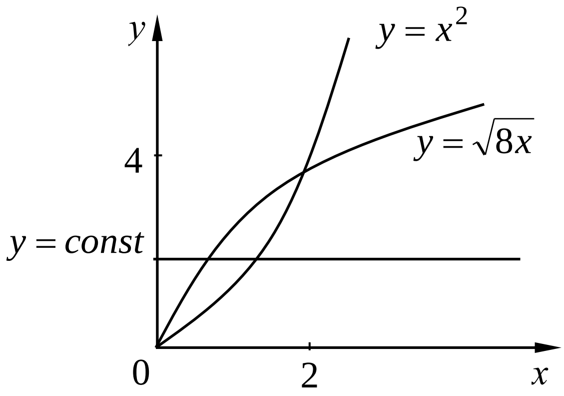
ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Зведення подвійного інтеграла до повторного та його обчислення.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеґрал $\iint\limits_D xy^2dxdy$ по області D, обмеженій лініями $y=x^2$, $y=\sqrt{8x}$.

Розв'язок. Визначимо межі інтеґрування по змінній *x*. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{8x} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{8x} \Rightarrow x^4 = 8x \;\Rightarrow$$



$$x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x\left(x^3 - 8\right) = 0; \;\; x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$

$: \; a = 0; \quad b = 2$

$$\varphi_1(x) = x^2; \quad \varphi_2(x) = \sqrt{8x}$$

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^2 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} y^2 dy$$

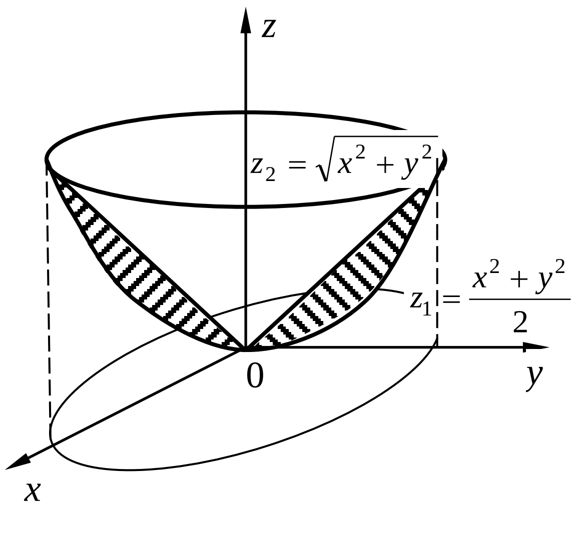
Спочатку обчислюємо внутрішній інтеґрал

$$1) \quad \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^{\sqrt{8x}} = \frac{1}{3}\left(16\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - x^6\right).$$

Після його обчислення ми отримали функцію змінної *x*. Обчислюємо зовнішній інтеґрал

$$2) \quad \frac{1}{3}\int_0^2 \left(16\sqrt{2}x^{\frac{5}{2}} - x^7\right)dx = \frac{1}{3}\left.\left(\frac{32}{7}\sqrt{2}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^8}{8}\right)\right|_0^2 = 13\frac{5}{7}.$$

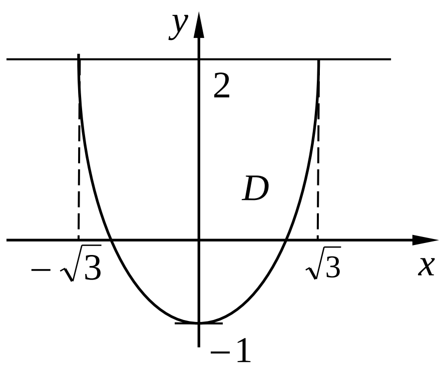
Приклад 2. Звести потрійний інтеґрал $I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ до повторного, якщо область *V* обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.



Розв'язок. Знаходимо межі інтеґрування в області *D*. Для цього розв'яжемо систему рівнянь параболоїда і конуса:
$z^2 - 2z = 0$, $z = 0$, $z = 2$. Тоді рівняння межі області *D* має вигляд $x^2 + y^2 = 4$. Це круг, радіус якого $r = 2$. Таким чином, потрійний інтеграл зводиться до повторного:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dz.$$

2. Застосування подвійного інтеграла.



