

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

**з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Технології робіт та технологічне обладнання аеропортів**

за темою – Інтегральне числення

Харків 2022

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 26.09.2022 № 9

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 19.09.2022 № 2

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 23.09.2022 № 9

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол
від 12.09.2022 № 3

.

Розробник: викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст
вищої категорії Гусарова О.В.

Рецензенти:

1. Завідувач відділення фахової підготовки навчального відділу КЛК ХНУВС,
старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної
техніки КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист
Владов С. І.
2. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного
університету імені Михайла Остроградського, к.т.н., доцент Черниш А.А.

План лекцій

1. Інтеграл. Властивості.
2. Визначений інтеграл.
3. Подвійний інтеграл, його геометричний зміст. Властивості.
4. Обчислення подвійних інтегралів.
5. Потрійний інтеграл і його обчислення.
6. Застосування подвійних та потрійних інтегралів.

Рекомендована література:

Основна

1. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський

державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf

14. <https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na>

Текст лекції

1. Інтеграл. Властивості.

Функція $F(x)$ має назву первісної для $f(x)$ на інтервалі (a, b) , якщо $F(x)$ має похідну $x \in (a; b)$ та $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F'(x) = f(x)$, то і $(F(x) + C)'$ також буде дорівнювати $f(x)$, бо $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$, або від виразу $f(x)dx$, є сукупність первісних виду $F(x) + C$, тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Процес знаходження первісної називається інтегруванням.

Невизначений інтеграл не має геометричного змісту. Операція інтегрування розглядається як обернена до операції диференціювання.

Теорема 1

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона має первісну.

У подальшому будемо розглядати підінтегральні функції тільки на відрізках їх неперервності, тому теорема звільняє від необхідності кожного разу досліджувати умови існування інтеграла. Інтеграли, які ми розглядаємо, існують. При цьому існують елементарні функції, первісні яких не виражаються за допомогою скінченного числа елементарних функцій.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Невизначений інтеграл від суми скінченного числа функцій дорівнює сумі інтегралів від функцій.

5. Сталий множник можна винести за знак інтеграла: $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$.

6. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, C = const.$$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – диференційована функція, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Таблиця інтегралів

Таблиця основних інтегралів впливає із означення невизначеного інтеграла і таблиці похідних. Справедливість формул легко перевірити диференціюванням.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1), \int 1 \cdot dx = x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$18. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$19. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$20. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$21. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

2. Визначений інтеграл.

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

У кожному проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ оберемо довільну точку ξ_k і обчислимо відповідне значення функції $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Побудуємо суму $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$, яку називають інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Визначення. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, незалежна від способу ділення відрізка $[a, b]$ на частини та добору точок ξ_k , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$.

Математично це означення можна записати так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Відмітимо, що числа a та b називають нижньою та верхньою межами інтегрування, відповідно.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ або обмежена і має скінчену кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$.

Властивості визначеного інтеграла

Із означення та основних теорем про границі впливають такі властивості:

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла, тобто якщо A – стала, то $\int_a^b A \cdot f(x) dx = A \cdot \int_a^b f(x) dx$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожного доданку, тобто

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_m(x)] dx =$$

$$\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \dots \pm \int_a^b f_m(x)dx.$$

3. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

для будь-якої функції $f(x)$.

5. Якщо $f(x) \leq \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

6. Якщо m та M – найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

7. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, $a < \xi < b$

8. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; $a < c < b$

Формула Ньютона-Лейбніца

Формула Ньютона-Лейбниці являється потужним засобом обчислення визначених інтегралів, бо за допомогою цієї формули можна обчислити визначені інтеграли для всіх функцій, для яких ми можемо знайти невизначені інтеграли.

Теорема 4. Якщо функція $F(x)$ є будь-якою первісною для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a, b]$, то має місце формула Ньютона-Лейбниці:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають $F(x) \Big|_a^b$, а формулу Ньютона–

Лейбниці записують так: $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

3. Подвійний інтеграл, його геометричний зміст. Властивості.

