

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

Кафедра кібербезпеки та DATA – технологій, факультет № 6

**МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ**

**з навчальної дисципліни «Теорія інформації та кодування»
обов'язкових компонент
освітньої програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**

125 – Кібербезпека (безпека інформаційних та комунікаційних систем)

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО

Вченою радою факультету № 6
Протокол від 25.08.2023 № 7

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні кафедри кібербезпеки та DATA-технологій
факультету № 6 (протокол від 15.08.2023 № 8)

Розробники:

1. Завідувач кафедри Юрій ГНУСОВ, к.т.н., доцент.
2. Професор кафедри Віталій НОСОВ, к.т.н., доцент.

Рецензенти:

1. Доцент кафедри інформаційних систем факультету інформаційних технологій ХНЕУ ім. Семе́на Кузне́ця, к.т.н., доцент Євстрат Д.І.;
2. Доцент кафедри протидії кіберзлочинності факультету №4 ХНУВС, к.т.н., доцент Світличний В.А.

1.1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами (денна форма навчання)

Номер та назва теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни					Література	Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Семестр № 4							
Тема №1. Основні поняття теорії інформації	30	8	4	4	18		
1.1. Вступ до курсу «Теорія інформації та кодування»	4	2			2	1,2,3	
1.2. Основні поняття теорії інформації	6	2			4	1,2,3	
1.3. Інформаційні характеристики сукупності дискретних немарківських джерел інформації	8	2			6	1-4	
1.4. Шенноновські дискретні джерела повідомлень	12	2		4	6	1-5	
Тема №2. Кодування в дискретних каналах зв’язку	90	16		32	42		
2.1. Оптимальне кодування	16	2		8	6	1-5	
2.2. Двійкові коди, що виявляють помилки	16	2		8	6	1-5	
2.3. Двійкові коди, що виправляють однократні помилки	12	2		4	6	1-5	
2.4. Двійкові циклічні коди	16	2		8	6	1-5	
2.5. Недвійкові коди	10	4			6	1,2,5	
2.6. Стиснення повідомлень при передачі даних	8	2			6	1,2,3	
2.7. Словникові методи стиснення повідомлень (Кодування в дискретних каналах зв’язку)	12	2		4	6	1,2,3	
Всього	120	24		36	60		Залік

2.2. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами (заочна форма навчання)

Номер та назва теми	Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни					Література	Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота		
Семестр № 4							
Тема №1. Основні поняття теорії інформації	43	2		1	40		
1.1. Вступ до курсу «Теорія інформації та кодування»	6				6	1,2,3	
1.2. Основні поняття теорії інформації	8				8	1,2,3	
1.3. Інформаційні характеристики сукупності дискретних немарківських джерел інформації	15	1			14	1-4	
1.4. Шенноновські дискретні джерела повідомлень	14	1		1	12	1-5	
Тема №2. Кодування в дискретних каналах зв'язку	77	2		5	70		
2.1. Оптимальне кодування	16	1		1	14	1-5	
2.2. Двійкові коди, що виявляють помилки	11			1	10	1-5	
2.3. Двійкові коди, що виправляють однократні помилки	13			1	12	1-5	
2.4. Двійкові циклічні коди	16	1		1	14	1-5	
2.5. Недвійкові коди	8				8	1,2,5	
2.6. Стиснення повідомлень при передачі даних	6				6	1,2,3	
2.7. Словникові методи стиснення повідомлень (Кодування в дискретних каналах зв'язку)	7			1	6	1,2,3	
Всього	120	4		6	110		Залік

2. Методичні вказівки до лабораторних занять

Тема №1. Основні поняття теорії інформації

Лабораторна робота 1.1 (1). Дослідження інформаційних характеристик дискретних джерел інформації

Навчальна мета заняття: сформувати вміння розраховувати і автоматизувати розрахунки інформаційних характеристик дискретних джерел інформації

Час проведення: 4 год.

Навчальні питання

Вступ

1. Розрахунок інформаційних характеристик дискретних джерел інформації
- Висновки

Література: [1, л.2, 3], [2, 3, 4].

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Провести письмове опитування за контрольними питаннями:

1. Що таке джерело повідомлень?
2. Що таке ансамбль повідомлень?
3. Як визначається кількість інформації в одному повідомленні?
4. Що таке ентропія та які її властивості?
5. За яких умов ентропія джерела стає максимальною?
6. Чим визначається продуктивність дискретного джерела?

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до лабораторних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Розрахунок інформаційних характеристик дискретних джерел інформації.

Завдання 1.1.

1. Задати два дискретних джерела повідомлень без пам'яті, що вибирають повідомлення $a_k \in A$ та $b_k \in B$, де A, B – множини літер прізвища, імені, по-батькові українською та англійською мовою відповідно.

2. Розрахувати ансамблі для кожного джерела повідомлень, пов'язавши з кожним дискретним повідомленням a_i та b_i ймовірність p_i його вибору джерелом.
3. Визначити кількість інформації, що містить кожне повідомлення, та ентропію обох джерел.
4. Визначити продуктивність обох джерел припустивши, що вони вибирають всі свої повідомлення за один і той самий проміжок часу $\tau = \tau_{\text{сер}} = 1 \text{ с}$.
5. Порівняти джерела за інформативністю та продуктивністю.