Приклад 3. Обчислити площу області, обмеженої прямою $y = 2$ і параболою $y = x^2 - 1$.
Розв'язок. Визначимо межі інтеґрування за змінною x.

$$x^2 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^{2} dy = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)dx = 4\sqrt{3}$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання: 1) Обчислити подвійний інтеграл по області D:

а) $\iint_D \left(x^3 + y^3\right)dxdy$; D: $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $x = 2$; б) $\iint_D \frac{x}{y}dxdy$; D: $y = x$, $y = \frac{x}{3}$, $x = 1$.

2) Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями:
а) $y = 1 - x$, $y = x - 1$, $y = x + 1$; б) $y = 4 - x^2$, $y = x - 2$.
3) Обчислити потрійний інтеграл по області V:

$\iiint_V (2x^2 + 3y + z)dxdydz$, V: $2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$;

Тема №13. Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула Остроградського.
Практичне заняття № 26. . Криволінійні та поверхневі інтеграли,

Навчальна мета заняття: навчити курсантів обчислювати криволінійні та поверхневі інтеграли.
Кількість годин - 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Обчислення криволінійних інтегралів ІІ-го роду.
2. Обчислення поверхневих інтегралів.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9, 10(с.158-167, 178-190), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Що називається криволінійним інтегралом І-го роду?

2. Що називається криволінійним інтегралом II-го роду?
3. Сформулюйте основні властивості криволінійного інтеґрала.
4. У яких випадках можна обчислити криволінійний інтеграл?
5. Як обчислити площу фігури за допомогою криволінійного інтеграла?
6. Як обчислити роботу змінної сили за допомогою криволінійного інтеграла?
7. Які бувають поверхні?
8. Що називається поверхневим інтегралом I-го роду?
9. Що називається поверхневим інтегралом II-го роду?
10. Як поверхневий інтеґрал I-го роду зводиться до подвійного?
11. Як поверхневий інтеґрал II-го роду зводиться до подвійного?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Обчислення криволінійних інтегралів II-го роду.

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$ вздовж прямої $y = 2x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2,4)$.

Розв'язок.

$$\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy = \int\limits_0^2 (x \cdot 2x - 4x^2 + x \cdot 2)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (2x - 2x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_L (2 + xy^2)dx + (x^2 y - 3)dy$, де L – дуга еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки $A(-2,0)$ до точки $B(2,0)$.

Розв'язок. Запишемо параметричне рівняння еліпса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$. Знайдемо нові межі інтеґрування: $\left.\begin{cases} x = -2; \ \cos t = -1; \ t = \pi \\ x = 2; \quad \cos t = 1; \quad t = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$\int\limits_L (2 + xy^2)dx + (x^2 y - 3)dy =$$

$$= \int\limits_\pi^0 \left[(2 + 2\cos t \cdot 9\sin^2 t)\sin t + (4\cos^2 t \cdot 3\sin t - 3)3\cos t \right] dt =$$

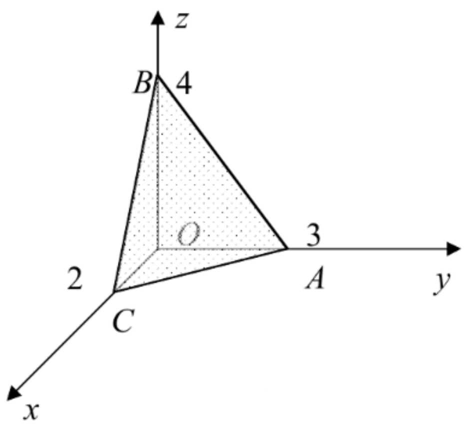
$$=\int_{\pi}^{0}(36\cos^3 t\sin t-9\cos t-4\sin t-36\sin^3 t\cos t)dt=$$

$$=\left(-9\cos^4 t-9\sin t+4\cos t+9\sin^4 y\right)\Big|_{\pi}^{0}=8.$$

2. Зведення поверхневого інтеграла до подвійного.

