МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кафедра кібербезпеки та DATA-технологій
Факультет №6

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з навчальної дисципліни «Дискретна математика»
обов’язкових компонент
освітньої програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
125 «Кібербезпека»
(«**Безпека інформаційних та комунікаційних систем**»)

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол *від 21.12.23 № 11*

СХВАЛЕНО
Вченою радою факультету № 6
Протокол від *20.12.23 №11*

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол *від 21. 12.23 № 11*

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних кібербезпеки та DATA-технологій (*протокол від 15.12.2023р. №12*)

Розробники:

1. *професор кафедри д.т.н., Можаєв Олександр Олександрович*
2. *професор кафедри д.е.н. Лучик Василь Єфрімович*

Рецензенти:

1. *Професор кафедри обчислювальної техніки та програмування НТУ ХПІ, д.т.н., професор Кучук Г. А.*
2. *Доцент кафедри штучного інтелекту ХНУРЕ, к.т.н., доцент Чала Л. Є.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Номер та назва змістового модулю, номер та найменування теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		Лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр 3							
ТЕМА № 1. Основні поняття теорії множин	14	4		2	2	6	
ТЕМА № 2.Відношення та відображення	14	4		2	2	6	
ТЕМА № 3. Алгебра логіки. Нормальні форми	16	4		2	2	8	
ТЕМА № 4 Мінімізація формул алгебри логіки	16	4		2	2	8	
ТЕМА № 5. Елементи комбінаторного аналізу.	14	2		2	2	8	
ТЕМА № 6. Основні поняття теорії графів	16	4		2	2	8	
Всього за семестр 3	**90**	**22**		**12**	**12**	**44**	**Екзамен**

Методичні вказівки до практичних занять
Тема № 1:Основні поняття теорії множин.
Практичне заняття №1.
Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з теорії множин; вироблення навичок Розв'язок задач теорії множин.
Кількість годин - 2.
Місце проведення – навчальна аудиторія
Навчальні питання:

1. Поняття множини, підмножини, елемента множини.
2. Способи Приклад множин.
3. Рівні множини. Скінченні та нескінченні множини, зліченні та незліченні множини. Потужність множини. Універсальна та порожня множина.
4. Рівні та еквівалентні множини.
5. Булева алгебра множин. Операції над множинами та їх властивості. Тотожні перетворення формул алгебри множин.
6. Кола Ейлера. Запис аналітичної формули для множини, яка задана колами Ейлера. Графічне зображення множини по заданій аналітичній формулі.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Яковлєв С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. ”Дискретна математика”, Харків: Изд. ХНУВС, 2018. – 88с.
3. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с.
4. Таран Т.А. Основы дискретной математики. Учебное пособие. - Киев: Просвита, 2013. - 288 с.
5. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учбовий посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2017. – 29 с.
6. Множини. : Методичні вказівки до виконання практичних занять з дисципліни „Комп'ютерна дискретна математика” для студентів базового напряму „Програмна інженерія”/ Укл.: П. В. Сердюк – Львів:

Видавництво Національного університету „Львівська політехніка”, 2013. – 35 с.
7. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. .
[Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf

План проведення заняття: І. Порядок проведення вступу до заняття.
Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.
ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.
Розв’язування прикладів за темою заняття.
Приклад 1. Зобразити множини

$A = \{x \mid x \in R, -1 \le x < 4\}$ та $B = \{x \mid x \in R, 2 \le x \le 6\}$ на числовій прямій. Виконати операції: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$ Записати результат кожної операції із зазначенням характеристичної властивості.

Розв’язок.

$A = \{x \mid x \in R, -1 \le x < 4\} = [-1;4)$

$B = \{x \mid x \in R, 2 \le x \le 6\} = [2;6]$

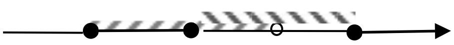
1) .

-1 2 4 6 x

Якщо зобразити множини А та В на числовій прямій, то об'єднання є частина осі, де є хоча б одне штрихування, тобто

$A \cup B = [-1;6] = \{x \mid x \in R, -1 \le x \le 6\}$.

2) Перетин множин $A \cap B$ та частина осі, де є подвійне штрихування, тобто



-1 2 4 6 x

$A \cap B = [2;4) = \{x \mid x \in R, 2 \le x < 4\}$.

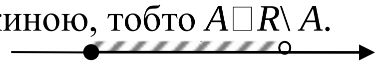
3) Різниця $A \setminus B$ є частина множини А, що позначена лише одним штрихуванням, тобто

-1 2 4 6 x

$A \setminus B = [-1;2) = \{x \mid x \in R, -1 \le x < 2\}$.

Точка $x = 2 \in B$ и тому $2 \notin A \setminus B$.

4) Знайдемо $\bar{A}$, вважаючи множину всіх дійсних чисел універсальною множиною, тобто $\bar{A} = R \setminus A$.



Доповнення множини А є частина осі, де

-1 4 x немає штрихування, тобто

$\bar{A} = (-\infty;-1) \cup [4;+\infty) = \{x \mid x \in R, \quad x < -1 \quad \text{або} \quad x \ge 4\}$.

Точка *x*□□1□*A* , так як *x*□□1□*A*, точка *x*□ 4□*A*, так як *x*□ 4□*A* .

Приклад 2. Знайти перетин, об'єднання, різницю множин А і В, якщо а) А = {1;0;3;4}, В = {0;4;6} та б) А = [0;2], В=[1;5]. Розв'язок.

а) А = {-1;0;3;4}, В = {0;4;6} А□В = {-1;0;3;4;6}. А□В = {0;4}. А\В = {-1;3}; В\А={6} б) А = [0;2], В=[1;5].

А□В = [0;5]

А□В = [1;2]

А\В = [0;1); В\А = (2;5] Приклад 3.

Одним із найпоширеніших та найпростіших способів є зображення множин за допомогою бітових рядків. Нехай універсальна множина *U* містить *n* елементів.

Упорядкуємо довільним способом елементи універсальної множини. Тоді *U* □□*a a a*1 2, , 3,...*a*$_{n□1}$,*a*$_n$□.

Множину *A*□*U* зображають у комп'ютері рядком із 0 та 1 довжини *n* так: якщо a_i □*A*, то *i*-й біт дорівнює 1, якщо a_i □*A*, то *i*-й біт дорівнює 0.

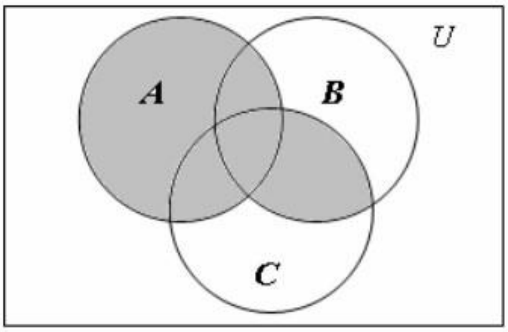
Нехай *U* □□*a b c d e f m n p q r s*, , , , , , , , , , , □, *A*□□*b m n q r*, , , , □, *B* □□*a b f m q*, , , , □. Тоді множину А зобразимо рядком 010000110110, а множину *B* – рядком 110001100100.

Після представлення множин у вигляді бітових рядків, легко робити операції над ними, адже це будуть порозрядні логічні операції над відповідними рядками.

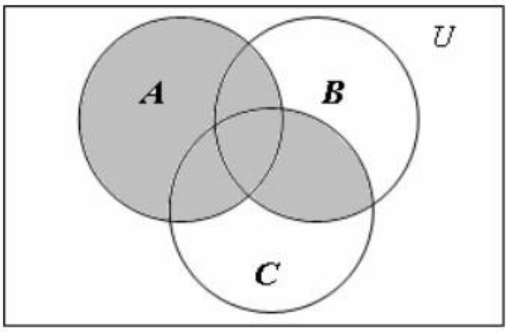
Наприклад, перетин множин – це порозрядна кон'юнкція над бітовими рядками, а об'єднання множин – порозрядна диз'юнкція над бітовими рядками.