Кратні інтеграли дозволяють розглядати кількісні характеристики просторових об'єктів, наприклад, площу криволінійної поверхні, об'єм тіла або його масу, площу плоских фігур, які є функціями від двох або трьох

незалежних змінних.

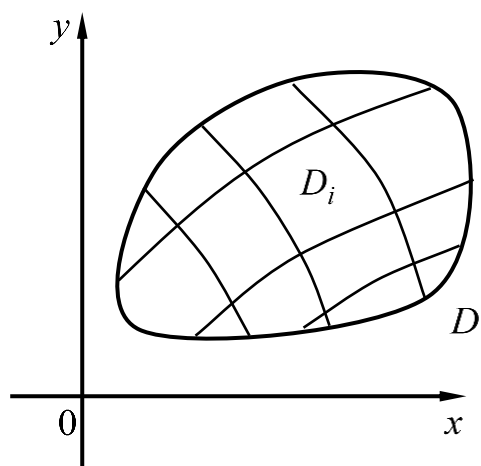


Рис. 1

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області D площини xOy . Розіб'ємо область D довільними лініями на n елементарних областей D_i , що мають площі $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, а діаметри (найбільша відстань між точками області) – через d_i (рис.1).

У кожній елементарній області виберемо довільну точку $P_i(x_i, y_i)$, помножимо значення функції $f(P_i)$ у кожній із цих точок на площу відповідної елементарної області $\Delta\sigma_i$ і складемо суму всіх таких добутків. Ця сума називається *двовимірною інтегральною сумою*

функції $f(x, y)$ по області D .

$$f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \dots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i. \quad (1)$$

Визначення. Границя двовимірної інтегральної суми функції $z = f(x, y)$ по області D , яка не залежить ні від способу розбиття області D на елементарні області $\Delta\sigma_i$, ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i)$ усередині них, якщо найбільший з діаметрів d_i елементарних областей прямує до нуля, називається *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x, y)$ по області D і позначається

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i, \quad (2)$$

де D – область інтегрування – частина площини xOy , $z = f(x, y)$ – функція двох незалежних змінних, а під подвійним інтегралом розуміється число.

Якщо область D розбивати на елементарні області прямими, паралельними осям координат, то площа однієї елементарної області знаходиться як площа прямокутника зі сторонами dx і dy : $d\sigma = dxdy$. Тому подвійний інтеграл у декартовій системі координат записують у вигляді

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dxdy. \quad (3)$$

Геометричний зміст подвійного інтеграла

Нехай дана поверхня $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – неперервна в деякій області D функція. Тіло, обмежене частиною поверхні $z = f(x, y)$, площиною xOy та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , а напрямною слугує межа області D у площині xOy , називається *циліндроїдом* (рис. 2).

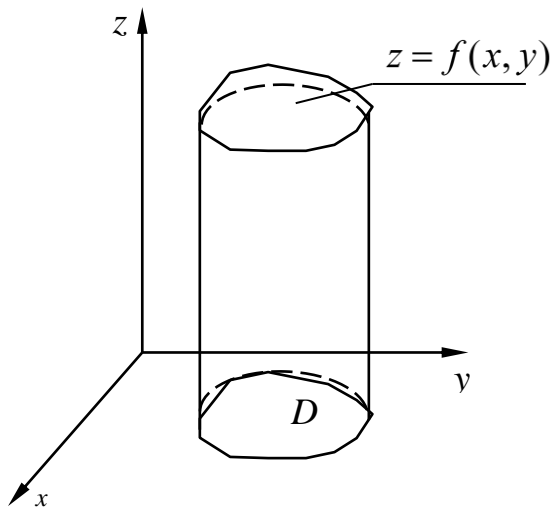


Рис. 2

Подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$ у такому разі визначає об'єм циліндроїда.