Приклад 1 Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$, де σ – частина площини, що лежить у першому октанті.

Розв'язання Зведемо поверхневий інтеграл I–го роду до подвійного інтегралу по плоскій області D в площині xOy. Для цього спроектуємо $\sigma: 6x+4y+3z=12$ на площину xOy. Одержимо ΔAOC, який і буде областю D, він обмежений прямими $x=0, y=0$ та $y=\frac{6-3x}{2}$ Щоб знайти елемент $d\sigma$ виразимо z як функцію від x і y з рівняння поверхні $6x+4y+3z=12$. Отримаємо $z=4-2x-\frac{4}{3}y$. Тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=-2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4}{3}$.



Звідси $d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy.$

Врахуємо формулу (4), де

$$F\left(x,y,z(x,y)\right)=z+2x+\frac{4}{3}y=4-2x-\frac{4}{3}y+2x+\frac{4}{3}y=4.$$

Таким чином,

$$\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma=\iint\limits_{D}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\int_0^{\frac{6-3x}{2}}dy=$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx\, y\Big|_0^{\frac{6-3x}{2}}=\frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2\frac{6-3x}{2}dx=\frac{2\sqrt{61}}{3}\left(6x-3\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=4\sqrt{61}.$$

Отже, відповідь $\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma=4\sqrt{61}.$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Обчислити криволінійний інтеграл:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,$ де L_{AB} – дуга $y = x^2$ між точками $A(-1;\ 1)$ та $B(1;\ 1)$; б) $\oint\limits_{L} (x+2y)dx + (x-y)dy,$ де L – коло $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ в додатному напрямку обігу;

2) Обчислити поверхневий інтеграл І-го роду,якщо σ – частина площини α, що лежить між координатними площинами: $\iint\limits_{\sigma} d\sigma, \alpha : x + y + z = 3$

Тема № 14. Комбінаторика. Ймовірність подій
Практичне заняття № 27. Комбінаторика. Ймовірність подій.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв’язувати комбінаторні задачі, а також застосовувати класичну формулу ймовірності.
Кількість годин - 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Формули комбінаторики.
2. Класичне визначення ймовірності.
3. Геометрична ймовірність.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
11(с.22-24), **2** (с.28-38), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що вивчає комбінаторика?
2. Що називається перестановкою? За якою формулою вона обчислюється?
3. Що називається розміщенням? За якою формулою воно обчислюється?
4. Що називається сполукою? За якою формулою вона обчислюється?
5. Назвіть 2 правила комбінаторики.
6. Які бувають події?
7. Які події називаються несумісними? Наведіть приклад.
8. Які події утворюють повну групу?
9. Які події називаються протилежними?
10. Які події називаються рівноможливими?

11. Що таке ймовірність події?
12. Напишіть класичну формулу ймовірності.
13. В яких границях змінюється ймовірність?
14. В чому полягають недоліки класичної формули?
15. Що називається статистичною ймовірністю? Напишіть формулу.
16. Що називається геометричною ймовірністю? Напишіть формулу.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Формули комбінаторики.

Приклад 1. Скількома способами можна скласти список з 7 курсантів?

Приклад 2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 0,1,2,3, використовуючи кожну з них тільки один раз?

Приклад 3. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких різні і парні?

Приклад 4. Скількома способами можна вибрати капітана та його заступника з 12 гравців команди?

Приклад 5. На площині розміщені 25 точок так, що ніякі три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

Приклад 6. Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких – різні прості числа не більші за 20?

Приклад 7.На одній із двох паралельних прямих позначено 9 точок, а на іншій — 16. Скільки існує опуклих чотирикутників з вершинами в цих точках?

Приклад 8. На вершину гори ведуть 10 доріг. Скількома способами можна спочатку піднятися на гору, а потім спуститися з гори?

Приклад 9. Скількома способами з 9 членів екзаменаційної комісії можна обрати голову,його заступника і секретаря?