Приклад 4. Довести тотожність за допомогою діаграм Ейлера – Венна: А□(В□С)=(А□В)□(А□С) Розв'язок:

Для цього накреслимо відповідні круги області Ейлера-Венна для лівої та правої частин тотожності й з'ясуємо збігаються вони чи ні. Якщо області збігаються, то тотожність справедлива, а при розбіжності вона не має місця



$A\cup(B\cap C)$

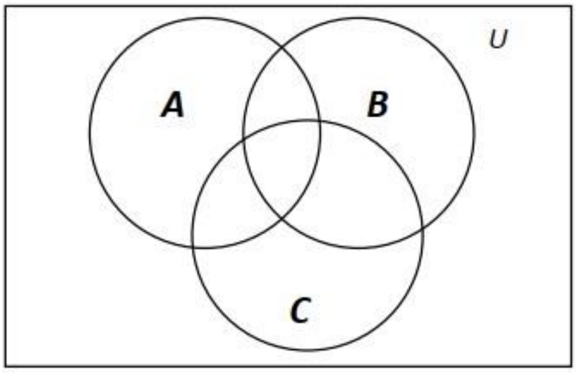


$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Круги Ейлера-Венна для доведення тотожності

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

Приклад 5. На діаграмі Ейлера-Венна 3-х множин А, В, С

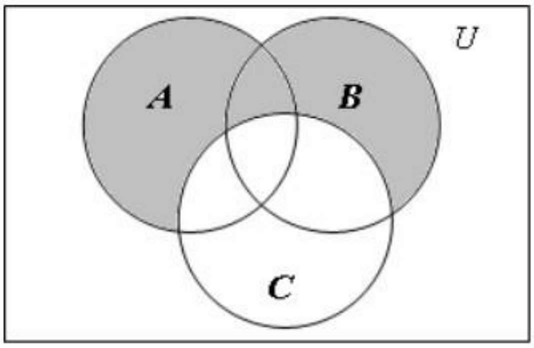


указати точки, що належать множині $((A \cup B)\backslash C) \cap \overline{A}$

Розв’язок:

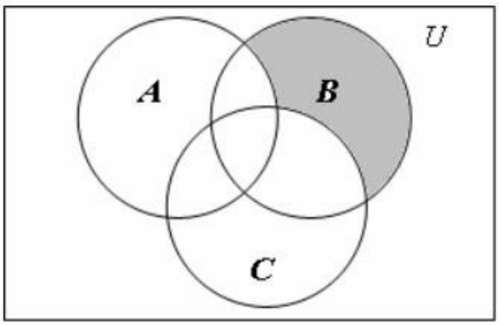
Послідовно знаходимо:

$(A \cup B)\backslash C$



;

$((A \cup B)\backslash C) \cap \overline{A}$

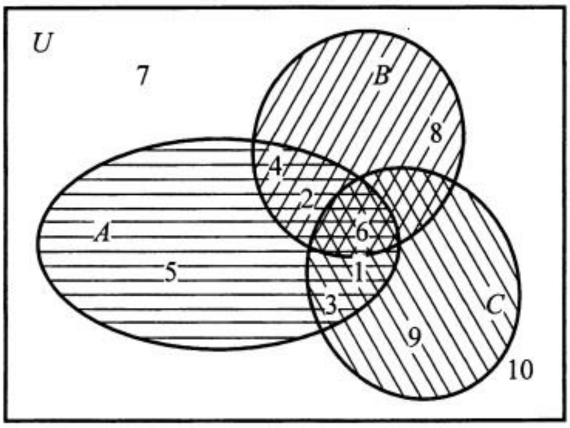


.

Приклад 6. Представити множини U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, A={1,2,3,4,5,6}, B={2,4,6,8}, C={1,3,4,6,9} на діаграмі Ейлера-Венна.

Розв’язок:

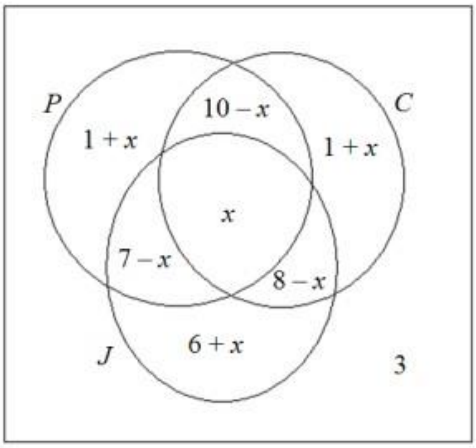
Так як множини A, B, C є підмножинами множини U, то виберемо U універсальною множиною. Діаграма Ейлера-Венна має вигляд:



Приклад 7. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Pascal, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Pascal і C++, 7 — Pascal і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Pascal, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язок. Нехай універсальна множина U - множина тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Pascal, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови. 18

Діаграма Ейлера-Венна має вигляд:



Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Pascal, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то $10 - x$ програмістів знають лише Pascal і C++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми, яка відповідає множині $(P \cap C) \setminus J$. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що $7 - x$ програмістів знають лише мови Pascal і Java, $8 - x$ — лише мови C++ та Java. Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Pascal, C++ та Java. Оскільки мову Pascal знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Pascal дорівнює

18-(10-x)-(7-x)-x=1+x

Аналогічно знають лише мову C++ 19-(10-x)-(8-x)-x=1+x програмістів, лише мову Java- 21-(7-x)-(8-x)-x=6+x. Позначимо отримані числа на діаграмі. Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:18+(8-x)+(1+x)+(6+x)+3=40. Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини P, останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримаємо $36 \square x \square 40$. Звідси $x \square 4$.

Приклад для перевірки знань

Приклад 1. Дано множини A та B. Записати результат кожної операції із зазначенням характеристичної властивості.

а) $A \square B$; б) $A \square B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$; д) $\overline{A}$; е) $\overline{B}$;

1. $A \square \square x x \square R, \square 5 \square x \square 6 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, \square 2 \square x \square 4 \square$.
2. $A \square \square x x \square R, \square 3 \square x \square 4 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, \square 1 \square x \square 6 \square$.
3. $A \square \square x x \square R, x \square \square 2 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, 1 \square x \square 4 \square$.
4. $A \square \square x x \square R, \square 4 \square x \square 6 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, \square 3 \square x \square 7 \square$.
5. $A \square \square x x \square R, 1 \square x \square 5 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, x \square 2 \square$
6. $A \square \square x x \square R, \square 3 \square x \square 1 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, 0 \square x \square 4 \square$
7. $A \square \square x x \square R, x \square 2 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, \square 5 \square x \square 8 \square$ 8. $A \square \square x x \square R, \square 4 \square x \square 0 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, \square 2 \square x \square 6 \square$
9. $A \square \square x x \square R, x \square 1 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, \square 4 \square x \square 3 \square$
10. $A \square \square x \mid x \square R, x \square \square 3 \square$, $B \square \square x \mid x \square R, 1 \square x \square 5 \square$

Приклад 2. На діаграмах Ейлера-Венна зобразити результат операцій, попередньо вказавши порядок дій у формулі.

1. $A \square B \setminus C$ 2. $\overline{A \square C} \setminus B \square A$.
3. $A \square B \setminus B \square C$ 4. $A \square B \setminus C \square A$
5. $A \square B \setminus A \square C$ 6. $A \square C \setminus \square B \square C \square$
7. $A \square C \setminus B \square A$ 8. $A \setminus B \square C \square A$
9. $A \square B \setminus C \square B$ 10. $A \square B \square C \square A$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати Розв'язок прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

ТЕМА № 2.Відношення та відображення.

Практичне заняття №2.

Навчальна мета заняття– закріплення теоретичних знань з теорії відношень; вироблення навичок Розв'язок задач теорії відношень.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

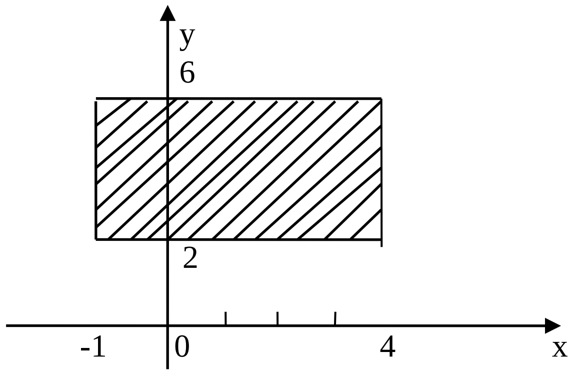
1. Декартовий добуток множин.
2. Поняття відношення. Області визначення та способи Приклад відношень.
3. Властивості відношень.
4. Операції над відношеннями. Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.