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma, \quad (4)$$

де D – проекція поверхні $z = f(x, y)$ або її частини на площину xOy , а $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні, що обмежує тіло.

Якщо в (4) підінтегральна функція $f(x, y) = 1$, то подвійний інтеграл визначає площу області інтегрування D у площині xOy .

Властивості подвійного інтеграла

1. Сталій множник виноситься за знак подвійного інтеграла

$$\iint_D C f(x, y) d\sigma = C \iint_D f(x, y) d\sigma. \quad (6)$$

2. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів цих функцій

$$\iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] d\sigma = \iint_D f_1(x, y) d\sigma \pm \iint_D f_2(x, y) d\sigma. \quad (7)$$

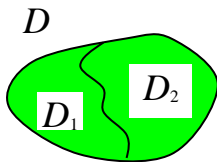


Рис. 3

3. Якщо область інтегрування розбити на частини, то подвійний інтеграл по всій області дорівнює сумі подвійних інтегралів від усіх її частин (рис.3).

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \quad (8)$$

4. Обчислення подвійних інтегралів.

Нехай маємо інтеграл по довільній плоскій фігурі. Якщо область інтегрування D обмежена кривою, яку кожна пряма, паралельна осі Oy , перетинає не більш ніж у двох точках, то подвійний інтеграл, поширений на цю область, обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (9)$$

Інтеграл у правій частині формули (9) також називається *повторним* або *двократним*.

При обчисленні внутрішнього інтегралу в підінтегральній функції $f(x, y)$ змінну x також потрібно розглядати як сталу величину.

5. Потрійний інтеграл і його обчислення.

Нехай неперервна функція $f(M) = f(x, y, z)$ задана в обмеженій замкненій області V . Розіб'ємо цю область довільними поверхнями на n елементарних областей V_1, V_2, \dots, V_n . У кожній частині виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і обчислимо значення функції в цій точці $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$. Об'єм кожної частини позначимо ΔV_i . Складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i.$$

Визначення. *Потрійним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області V називається границя інтегральної суми за умови, що найбільший із діаметрів d_i елементарних областей прямує до нуля:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(M_i) \Delta V_i. \quad (10)$$

Ця границя не залежить ні від способів розбиття області V на елементарні

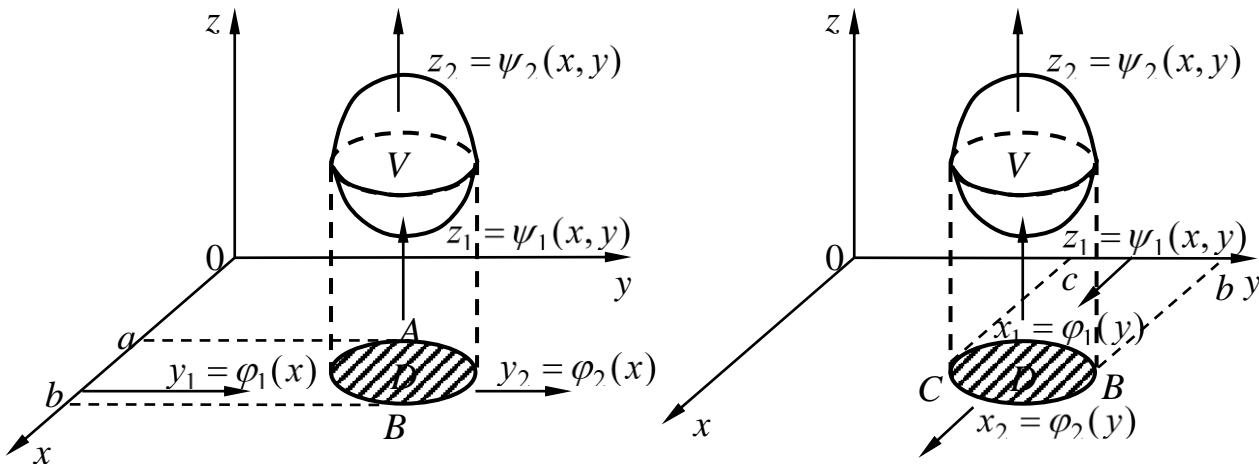


Рис. 6

області, ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i, z_i)$ усередині них. Якщо така границя існує, то функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою по області V .