Приклад 10.На столі у секретарки лежать 10 ручок і 12 олівців. Для того щоб швидко записати нотатку, вона навмання вибирає або ручку, або олівець. Скількома способами вона може це зробити?

2. Класичне визначення ймовірності.

Приклад 11. Кидають дві однакові монети. Яка ймовірність того, що випадуть: а) два герба; б) герб і цифра?

Приклад 12.Яка ймовірність, що навмання вибране двозначне число ділиться на 12?

Приклад 13. Із слова ПАРАМЕТР навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру Р?

Приклад 14. У шухляді лежать 20 олівців, причому три з них — чорні, вісім — червоні, а решта — жовті. Із цієї шухляди беруть навмання один олівець. Яка ймовірність того, що він буде не чорним і не червоним?

Приклад 15. У ящику знаходилися 45 кульок, з яких 17 білих. Загубили дві не білих кульки. Яка ймовірність того, що навмання витягнута кулька буде білою?

Приклад 16. Пофарбований куб розміром 10х10х10 розрізали на 1000 маленьких кубиків. Навмання беруть один кубик. Яка ймовірність того, що:

1) будуть пофарбовані 3 грані;
2) будуть пофарбовані 2 грані;
3) буде пофарбована 1 грань;
4) жодна грань не буде пофарбована.

Приклад 17. У коробці лежать 64 цукерки, причому частина з них у жовтих обгортках, а частина — у синіх. Знайдіть кількість цукерок у жовтих обгортках, якщо ймовірність витягти навмання з цієї коробки одну цукерку в синій обгортці дорівнює 0,625.

3. Геометрична ймовірність.

Приклад 18. У правильному трикутнику зі стороною 3 навмання вибрано точку. Знайдіть імовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей трикутник круга.

Приклад 19. У крузі радіуса 5 навмання вибрано точку. Знайдіть імовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей круг квадрата.

Приклад 20. Учителька зобразила на дошці відрізок [-3;2] і попросила учня навмання позначити на цьому відрізку якусь точку. Яка ймовірність того, що відстаньвід цієї точки до початку координат буде меншою за 1?

Приклад 21. Нитку однакової товщини завдовжки 50 см розривають двома руками. Яка ймовірність того, що довжина шматка нитки, який після розриву залишитьсяу правій руці, буде не більшою за 20 см?

Приклад 22. У прямокутному трикутнику *ABC* (кут $C = 90°$, $AC = \sqrt{3}$ *см, BC* = 8 см) навмання вибирають точку *O.* Яка ймовірність того, що градусна міра кута *OAC* не перевищує 60°?

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Розв'язати задачі:

1. Кинуто дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що сума цифр на гранях, що випали – парна, причому на грані хоча б однієї кістки з'явиться шістка.
2. На складі є 15 кінескопів, причому 10 з них виготовлені Львівським заводом. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання кінескопів виявляться три кінескопи Львівського заводу.
3. Монету кинуто два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться «герб».
4. У ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання витягнуто чотири деталі. Знайти ймовірність того, що серед витягнутих деталей: а) немає бракованих; б) немає придатних

5. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри й, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

Тема № 15. Операції над подіями.
Практичне заняття № 28. Основні теореми теорії ймовірностей. Формула повної ймовірності. Формули Бейеса. Схема Бернуллі.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів застосовувати основні теореми теорії ймовірностей, формулу повної ймовірності та формули Бейеса, формулу Бернуллі
Кількість годин - 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Теореми додавання та множення ймовірностей.
2. Формула повної ймовірності, формули Бейеса.
3. Схема Бернуллі.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
11(с.31-54), **2** (40-54), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається сумою двох подій?
2. Які події називаються несумісними?
3. Чому дорівнює ймовірність суми несумісних подій?
4. Які подіїї утворюють повну групу?
5. Які події називаються протилежними?
6. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
7. У чому полягає принцип практичної неможливості малоймовірних подій?
8. Що називається добутком двох подій?
9. Що таке умовна ймовірність?
10. Сформулюйте теорему про ймовірність добутку двох подій.
11. Які події називаються незалежними?
12. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї події?
13. Напишіть формулу повної ймовірності.
14. Напишіть формули Бейеса.
15. Для чого застосовують формули Бейеса?
16. Повторення випробувань. Схема Бернуллі.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Теореми додавання та множення ймовірностей.