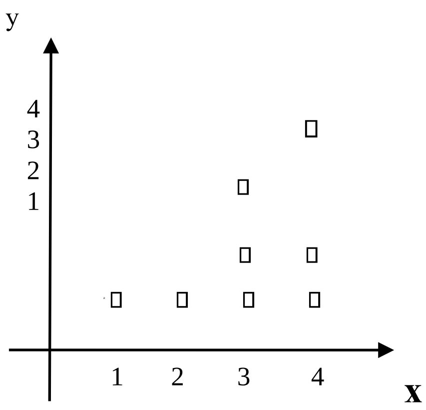
2. Яковлєв С.В., Соколовська О.Г., Горелов Ю.П. ”Дискретна математика”, Харків: Изд. ХНУВС, 2018. – 88с.
3. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с.
4. Таран Т.А. Основы дискретной математики. Учебное пособие. - Киев: Просвита, 2013. - 288 с.
5. Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., В.П. Барвінок В.П., Коломоєц М.О. Дискретний аналіз. Учбовий посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2017. – 29 с.
6. Множини. : Методичні вказівки до виконання практичних занять з дисципліни „Комп’ютерна дискретна математика” для студентів базового

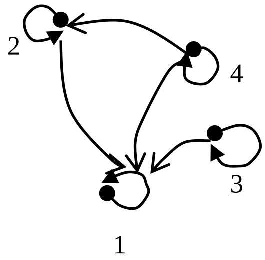
напряму „Програмна інженерія”/ Укл.: П. В. Сердюк – Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка”, 2013. – 35 с.
7. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. .
[Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf

План проведення заняття: І. Порядок проведення вступу до заняття.
Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.
ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.
Розв’язування прикладів за темою заняття.
Приклад 1. Задано множини *A* □□*x*|*x*□*R*, □1□ *x* □ 4□ та *B* □□*x*|*x*□*R*, 2 □ *x* □ 6□
Знайти A□B.
Розв’язок.
Множену *A*□□□1;4□ зобразимо на осі *Ox*, множену *B*□□2;6□ на осі *Oy*. Тоді декартовий добуток – це заштрихований прямокутник, але без його левої сторони, тобто
A□*B* □□□*x*, *y*□*x*, *y*□*R*, □1□ *x* □| 4 *и* 2 □ *y* □ 6□.



Приклад 2. Знайти декартовий добуток множин A і B, якщо а) A = {-1;0;3;4}, B = {0;4;6} та б) A = [0;2], B=[1;5].
Розв’язок.
а) *A B*□ = {(-1,0), (-1,4), (-1,6), (0,0), (0,4), (0,6), (3,0), (3,4), (3,6), (4,0), (4,4), (4,6)}.
б) *A B*□ = {(x;y)| x□[0;2], y□[1;5]}.
Приклад 3. Нехай на *A*□□1,2,3,4□ задано відношення
R □□□x,y□x ділиться на y; *x*, *y*□*A*□. Задати відношення різними способами.
Розв’язок.
Задамо відношення *R* іншими способами. Перерахуємо елементи цього відношення A □□□1,1□,□2,1□,□2,2□,□3,1□,□3,3□,□4,1□,□4,2□,□4,4□□.
Побудуємо графік відношення *R* та граф відношення.





1 2 3 4

□1 0 0 0□ 1

□ □

Запишемо матрицю відношення: *R*□ □□1 1 1 0 1 0 0 0 □□ 2 3

□□□1 1 0 1□□□4

Приклад 4. На множині *A*□□1,2,3,4,5□ задано бінарне відношення

R □□□x,y□□x □ y□ ділиться на 3; x,y□A□. Побудувати граф відношення та встановити його властивості.

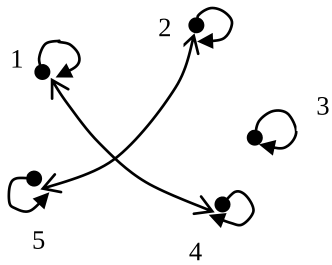
Розв'язок.

Перерахуємо елементи цього відношення R □□□1,1□,□2,2□,□3,3□,□4,4□,□5,5□,□1,4□,□4,1□,□2,5□,□5,2□□.

Побудуємо граф відношення *R* .

З'ясуємо, якими властивості воно має.

будь-



Відношення *R* рефлексивне, т як. граф має в кожній своїй вершині петлю, тобто □*x*,*x*□□*R* для будь-якого *x*□*A*.

Відношення *R* симетричне, так як. граф разом з кожною стрілкою містить протилежну їй стрілку. Для спрощення проводять одну лінію з двома стрілками.

Відношення транзитивне, тому що граф відношення разом з кожною парою стрілок *xy* и *yz* містить стрілку *xz* .

Отже, відношення *R* має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності, отже, є відношенням еквівалентності. На графі відношення добре видно класи еквівалентності - це підмножини А:

□1□□□1;4□, □2□□□2,5□ □3□□□3□.

Приклад 5. Нехай *M* □{1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення *R*, задане на множині *M*□*M* , якщо *R* означає «бути строго менше».

Розв’язок:

Відношення *R*, як множина, містить усі пари елементів (*a*,*b*) з *M* такі, що *a*□*b*. Тоді задане у вигляді списку відношення буде мати вигляд

R □{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6),(5,6)}. Матриця відношення *R*□□ має вигляд:

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Приклад 6. На множині *A* □□□1, 2, 3, 4□□задано відношення

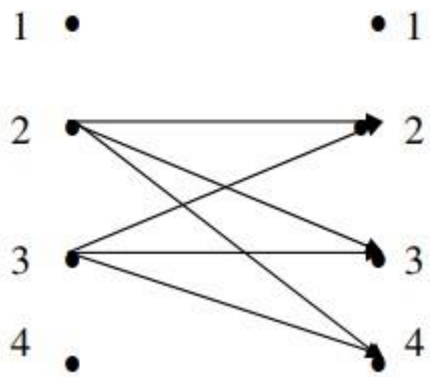
R=□(2,2),(2,3),(2,4).(3,2).(3,3).(3,4)□. Необхідно побудувати матрицю і графік відношення R, побудувати відношення R□R^{-1}, визначити, які властивості має відношення R.

Розв’язок.

Матриця відношення R має вигляд

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Схематичне зображення відношення R



Знайдемо відношення R^{-1}: R^{-1} = {(2, 2), (3, 2),(4, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3)}□ Тоді R□R^{-1}== {(2, 2), (3, 2),(2, 3), (3, 3)}

Визначимо властивості:

а) Так як (1,1)$\notin$ *R* , то відношення *R* - не рефлексивне

b) Відношення R є транзитивним

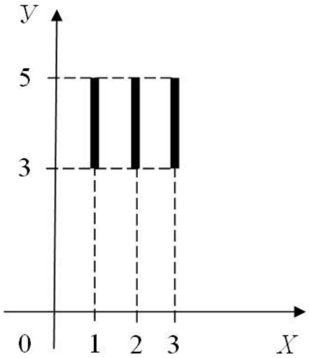
c) Відношення R не буде симетричним

d) Відношення R не є асиметричним і не є антисиметричним

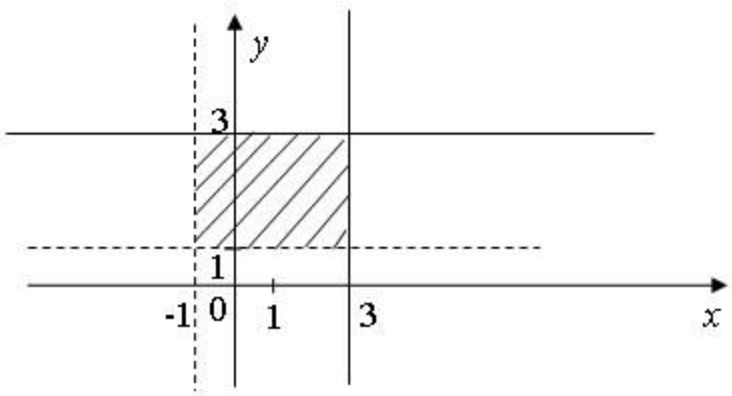
Приклад 7. Зобразіть на координатній площині декартовий добуток множин $A \times B$, якщо $A = \{1,2,3\}$, $B=[3,5]$; Розв'язок.

Так як множина A складається з трьох елементів, а множина B містить всі дійсні числа від 3 до 5, включаючи і самі ці числа, то декартовий добуток $A \times B$ складатиметься з нескінченної кількості пар, перша компонента яких або 1, або 2, або 3, а друга

– будь-яке дійсне число з проміжку [3, 5]. Безліч таких пар дійсних чисел на координатній площині зобразиться трьома відрізками



Приклад 8. На координатній площині побудувати множину (-1; 3□×□1; 3). Розв’язок: Першу множину поміщаємо на осі *OX*, другу на осі *OY*. Множина всіх пар, тобто декартовий добуток, зображається точками заштрихованого прямокутника, але без лівої та нижньої сторони.



Приклад для перевірки знань

Приклад 1. Дано множини *A* та *B*Записати *A*□*B* та *B*□*A*.