У декартовій системі координат область V зручно розбивати на елементарні області площинами, паралельними площинам координат. У цьому випадку елементарні області – паралелепіпеди. Отже, елемент об'єму $dV = dxdydz$, тому потрійний інтеграл у декартовій системі координат має вигляд:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz. \quad (11)$$

Якщо область V обмежена зверху поверхнею $z = \psi_2(x, y)$, знизу поверхнею $z = \psi_1(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz . Тоді

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (12)$$

де D_{xy} – проекція області V на площину xOy (рис. 6).

Тоді обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення визначеного інтеграла від підінтегральної функції по одній із змінних при довільних фіксованих значеннях двох інших і обчисленню подвійного інтеграла від отриманої функції.

Подвійний інтеграл у правій частині рівності (12) зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Замінюючи в (11) $dv = dxdydz$, отримаємо ще одну формулу для обчислення потрійного інтеграла за допомогою повторних інтегралів

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (13)$$

6. Застосування подвійних та потрійних інтегралів.

Площину плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла визначається за формулою

$$S = \iint_D dxdy.$$

Приклад 3. Обчислити площу області, обмеженої прямою $y = 2$ і параболою $y = x^2 - 1$ (рис.8).

Розв'язання. Визначимо межі інтегрування за змінною x .

$$x^2 - 1 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^2 dy = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = 4\sqrt{3}$$

Застосування подвійного інтеграла до задач механіки

Якщо D – частина площини xOy , зайнята матеріальною фігурою з щільністю $\gamma(x, y)$, то:

1) *маса фігури D* обчислюється за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dxdy; \quad (14)$$

2) *статичні моменти M_x і M_y фігури D щодо координатних осей Ox і Oy* – за формулами

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y) dxdy, \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y) dxdy; \quad (15)$$

3) *координати центра тяжіння* – за формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}; \quad (16)$$

Приклад 4. Знайти координати центра

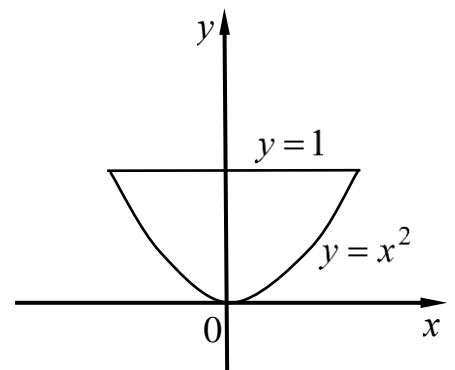


Рис. 9

тяжіння пластинки, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$, якщо щільність розподілу маси у кожній точці дорівнює ординаті цієї точки (рис. 9).

Розв'язання. Знайдемо спочатку масу пластинки. Оскільки $\gamma(x, y) = y$, то з формули (14),

$$m = \iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{5}.$$

Використовуючи формули (15), обчислимо статичні моменти пластинки відносно всіх осей:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \cdot y dx dy = \iint_D y^2 dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y^2 dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1 - x^6) dx = \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{7}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D xy dx dy = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 y dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x - x^5) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Тепер за формулами (16) знаходимо координати центра тяжіння: $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5/7$

Контрольні питання:

1. Означення інтеграла.
2. Основні властивості інтегралу.
3. Означення визначеного інтегралу.
4. Означення подвійного інтегралу.
5. Означення потрійного інтегралу.
6. Застосування подвійного інтегралу.
7. Застосування потрійного інтегралу