Приклад 1. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючі сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює, складає 0,95 для першого сигналізатора й 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.
Приклад 2. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця складає 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі в мішень влучає а) тільки один стрілець; б) обидва стрільці; в) хоча б один із стрільців.

2. Формула повної ймовірності, формули Бейеса

Приклад 3. Нехай в одному із трьох ящиків знаходиться 3 білих і 2 чорних кулі, у другому - 2 білі й 3 чорних, у третьому - тільки білі кулі. З навмання обраного ящика витягають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона білого кольору.
Приклад 4. На двох автоматичних верстатах виготовляються однакові валики. Імовірність виготовлення валика вищого сорту на першому верстаті дорівнює 0,95 , а на другому - 0,80. Виготовлені на обох верстатах не розсортовані валики перебувають на складі, серед них валиків, виготовлених на першому верстаті, у три рази більше, ніж на другому. Визначити ймовірність того, що навмання взятий валик виявиться вищого сорту.
Приклад 5. В умовах ***Приклада 3***, обрана з ящика куля виявилася білого кольору. Знайти ймовірність того, що куля була взята із третього ящика.
Приклад 6. В умовах ***Приклада 4,*** взятий навмання валик виявився вищого сорту. Визначити ймовірність того, що він зроблений на першому верстаті.

3. Схема Бернуллі.

Приклад 7. До магазину зайшли 8 покупців. Ймовірність того, що будь-який з них не піде з магазину без покупки, дорівнює 0,4. а) Знайти ймовірність того, що троє з покупців дещо куплять. б) Яка ймовірність того, що жоден з них нічого не купить?
Приклад 8. У процесі виробництва ймовірність дефектів у кожній партії продукції складає 0,1. Яка ймовірність того, що з десяти партій дефекти будуть мати менше двох партій?
Приклад 9. Серед 5 студентів проводиться психологічний тест на визначення типу характеру людини. Ймовірність того, що за результатами тестування буде правильно визначено тип характеру кожної людини, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що буде правильно визначено тип характеру лише трьох протестованих студентів.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Розв’язати задачі:

1. На двох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі: на першій — 30 %, на другій — 70 %. Ймовірність виготовлення стандартної деталі на першій лінії дорівнює 0,9, на другій — 0,5. Усі виготовлені на цих лініях деталі надходять на склад. а) Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь зі складу є стандартною. б) Навмання вибрана на складі деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена на першій лінії.

2. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність помилки для першого економіста дорівнює 0,1, для другого — 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий — 60. Під час перевірки у навмання взятому з папки документі виявили помилку. Знайти ймовірність того, що документ складав перший економіст.

3. Робітник обслуговує одночасно 3 верстати. Ймовірність порушення роботи протягом години для першого дорівнює 0,1, для другого — 0,2, для третього — 0,2. Яка ймовірність того, що: а) усі три верстати працюватимуть протягом години; б) хоча б один із них вийде з ладу?

4. Оглядову лекцію мають прослухати 100 студентів. Ймовірність бути присутнім на лекції для кожного студента дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що на лекцію прийде більше половини студентів.

5. Знайти ймовірність того, що серед 100 осіб буде не більше 40 брюнетів, якщо близько 30 % населення — брюнети.

Тема №16. Випадкові величини.
Практичне заняття № 29. Закони розподілу дискретних випадкових величин.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів застосовувати закони розподілу для розв’язання ймовірнісних задач.
Кількість годин - 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Закони розподілу дискретних випадкових величин.
2. Числові характеристики ДВВ.

Літератури, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
14с.65-74), **2** (70-84), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називають випадковою величиною?
2. Що називають функцією розподілу ймовірності випадкової

величини $F(x)$?