1. *A*□□*xx*□*R*,□5 □ *x* □ 6□, *B* □□*xx*□*R*,□2 □ *x* □ 4□.
2. *A*□□*xx*□*R*,□3□ *x* □ 4□, *B* □□*xx*□*R*,□1□ *x*□ 6□.
3. *A*□□*xx*□*R*, *x* □□2□, *B* □□*xx*□*R*,1□ *x*□ 4□.
4. *A*□□*xx*□*R*,□4□ *x*□ 6□, *B* □□*xx*□*R*,□3□ *x* □ 7□.
5. *A*□□*xx*□*R*,1□ *x*□ 5□, *B* □□*xx*□*R*, *x* □ 2□
6. *A*□□*xx*□*R*,□3□ *x*□1□, *B* □□*xx*□*R*,0□ *x*□ 4□
7. *A*□□*xx*□*R*, *x* □ 2□, *B* □□*xx*□*R*,□5 □ *x* □ 8□ 8. *A*□□*xx*□*R*,□4□ *x*□ 0□, *B* □□*xx*□*R*,□2□ *x* □ 6□
9. *A*□□*xx*□*R*, *x* □1□, *B* □□*xx*□*R*,□4 □ *x* □ 3□
10. *A*□□*xx*□*R*, *x* □□3□, *B* □□*xx*□*R*,1□ *x*□5□

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати Розв’язок прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 3. Алгебра логіки. Нормальні форми.

Практичне заняття №3.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з алгебри логіки.
Кількість годин - 2.
Місце проведення – навчальна аудиторія
Навчальні питання:

1. Способи Приклад булевих функцій.
2. Логічні функції однієї, двох змінних.
3. Алгебра логіки.
4. Елементарні функції алгебри та їх властивості.
5. Формули алгебри логіки і їх тотожні перетворення.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. ТевяшевА.Д., Гусарова И.Г. "Основи дискретної математики в прикладах та задачах", Харьків 2011. –270 с. Яблонский С.В." Введення в дискретну математику",- М.: Вища. школа, 2001.-383 с.
2. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики", -Київ.: Наук.думка, 2002. – 579 с.
3. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.
4. Конспект лекцій по дисціплині «Дискретнаа математика» для студентів всіх форм навчання напрям 6.050101 – «Комп'ютерні

науки» [Електронне видання] / Состав. Н.В. Васильцова, Л.Э. Чалая. – Харьків: ХНУРЕ, 2013. – 293 с.
5. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. .
[Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf 6. З.П. Халецька, В.В. Нарадовий Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2017. – 128 с
7. Трохимчук, Р. М. Т76 Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

План проведення заняття: I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв’язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1. Визначити потужність множини двійкових слів (інтерпретацій), на яких визначена булева функція $y \square f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

Розв’язок.

Кількість аргументів заданої булевої функції дорівнює 6 ($n \square 6$). Потужність множини двійкових слів, на яких визначена булева функція $y \square f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, обчислюється за формулою $|B^n| \square 2^n$.

Усього двійкових слів (інтерпретацій), на яких визначена булева функція $y \square f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, буде $|B^6| \square 2^6 \square 64$ слова.

Приклад 2. Визначити кількість булевих функцій, які залежать від 5-ти булевих змінних. Розв’язок.

Число всіх булевих функцій, що залежать від n булевих змінних, дорівнює 2^{2^n}, отже, число всіх булевих функцій, що залежать від 5-ти булевих змінних $x_1, x_2, \ldots, x_5$, дорівнює $2^{2^n} \square 2^{2^5} \square 2^{32} \square 4294967296$.

Приклад 3. Побудувати таблицю істинності булевої функції $f(x, y, z) \square \overline{(x \sim y)} \square ((y \square x) \square z)$ і визначити її порядковий номер. Розв’язок.

Побудуємо таблицю істинності булевої функції

$f(x, y, z) \square U \square \overline{(x \sim y)} \square ((y \square x) \square z)$. Використаємо додаткові позначення

$A \square \overline{(x \sim y)}$ і $B \square (y \square x) \square z$. Отже $U \square A \square B$.

Таблиця істинності булевої функції $f(x, y, z) \square \overline{(x \sim y)} \square ((y \square x) \square z)$

			x ~ y)	)		(y x) z	AB

Двійковий код, що відповідає значенням цієї функції, дорівнює 11010011 (останній стовпець таблиці 4.1).

Двійкове число 11010011_2 в десятковій системі числення буді мати вигляд: $f(x,y,z)_{10}$ 2^7 1$2^6$ 1$2^5$ 0$2^4$ 1$2^3$ 0$2^2$ 0$2^1$1$2^0$ 1128640 16 + 0 + 0 + 2 +1=192 +19 = 211_{10}.

Порядковий номер функції дорівнює 211_{10} .

Приклад 4. Чи еквівалентні формули *U* і *B*, якщо *B**x* ~ *z*, а *U* (*x* ~ *y*) ((*y* *x*) *z*)?

Розв'язок.

Побудуємо таблиці істинності для формули *U* і формули *B*. Перевіримо еквівалентність формул за допомогою цих таблиць.

Таблиця. Узагальнена таблиця істинності функцій, які реалізовані формулами *U* і *B*

Аналіз показав, що таблиці істинності функцій не збігаються (стовпці *U* і *B* різні), отже, формули нееквівалентні.

Приклад 5. Перевірити, чи справедливі наступні відношення: а) *x* (*y* ~ *z*) (*x* *y*) ~ (*x* *z*);

б) *x*(*y* ~ *z*) (*xy*) ~ (*xz*). Розв'язок.

а) за допомогою еквівалентних перетворень перетворимо праву і ліву частину

відношення *x* (*y* ~ *z*) *x* *yz* *yz*. Спочатку перетворимо ліву частину:

x (*y* ~ *z*) (*x* *y*) ~ (*x* *z*) (*x* *y*)(*x* *z*) (*x* *y*)(*x* *z*)

□ *x*□ *xz* □ *xy* □ *yz* □ *xyxz* □ *x*□ *yz* □ *xyz* □ *x*□ *yz* □ *yz*.

Ліва і права частина відношення виявилися рівними, отже, відношення справедливе.

б) перетворимо ліву частину відношення:

x(*y* ~ *z*) □ *x*(*yz* □ *yz*) □ *xyz* □ *xyz* □ *x*(*yz* □ *yz*) .

Перетворимо праву частину відношення:

(*x y*) ~ (*x z*) □ *x yx z* □ *xy x z* □ *xyz* □ (*x*□ *y*)(*x*□ *z*) □ *xyz* □ *x*□ *x z* □ *x y* □ *y z* □

□ *x yz* □ *x*□ *yz* □ *x*□ *yz* □ *y z*.

Результатом перетворення є *x*(*yz* □ *yz*) □ *x* □ (*yz* □ *yz*) . Це можна перевірити за допомогою таблиці істинності, позначивши *A* □ *x*(*yz* □ *y z*), *C* □ *x* □ (*yz* □ *yz*) .

Таблиця істинності функцій *A* і *C*

					z	**(*yz*□ *yz*)**	**□(*yz*□ *yz*)**

Стовпці *A* і *C* не є рівними, отже, відношення несправедливе.

Приклад 6. Знайти функцію, двоїсту функції *f* (*x*, *y*,*z*), якщо відомо, що *f* (*x*, *y*,*z*) □1 тільки на інтерпретаціях (001), (011), (111).

Розв’язок.

Побудуємо таблицю істинності функції *f* (*x*, *y*,*z*) (табл. 5). Для стовпця значень функції *f* (*x*, *y*,*z*) генеруємо набір протилежних (інверсних) значень (10101110).

Записавши цей набір у зворотній послідовності, отримаємо, таким чином, стовпець значень двоїстої функції f^*.

Таблиця 5 □ Таблиця істинності двоїстих функцій

			$,z)$	$y,z)$

Приклад 7. Булеві функції f $(x,\ y,z)$ і $g(x,\ y,z)$ задаються таблицями істинності. Визначити, чи є дані булеві функції самодвоїстими.

Таблиця істинності функцій $f\,(x,\ y,z)$ і $g(x,\ y,z)$

			$,z)$	$,z)$

Розв’язок.