3. Назвіть основні властивості функції розподілу ймовірностей $F(x)$?
4. Яка випадкова величина називається дискретною?
5. Яким чином можна задати дискретний розподіл випадкової величини?
6. Як побудувати многокутник розподілу випадкової величини?
7. Чому має дорівнювати сума всіх значень ймовірностей p_i дискретного розподілу випадкової величини?
8. В яку чверть декартової системи координат графіки функцій розподілу ймовірностей випадкової величини ніколи не попадають?
9. Які є основні види дискретних розподілів ймовірностей?
10. Що називається математичним сподіванням ДВВ? Напишіть формулу для його обчислення.
11. Що називається дисперсію? Середнім квадратичним відхиленням?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Закони розподілу дискретних випадкових величин.

Приклад 1. Нехай випадкова величина X дорівнює кількості номерів, угаданих гравцем у лотереї «6 із 39». Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Знайти значення функції розподілу в точці $x = 3$.

Розв'язання. Випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл. Процес розіграшу можна змоделювати так: у лототроні (ящику) міститься $N = 39$ однакових за фізичними властивостями кульок, серед яких $S = 6$ «білих» (так можна називати кульки з виграшними номерами) і $N - S = 33$ «чорних». Вважатимемо, що кульки добре перемішані, тобто рівномірно витягнути можна будь-яку з наявних кульок. Тому можна вважати, що із 39 кульок навмання виймається $m = 6$ шт. Тоді X — це кількість «білих» кульок серед шести вибраних (номерів, які загадані гравцем). Очевидно, випадкова величина X набуває значень від 0 до 6, причому

$$P(X = i) = \frac{C_6^i \cdot C_{33}^{6-i}}{C_{36}^6}.$$

Виконавши підрахунки для $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, отримаємо таблицю:

i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1107568}{3262623}$	$\frac{1424016}{3262623}$	$\frac{613800}{3262623}$	$\frac{109120}{3262623}$	$\frac{7920}{3262623}$	$\frac{198}{3262623}$	$\frac{1}{3262623}$

Значення функції розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X у точці $x = 3$.

$F_X(3) = P\{X < 3\} = P\{X = 0$ або $X = 1$ або $X = 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} +$
$+ P\{X = 2\}$.

Оскільки виграшними вважають лотерейні квитки, у яких не менше 3 вгаданих номерів, то ймовірність нічого не виграти, заповнивши один лотерейний квиток, дорівнює

$$\frac{1107568}{3262623}+\frac{1424016}{3262623}+\frac{613800}{3262623}\approx 0{,}9641$$

Приклад 2. Нехай X — випадкова величина, що дорівнює кількості хлопців у навмання вибраній сім'ї з трьома дітьми. Вважаючи народження хлопця й дівчини рівноймовірними подіями, побудувати ряд розподілу та многокутник розподілу ймовірності випадкової величини X, а також обчислити ймовірність того, що в сім'ї буде більше хлопчиків, ніж дівчаток.

2. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Приклад 4. Випадкова величина X має ряд розподілу, наведений у таблиці

X_i	1	2	3
P_i	0,2	0,5	0,3

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Приклад 5. Нехай випадкова величина X дорівнює кількості номерів, угаданих гравцем в лотереї «6 із 39». Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення розподілу випадкової величини X.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Розв'язати задачі:

1. Два стрільці роблять по одному незалежному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого — 0,5. Знайти ряд розподілу і многокутник розподілу випадкової величини X — кількості влучень у мішень, ймовірність того, що кількість влучень дорівнюватиме кількості промахів, а також знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення розподілу випадкової величини X.
2. Нехай X — випадкова величина, яка дорівнює кількості випадань грані «6» при двох підкиданнях кубика. Побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу та функцію розподілу випадкової величини X, а також графік цієї функції (вважати випадання кожної цифри рівноймовірним).
3. Гральний кубик підкидається до першої появи п'ятірки. Випадкова величина X — кількість підкидань кубика. Знайти ряд розподілу випадкової величини X і найімовірнішу кількість підкидань за умови рівноймовірності випадання кожної цифри.