З таблиці видно, що кожне значення булевої функції f $(x,\ y,z)$ є запереченням симетричного йому значення, наприклад: булева функція на інтерпретації (0,0,0) дорівнює нулю, тобто f $(0,\ 0,0)$ □ 0, симетричне значення цієї функції на інтерпретації (1,1,1) дорівнює одиниці, тобто $f\,(1,1,1)$ □1. Отже, функція $f\,(x,\ y,z)$ є самодвоїстою. Для булевої функції $g(x,\ y,z)$ є такі значення функції, які не є рівними запереченню симетричних їм значень, наприклад: булева функція на інтерпретації (0,0,0) дорівнює нулю, тобто $g(0,0,0)$ □0, а симетричне значення цієї функції на інтерпретації (1,1,1) теж дорівнює нулю, тобто $g(1,1,1)$ □ 0. Отже, функція $g(x, y,z)$ не є самодвоїстою.

Приклад для перевірки знань

Приклад 1. Побудувати таблиці істинності наступних функцій і визначити їхній порядковий номер:

а) $f(x, y)$ □ $(x \sim y)$ □$(y$ □ $x)$;

б) $f(x, y,z)$ □ $(x$□ $y)$□$(x$□ $z)$□$(y$ □ $z)$;

в) $f(x, y,z)$ □ $(x$□ $y)$□ $(x$□ $z)$□ $(y$ □ $z)$;

г) $f(x, y)$ □ $(x$□ $y)$ □$(y$ □ $x)$;

д) $f(x, y, z)$ □ $(x$□ $y)$ □ $(x \mid z)$ □ $(y \sim z)$.

Приклад 2. Перевірити за допомогою таблиць істинності, чи справедливі наступні співвідношення:

а) x□ $(y \sim z)$ □ $(x$□ $y) \sim (x$□ $z)$;

б) x □$(y \sim z)$ □ $(x$ □ $y) \sim (x$ □ $z)$;

в) x □$(y$□ $z)$ □ $(x$ □ $y)$□ $(x$ □ $z)$;

г) x□$(y$ □ $z)$ □ $(x$□ $y)$ □$(x$□ $z)$;

д) x □$(y$ □ $z)$ □ $(x$ □ $y)$ □$(x$ □ $z)$.

Приклад 3. Спростити за допомогою законів булевої логіки наведені нижче вирази. Потім за допомогою таблиць істинності зрівняти отримані вирази із заданими:

а) $(x$□ $(t$ □ $y))$ □$((x$□$(y$□$t))$□ $z))$□ z □ $(x$□ $(y$ □$t))$;

б) $((y$□ $z)$ □$(x$□ $y))$□ $(t$ □ $z)$□ $(((y$ □ $x)$□ $z)$ □$(x$□ $y))$;

в) $((x$□ $z)$ □$(x$□$t))$ □$(((z$ □ $(z$ □ $y))$ □ $z)$□ $x)$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати Розв’язок прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 4. «Мінімізація формул алгебри логіки.» Практичне заняття №4.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з мінімізації формул алгебри логіки.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Задача мінімізації формул алгебри логіки.
2. Мінімальна формула. Мінімальні ДНФ і КНФ.
3. Основні методи мінімізації булевих функцій.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г. “Основи дискретної математики в прикладах та задачах”, Харьків 2011. –270 с. Яблонский С.В." Введення в дискретну математику”,- М.: Вища. школа, 2001.-383 с.

2. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. „Основи дискретної математики”, -Київ.: Наук.думка, 2012. – 579 с.

3. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.

4. Конспект лекцій по дисціплині «Дискретнаа математика» для студентів всіх форм навчання напрям 6.050101 – «Комп'ютерні науки»

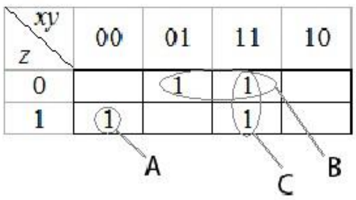
[Електронне видання] / Состав. Н.В. Васильцова, Л.Э. Чалая. – Харьків: ХНУРЕ, 2013. – 293 с.
5. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. .
[Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
6. З.П. Халецька, В.В. Нарадовий Математична логіка та теорія алгоритмів:
Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2017. – 128 с
7. Трохимчук, Р. М. Т76 Збірник задач і вправ з математичної логіки: Навч. посіб. — К. : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2008. — 116 с. — Бібліогр.: с. 113.

План проведення заняття: І. Порядок проведення вступу до заняття.
Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.
ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.
Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1. За допомогою перетворень виду $Ax \vee A\bar{x} = A$ й $A \vee A = A$ перейти від заданої ДНФ $f_{ДНФ}(x, y,z) = xy \vee xz$ до ДКНФ. Розв'язок.

$f_{СДНФ}(x, y,z) = xy \vee xz = xy(z \vee \bar{z}) \vee xz(y \vee \bar{y}) = xyz \vee xy\bar{z} \vee xzy \vee x\bar{y}z$.

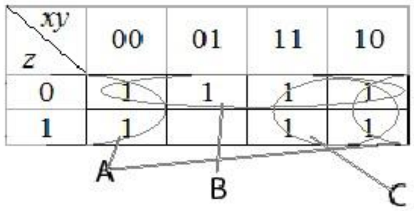
Приклад 2. Знайти мінімальну ДНФ для булевої функції $f(x, y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$.



Розв'язок.
Побудуємо карту Карно для заданої функції.
буде представлена

Мінімальна ДНФ у вигляді $f_{МДНФ}(x, y,z) = A \vee B \vee C = \bar{x}\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee xy$.
Приклад 3. Знайти мінімальну диз'юнктивну нормальну форму для функції $f(x, y,z) = xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz$.
Розв'язок.
Побудуємо карту Карно для заданої функції.

Мінімальна у вигляді $f_{МДНФ}(x,$ $y,z)$ □ A□ B□C □ y□ z □ x .

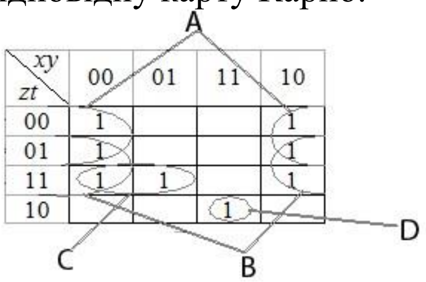


Приклад 4. Побудувати мінімальну диз’юнктивну нормальну форму

ДНФ буде представлена

функції $f(x, y,z,t)$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$.

Розв’язок. Побудуємо відповідну карту Карно.



Запишемо мінімальну ДНФ, з’єднуючи диз’юнкцією прості імпліканти

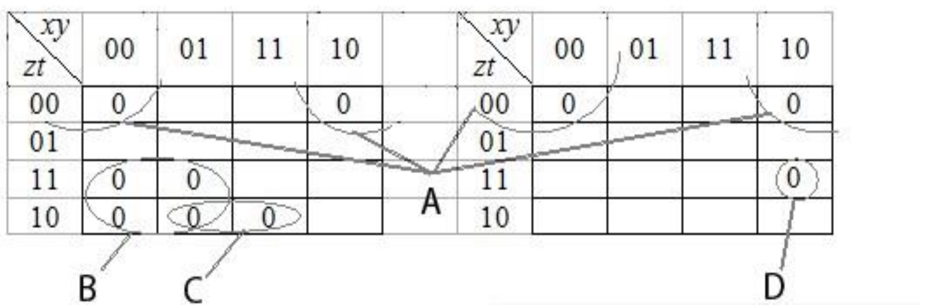
A, B, C, D: $f(x, y, z,t)$ □yz□ yt □ xzt □ $xyzt$.

Приклад 5. Одержати мінімальну КНФ функції, яка задана ДКНФ :

$f(x, y, z,t,w)$ □ (x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w)

(x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w)(x□ y□ z□t □ w) (x□ y□ z□t □ w). Розв’язок. Дана функція дорівнює нулю на наступних інтерпретаціях:

(0,0,0,0,0), (0,0,0,0,1), (0,0,1,0,0,), (0,0,1,1,0), (0,1,1,0,0), (0,1,1,1,0), (1,0,0,0,0), (1,0,0,0,1), (1,1,1,0,0), (1,0,1,1,1). Карта Карно (діаграма Вейча) для даної функції буде мати вигляд, представлений на рис. 4.

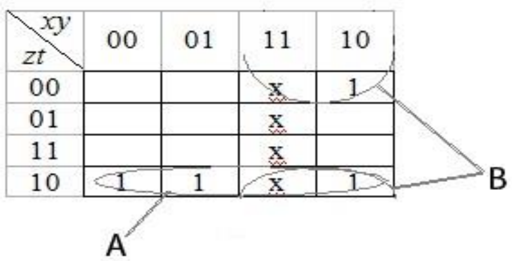


Запишемо мінімальну КНФ:

$f(x, y,z,t,w)$ □ A□B□C □D □ (y□ z□t)(x□ z□w)(y□ z□t□w)(x□ y□ z□t□w).

Приклад 6. Функція $f(x, y,z,t)$ дорівнює одиниці на наборах (0,0,1,0), (0,1,1,0), (1,0,1,0), (1,0,0,0) і не визначена, якщо xy □1. Побудувати мінімальну ДНФ даної функції.

Розв’язок. Складемо карту Карно для заданої функції (5).



Мінімальна ДНФ буде мати такий вигляд $f(x, y,z,t)$ □ A□ B □ zt □ xt .

Приклад для перевірки знань.

Приклад 1. За допомогою співвідношень виду x□ yz □ $(x$□ $y)(x$□ $z)$ перетворити ДНФ $f_{ДНФ}(x, y,z)$ □ $x\,y$ □ xz до КНФ. Приклад 2.

Використовуючи карти Карно, побудувати мінімальну ДНФ і мінімальну КНФ за таблицею істинності булевої функції $f(x, y,z)$. Таблиця істинності функції $f(x, y,z)$

			,z)

Приклад 3.

Побудувати мінімальні ДНФ і мінімальні КНФ, використовуючи карти Карно .

Карта Карно функції $f^{*}(x, y,z,t)$ xy

zt	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

Карта Карно функції □(x, y,z,t) xy

zt	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0

11
10

Карта Карно функції □(x, y,z,t)

zt \ xy	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Приклад 4. Побудувати карти Карно-Вейча для наступних функцій: а) $f(x, y,z,t)$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$;

б) $f(x, y, z,t)$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$;

в) $f(x, y,z,t)$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$;

г) $f(x, y,z,t)$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$ □ $xyzt$;

д) $f(x, y,z,t)$ □ (x□ y□ z □t) □(x□ y □ z □t) □(x□ y □ z □t) □

□ (x□ y □ z □t) □ (x□ y □ z □t).

Приклад 5.
Побудувати мінімальну ДНФ для функції

$f(x, y,z,t,w)$ □ $xyztw$□ $xyztw$□ $xyztw$□ $xyztw$□ $xyztw$□ $xyztw$□ $xyztw$□

□ $xyztw$□ $xyztw$□ $xyztw$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати Розв’язок прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 5: Елементи комбінаторного аналізу.

Практичне заняття №5.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з теорії комбінаторного аналізу; вироблення навичок Розв’язок задач теорії комбінаторного аналізу.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Основні правила комбінаторного аналізу: правило суми та добутку.
2. Основні формули комбінаторного аналізу.
3. Перестановка сполучення, розміщення без повтору елементів.

4. Перестановка сполучення, розміщення з повтором елементів.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Б 25 Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с
3. Бобик О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник / О. І. Бобик,

Г. І. Берегова, Б І. Копитко - К.: ВД "Професіонал", 2017.-560 с.

4. Комбінаторні задачі: навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. / Ольга Леонідівна Швай. – Луцьк: СНУ імені Лесі Українки, 2018. – 142 с.
5. Булига К.Б., Барановська Л.В. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики – К.: ЄУФІМБ, 2010. – 128 с.

5. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. КушликДивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с. − Бібліогр.: с.205. − 300пр.[Електронний ресурс]. – Режим доступу:https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/18378/1/5%20%D0%9A%D1%83%D1%88%D0%BB%D0%B8%D0%BA-%D0%94%D0%B8%D0%B2%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0.pdf

План проведення заняття: І. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

ІІ. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв’язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1. З міста *A* в місто *B* відправляється 10 потягів, 5 літаків і 3 автобуса. Скількома способами однієї людині можна дібратися з міста *A* в місто *B*?

Розв’язок. За правилом суми всього існує 10+5+3 =18 способів.

Приклад 2. На танцювальній площадці є 17 юнаків і 21 дівчина. Скільки танцювальних пар вони можуть скласти?

Розв’язок. Спочатку виберемо юнака. Це можна зробити 17 способами. Після цього кожний юнак вибере собі партнершу (21 спосіб). За правилом добутку вибір упорядкованої множини танцювальних пар (юнак, дівчина) складає 17□21□357.

Приклад 3. Скількома способами можна вибрати 3 різні фарби, якщо є п'ять різних фарб?

Розв'язок. Порядок вибору фарб неважливий, тому кількість способів вибору можна обчислити за формулою $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = 10$.

Приклад 4. Нехай $M = \{1, 2, 3\}$. Побудувати різні перестановки множини M по 2 і по 3 елемента.

Розв'язок. 2-перестановками множини M є (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,1). Їх кількість $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 2 \cdot 3 = 6$. 3-перестановками множини M є (1,2,3), (2,1,3), (1,3,2), (3,2,1), (2,3,1), (3,1,2). Їх кількість $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 2 \cdot 3 = 6$.

Їх кількість дорівнює $P_3 = 3! = 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 5. Кілька людей сідають за круглий стіл. Вважатимемо, що два способи розміщення збігаються, якщо кожна людина має тих самих сусідів в обох випадках. Скількома різними способами можна розмістити за столом 11 чоловік?

Розв'язок. Якби місця за столом були нумеровані, то на перше місце можна було б посадити кожного з 11, тобто 11 способами, на друге місце – кожного з 10, що залишилися і т.д. Тому що треба зайняти 11 місць і є 11 чоловік, то за правилом добутку маємо (11!) способів. Але тому що місця не нумеровані та при переміщенні усіх на одне місце за годинниковою стрілкою (чи проти її) сусідство зберігається, то кількість способів треба зменшити в 11 разів. Крім того, сусідство зберігається при симетричному відображенні щодо діаметра, отже кількість треба зменшити ще вдвічі.

Остаточна кількість способів розміщення виявляється рівною $\frac{1}{2} \cdot 10!$. У загальному випадку, коли за круглим столом треба розсадити n людин, кількість способів дорівнює $\frac{1}{2} \cdot (n-1)!$. Приклад 6. У кімнаті студентського гуртожитку живуть троє студентів. У них є 4 чашки, 5 блюдець і 6 чайних ложок (усі чашки, блюдця і ложки відрізняються одне від одного). Скількома способами вони можуть накрити стіл для чаювання (кожний одержує одну чашку, одне блюдце й одну ложку)?

Розв'язок. Чашки можна розставити $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!}$ способами, блюдця $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$ способами і чайні ложки $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!}$ способами. Усього за правилом добутку накрити стіл для чаювання можна $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$ способами.

Приклад 7. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, який складається з одного офіцера, двох сержантів і 20 рядових? Та ж задача, якщо в загін повинен увійти командир роти і старший з сержантів.

Розв'язок. Офіцера можна вибрати C_3^1 способами, сержантів C_6^2 способами і рядових C_{60}^{20} способами. Усього за правилом добутку маємо

$C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$.

Якщо в загін повинен увійти командир роти і старший з сержантів, то маємо $C_5^1 \cdot C_{60}^{20}$ способів вибору.

Приклад 8. Розглянемо слово СТІЛ. Скільки слів з 4 букв можна скласти, якщо букви в словах повторюються?

Розв'язок. Якщо можливі повторення букв, наприклад, СТТЛ, СІСЛ, ТТТТ та ін., тоді одержимо кількість слів $\overline{A}_4^4 = 4^4 = 256$.

Приклад 9. Розглянемо слово СТІЛ. Скільки слів з 3 букв можна скласти, якщо букви в словах повторюються?

Розв'язок. Якщо можливі повторення букв, наприклад, СТТ, ССС, ІТІ, ЛЛТ та ін., тоді одержимо кількість слів $\overline{A}_4^3 = 4^3 = 64$.

Приклад 10. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи літери слова «МАТЕМАТИКА»?

Розв'язок. Слово «МАТЕМАТИКА» ($n=10$) містить 3 літери «А» ($n_A = 3$), 2 літери «М» ($n_M = 2$), 2 літери «Т» ($n_T = 2$) і по одній літері «Е» ($n_E = 1$), «И» ($n_И = 1$), «К» ($n_K = 1$).

Різні слова з цих літер являють собою перестановки цих літер зі специфікацією $(n_A, n_M, n_T, n_E, n_И, n_K) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$. Кількість таких перестановок дорівнює

$$P(n_A, n_M, n_T, n_E, n_И, n_K) = \frac{n!}{n_A! n_M! n_T! n_E! n_И! n_K!} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!}.$$

Приклад 11. У кондитерській є тістечка 4 сортів. Якою кількістю способів можна купити 7 тістечок?

Розв'язок. Порядок, у якому купуються тістечка, ролі не відіграє. Важливо лише, скільки тістечок кожного сорту в покупці. Тому покупку варто розглядати як сполучення з 4 по 7 з повтореннями. Кількість різних покупок дорівнює $\bar{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3$.