Тема №17. Статистичний аналіз і оцінка похибок вимірювання. Практичне заняття № 30. Елементи теорії кореляції.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів складати рівняння прямої лінії регресії.

Кількість годин - 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Визначення параметрів вибіркового рівняння регресії за незрупованими даними.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
11(с.253-256), **2**(258-260), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

1. Яка залежність називається статистичною?
2. Яка залежність називається кореляційною?
3. Що таке умовна середня?
4. Яке рівняння називають вибірковим рівнянням регресії?
5. Що розуміють під прямою регресією? Вигляд рівняння.
6. Як обчислити коефіцієнт кореляції?
7. Які значення може приймати коефіцієнт кореляції?
8. Які бувають види нелінійної кореляції?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Визначення параметрів вибіркового рівняння регресії за незгрупованими даними.

Приклад 1. За допомогою метода кореляційно – регресійного аналізу визначити наявність та характер статистичного зв'язку між ознаками «вік обладнання» та «витрати на ремонт» Вихідні дані та проміжні розрахунки наведені в таблиці.

Таблиця. Вік обладнання та витрати на ремонт для групи підприємств

№№ п/п	Вік обладнання, р. (x)	Витрати на ремонт тис.грн.(y)	x^2	y^2	xy	Y
1	4	1,5	16	2,25	6,0	0,868
2	5	2,0	25	4,0	10,0	1,479
3	5	1,4	25	1,96	7,0	1,479
4	6	2,3	36	5,29	13,8	2,09
5	8	2,7	64	7,29	21,6	3,312
6	10	4,0	100	16,0	40,0	4,534

7	8	2,3	64	5,29	18,4	3,312
8	7	2,5	49	6,25	17,5	2,7
9	11	6,6	121	43,56	72,6	5,145
10	6	1,7	36	2,89	10,2	2,09
Разом	70	27	536	94,78	217,1	27,01

За даними таблиці обчислюємо параметри рівняння за формулами (3):

$$a = \frac{27 \cdot 536 - 217{,}1 \cdot 70}{10 \cdot 536 - 70 \cdot 70} = -1{,}576\,, \quad b = \frac{10 \cdot 217{,}1 - 70 \cdot 27}{10 \cdot 536 - 70 \cdot 70} = 0{,}611.$$

Оскільки $b>0$, зв’язок між віком обладнання та витратами на ремонт прямий. Лінійне рівняння регресії буде мати такий вигляд:

$$Y = -1{,}576 + 0{,}611x\,.$$

Останній стовпчик таблиці (теоретичні значення Y) розраховуємо після знаходження рівняння регресії, підставляючи в нього значення x. Далі обчислюємо лінійний коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{10 \cdot 217{,}1 - 70 \cdot 27}{\sqrt{\left(10 \cdot 94{,}78 - 27^2\right)\left(10 \cdot 536 - 70^2\right)}} = \frac{281}{317{,}25} = 0{,}88\,.$$

Це означає, що між віком обладнання та витратами на ремонт існує досить тісний прямий зв’язок. Знаходимо коефіцієнт детермінації $R^2 = r^2 \approx 0{,}783$ (тобто 78,3% загальної варіації витрат на ремонт залежить від варіації віку обладнання).

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Розв’язати задачу:

1. За вибіркою

x_i	1,1	2,1	3,0	4,0	5,0	6,0
y_i	1,5	1,9	2,4	3,4	4,5	4,9

знайти рівняння прямої лінії регресії y на x. Побудувати графіки експериментальних даних та лінії регресії.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.

2. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика ; 5-те вид. : навчальний посібник . – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.

3. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І.

Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
4. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
5. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
6. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
7. Семенов В.О., Ляшенко В.П. та інші. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с.

Додаткова

8. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.
9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

10. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html]
11. Жильцов О.Б.Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб.— К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. - 336 с.http://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/13578/1/O_Zhyltsov_KUBG_TY_UN.pdf
12. Федоров М.В., Хренов О.М. Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 68 с. https://docviewer.yandex.ua/view/14307034/?page=3&*=OMbtom834MHYY%2B0pcflKdrchzlx7 }]