Приклад 12. Чотири студента отримали 20 дисків. Скількома способами вони можуть їх розподілити, якщо диски вважаються однаковими?

Розв'язок. В задачі нас цікавить лише те, скільки дисків отримає кожний студент, а не те, які саме диски він отримає. Задача відноситься до задач розподілу *n* однакових предметів за *k* урнами (урни можуть бути порожніми).

n (*n*=20) однакових предметів між *k* (*k* =4) особами можна розподілити $P(n, k-1) = C_{n+k-1}^{n} = C_{n+k-1}^{k-1}$ способами, тому кількість способів розподілу дорівнює $P(20,3) = C_{n+k-1}^{n} = \frac{23!}{(23-3)!\,3!} = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{23}^{3} = 1771$.

Приклад 13. У студентській групі, яка складається з 25 осіб, при виборі старости за висунуту кандидатуру проголосували 12 студентів; проти – 10; утрималися – 3. Скількома способами могло бути проведене таке голосування?

Розв'язок. Задача відноситься до задач розподілу *n* різних предметів за *k* урнами. Кількість розміщень *n* різних предметів ($n = 25$ голосів) за *k* урнами ($k=3$) за умови, щоб у першу урну попало n_1 ($n_1 = 12$ голосів «за» висунуту кандидатуру), у другу урну попало n_2 ($n_2 = 10$ голосів «проти» висунутої кандидатури), у третю урну попало n_3 ($n_3 = 3$ голосів «утрималися»), дорівнює

$$P(n_1, n_2, n_3) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} = \frac{25!}{12!\,10!\,3!} = 1487285800,$$ де $n = n_1 + n_2 + n_3 = 25$.

Приклад для перевірки знань

Приклад 1. На денне чергування в студентському гуртожитку може піти або студент з кімнати 1, де проживають три студенти, або студент з кімнати 2, де проживають чотири студенти. Скількома способами можна вибрати одного студента на денне чергування в гуртожитку?

Приклад 2. На денне чергування в студентському гуртожитку вибирається два студента – один студент з трьох, що проживають у кімнаті 1, і один студент з чотирьох, що проживають у кімнаті 2. Скільки існує можливих способів формування різних пар з двох студентів для чергування в гуртожитку?

Приклад 3. З 12 слів чоловічого роду, 9 слів жіночого роду і 10 слів середнього роду треба відібрати по одному слову кожного роду. Скількома способами можна здійснити цей вибір?

Приклад 4. Комутатор має *n* входів і *m* виходів. Якою кількістю способів може бути обрана пара «вхід-вихід» для встановлення між ними з'єднання? Дві пари? *K* пар?

Приклад 5. Телефонна мережа має *n* абонентів. Якою кількістю способів може бути обрана пара абонентів для встановлення між ними з'єднань? Дві пари? *K* пар?

Приклад 6. У магазині є 5 сортів цукерок у коробках і 4 сорти тортів. Якою кількістю способів можна купити коробку цукерок чи торт? Якою кількістю способів можна купити і те й інше?

Приклад 7. Зі спортивного клубу, що нараховує 30 членів, треба вибрати 4 гімнастки для участі у особистих змаганнях з естетичної гімнастики Скількома способами це можна зробити?

Приклад 8. Скільки трьохкнопочних комбінацій існує на кодовому замку (усі три кнопки натискуються одночасно), якщо на ньому всього 10 цифр?

Приклад 9. У футбольному чемпіонаті беруть участь 17 команд. За умови, що 3 останні команди залишають вищу лігу, скільки варіантів такого завершення чемпіонату?

Приклад 10. Скільки членів було в клубі, якщо при нумерації членських білетів використовувалися усі трьохзначні номери, в яких не було ні одної цифри 8?

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати Розв'язок прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

ТЕМА № 6. Основні поняття теорії графів.

Навчальна мета заняття – закріплення теоретичних знань з теорії графів; вироблення навичок Розв'язок задач з теорії графів.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Основні поняття теорії графів.
2. Способи задання графів.
3. Зв'язність графів. Ізоморфізм графів.
4. Операції над графами.
5. Ейлерові та Гамільтонові графи.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

1. Конспект лекцій.
2. Дунаєва Т.А. Методи дискретної математики при дослідженні економічних систем [Текст] : НАВЧ. посіб. для студ.екон.спец. / Т.А.

Дунаєва. – К. : НТУУ «КПІ», 2016. –132 с. – Бібліогр.: с. 131-132. – 100 пр.
3. Дискретна математика: навч. посіб. / [Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Харсун О.М., Пашкова Т.Л., Баранов М.І., Григор'єва Т.І.,Вишневська В.М., Кольцова Л.Л.] - Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова,2010. - 196 с.
4. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни «Дискретна математика» галузь знань 12 «Інформаційні технології» Укладачі: Ясній О.П., Гащин П.Б., Крива Н.Р. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. – 40 с. 5. Коноваленко О.Є. К Дискретна математика: навч.-метод. посібник / О.Є. Коноваленко,М.А. Ткачук, А.В. Грабовський – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – 84 с
6. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с. .
[Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/manual_DM.pdf
7. Іглін, С. П. Теорія графів. Лекції та варіанти індивідуальних домашніх завдань [Текст]: навчальний посібник / І-26 С. П. Іглін. – Харків: НТУ "ХПІ" , 2017. – 146 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
http://iglin.exponenta.ru/All/Files/Iglin_Graph_Theory_Lectures.pdf

План проведення заняття: I. Порядок проведення вступу до заняття.
Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.
Розв'язування прикладів за темою заняття.
Приклад 1. Декілька осіб (більше двох) приймають участь у шаховому турнірі в одне коло. У деякий момент виявилося, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії.
Розв'язок.
Мовою теорії графів задачу можна сформулювати наступним чином. У графі з n ($n > 2$) вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Довести, що є або лише одна вершина степеня 0, або лише одна степеня n-1. Розглянемо всі можливі заперечення цього твердження. Якщо припустити, що немає вершин степеня як 0, так і n–1, то n вершин мають степені від 1 до n–2, тобто, серед них є або дві пари вершин, або три вершини з однаковими степенями, що суперечить умові. Отже, вершини степеня 0 або степеня n–1 є. Одночасно таких бути не може. Якщо є дві вершини степеня 0, то залишається n–2 вершин з попарно різними степенями від 1 до n–3, а це неможливо. Так само неможливо, що при

двох вершин степеня n–1 решта n–2 вершин мають попарно різні степені від 2 до n-2.

Приклад 2. 29 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

Розв’язок.

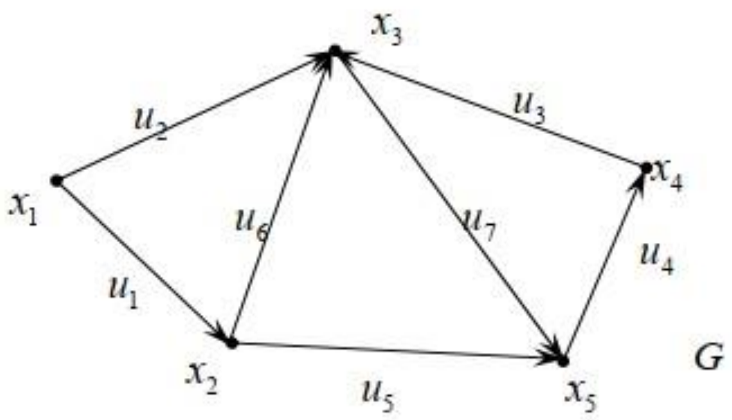
Мовою теорії графів задача виглядає так: довести, що у будь-якому графі з 29 вершинами знайдеться вершина парного степеня. Враховуючи, що 29 – непарне число, і кількість вершин, степінь яких непарний парна, то знайдеться хоч одна вершина парного степеня.

Приклад 3. Орграф $G\ (X\ ;U)$ задано списком: X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}

U={(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_3), (x_5, x_4), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_3, x_5)}. Задати його у геометричний та матричний способи.

Розв’язок.

Геометричний спосіб задання орграфа



Матричний спосіб задання орграфа

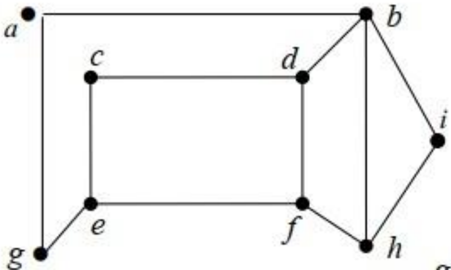
иця суміжності:	иця інцидентності
$A(G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$	$G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$

Приклад 4. Граф $G\ (X\ ;U)$ задано матрицею суміжності

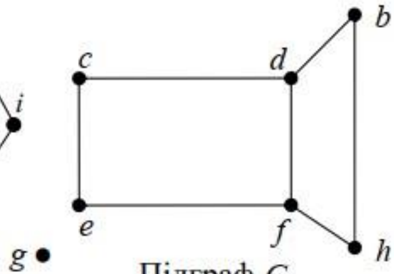
$$A(G)=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Побудувати геометричне зображення графа. Визначити тип графа, типи його ребер та вершин. Побудувати декілька підграфів, Записати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг та простий ланцюг, цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона. Обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число. Розв’язок.

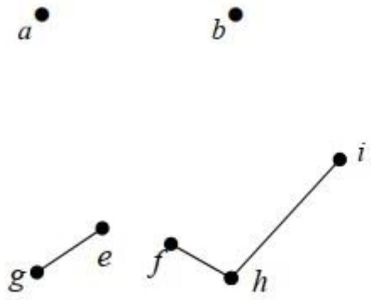
а) геометричне зображення графа G – скінченного неорієнтованого зв’язного плоского графу без петель і кратних ребер, який не має висячих вершин: б) Графи G1 та G2 є підграфами графа G :



Граф G



Підграф G_1



Підграф G_2

Маршрутом є така послідовність ребер та вершин:

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}e.$$

Замкнутий маршрут є:

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}eu_{11}gu_{12}a$$

Ланцюгом є маршрут:

$$au_1bu_2du_7fu_6hu_3bu_4i.$$

Простим ланцюгом є маршрут:

$$au_1bu_2du_7fu_6hu_5i.$$

Циклом є ланцюг:

$$du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5hu_3bu_2d.$$

Простим циклом є цикл:

$$cu_8du_7fu_{10}eu_9c.$$

Ланцюга й циклу Ейлера в графі не має.

Ланцюгом Гамільтона є ланцюг:

$$fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5h.$$

Циклом Гамільтона є цикл:

$$au_1bu_4iu_5hu_6fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}a.$$

Запишемо матрицю відстаней між вершинами графа:

$$\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g\\ h\\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Знаходимо: $e(a)=3$; $e(b)=3$; $e(c)=3$; $e(d)=3$; $e(e)=3$; $e(f)=3$; $e(g)=3$; $e(h)=3$; $e(i)=3$;

$r(G)=3$; $d(G)=3$;

$C(G)=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ − центр графа;

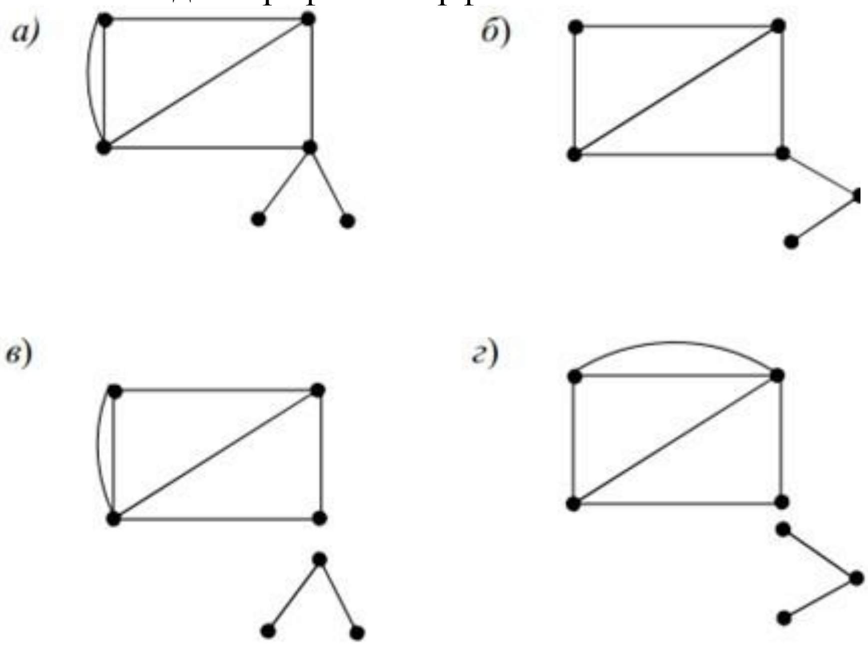
$m=12$, $n=9$, $p=1$, $\lambda=12-9+1=4$.

Приклад 5. Чи існує повний граф, кількість ребер якого дорівнює 15? Розв’язок.

Кількість ребер повного графа з n вершинами дорівнює $n(n-1)/2$. Рівняння $n(n-1)/2 = 15$ має корені 6 і –5. Отже, існує повний граф із 6 вершинами, кількість ребер у якому дорівнює 15.

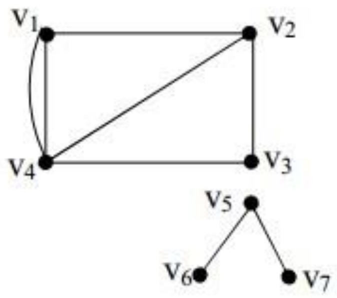
Приклад 6. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють: 1, 1, 2, 3, 4, 4 Розв’язок.

Такий граф не існує, тому що сума степенів усіх його вершин непарна. Приклад 7. Чи є наведені графи ізоморфними?

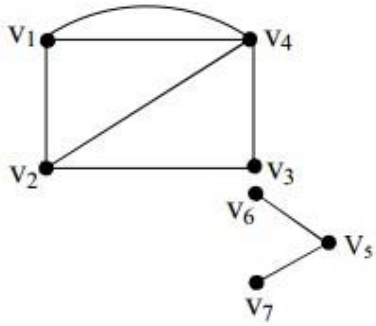


Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин. Тому треба порівнювати графи а та б, а також в та г. Але граф а має дві висячі вершини, а граф б – одну. Тому вони не можуть бути ізоморфними. Розглянемо графи в і г. Кількість вершин і кількість ребер у них однакові. Обидва графи мають по дві компоненти зв'язності і по дві висячі вершини. Позначимо вершини графів і знайдемо відповідні вершини, враховуючи степені вершин.

в)



г)



Знайдемо матриці суміжності для графів. Для обох графів вони є однаковими.
Тобто графи є ізоморфними.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад 8. Граф G задано матрицею інцидентності.:

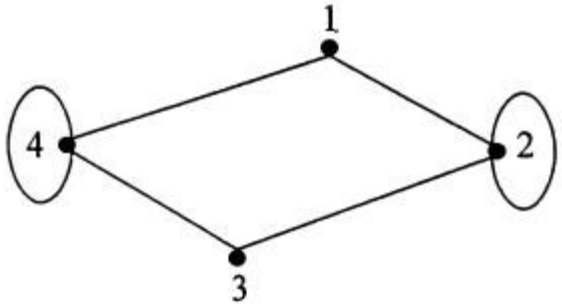
$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Необхідно побудувати граф G, знайти степінь кожної вершини, записати матрицю суміжності графа, записати список ребер графа.

Розв'язок.

Граф G – неорієнтований граф, так як у матриці інцидентності не має від'ємних елементів. Кількість вершин графа – 4 (відповідає кількості рядків матриці), кількість ребер – 6(відповідає кількості стовпців матриці).

Переглядаючи кожен стовпець матриці J, з'єднуємо ребрами вершини, які інцидентні даному ребру. Якщо ребро двічі інцидентне вершині (в матриці J таке ребро позначено знаком "2" у відповідному рядку), то це ребро є петлею. Виконуючи послідовно перегляд усіх шести ребер, отримуємо граф:



Ступінь вершини графа □(i), (/ = 1,2,3,4) - це число ребер, інцидентних даній вершині.

Склавши всі числа в рядку матриці J, отримаємо ступінь відповідної вершини:

$$J_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{|l} \rho(1) = 2 \\ \rho(2) = 4 \\ \rho(3) = 2 \\ \rho(4) = 4 \end{array}.$$

Матриця суміжності має вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Список ребер графа - це двустрочним матриця K, в кожному стовпці якої записані номери вершин, інцидентних даному ребру:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Приклад для перевірки знань.

Приклад 1. Граф G задано матрицею інцидентності. Необхідно побудувати граф G, знайти степінь кожної вершини, записати матрицю суміжності графа, записати список ребер графа.

а)

$$\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

б)

$$\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати Розв’язок прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Методичні вказівки до практичних занять