Приклад виконання 1.1.

Перше джерело повідомлень

Джерело повідомлень без пам'яті вибирає повідомлення з множини літер прізвища, імені, по-батькові українською мовою

ІВАНОВ_ІВАН_ІВАНОВИЧ $N=20$

Розрахунок ансамблю джерела повідомлень

$A = \{I, B, A, H, O, И, Ч, _\}$

Кількість різних повідомлень або абетка джерела повідомлень $k=8$.

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

літера	I	B	A	H	O	И	Ч	_
a_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	3	5	3	3	2	1	1	2
p_i	0.15	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05	0.05	0.10

Кількість інформації, що містить кожне повідомлення

$$I(a_i) = -\log_2 p_i$$

a_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.15	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05	0.05	0.10
$I(a_i)$	2.737	2.000	2.737	2.737	3.322	4.322	4.322	3.322

Ентропія джерела

$$H(A) = \sum_{i=1}^k p_i I(a_i), \quad H(A) = 2,828.$$

Продуктивність джерела

$$\bar{H}(A) = \frac{H(A)}{\tau}, \quad \bar{H}(A) = 2,828.$$

Друге джерело повідомлень

Джерело повідомлень без пам'яті вибирає повідомлення з множини літер прізвища, імені, по-батькові англійською мовою

IVANOV_IVAN_IVANOVICH $N=21$

Розрахунок ансамблю джерела повідомлень

$B = \{I, V, A, N, O, C, H, _ \}$

Кількість різних повідомлень $k=8$.

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

літера	I	V	A	N	O	C	H	_
b_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	5	3	3	2	1	1	2
p_i	0.19	0.24	0.14	0.14	0.10	0.05	0.05	0.10

Кількість інформації, що містить кожне повідомлення

$$I(b_i) = -\log_2 p_i$$

b_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.19	0.24	0.14	0.14	0.10	0.05	0.05	0.10
$I(b_i)$	2.392	2.070	2.807	2.807	3.392	4.392	4.392	3.392

Ентропія джерела

$$H(B) = \sum_{i=1}^k p_i I(b_i), \quad H(B) = 2,815.$$

Продуктивність джерела

$$\overline{H}(B) = \frac{H(B)}{\tau}, \quad \overline{H}(B) = 2,815.$$

Висновки

Джерело _ є більш інформативним та більш продуктивним порівняно з джерелом _.

Завдання 1.2.

1. Задати два дискретних джерела повідомлень із пам'яттю, що вибирають повідомлення $a_k \in A$ та $b_k \in B$, де A, B – множини пар літер (диграм) прізвища, імені, по-батькові українською та англійською мовою відповідно.
2. Розрахувати ансамблі для кожного джерела повідомлень, пов'язавши з кожним дискретним повідомленням a_i та b_i ймовірність p_i його вибору джерелом.
3. Визначити кількість інформації, що містить кожне повідомлення, та ентропію обох джерел.
4. Визначити продуктивність обох джерел припустивши, що вони вибирають всі свої повідомлення за один і той самий проміжок часу $\tau = \tau_{\text{сер}} = 1\text{с}$.
5. Порівняти джерела за інформативністю та продуктивністю.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Тема №2. Кодування в дискретних каналах зв'язку

Лабораторна робота 2.1 (2). Кодування текстової інформації

Навчальна мета заняття: ознайомлення із різними кодами текстової інформації

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

Вступ

1. Кодування текстової інформації

Висновки

Література:

Матеріали лекції 4,5.

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Задача 2.1.1

Записати своє прізвище та ім'я в англійській абетці. Далі:

1. перекодувати прізвище та ім'я в десяткову систему числення з урахуванням:
 $A = 65, B = 66, \dots, Z = 90, a = 97, b = 98, \dots, z = 122, \text{ пробіл} = 32.$
2. перекодувати прізвище та ім'я в шістнадцяткову систему числення.

Перекодування в шістнадцяткову систему числення продемонструвати через послідовне ділення на основу числення.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Задача 2.1.2

Перекодувати своє прізвище та ім'я в англійській абетці в код Base64.

У коді Base64 кожне число представлено 6 бітами. Порядок перекодування такий.

1. Кожен символ представити десятковим числом з таблиці ASCII.
2. Десяткові числа представити двійковими 8-бітними числами.
3. Записати двійкові числа у рядок і згрупувати їх по 6 біт.
4. Якщо не вистачає інформаційних біт до завершення групи з 6 біт, то додати службові нулі.
5. Загальна довжина груп по 6 біт повинна бути кратна 8. Додаткові пусті групи по 6 біт позначити знаком =.
6. Отримані групи з 6 біт замінити символами з таблиці Base64.

Value	Char	Value	Char	Value	Char	Value	Char
0	A	16	Q	32	g	48	w
1	B	17	R	33	h	49	x
2	C	18	S	34	i	50	y
3	D	19	T	35	j	51	z
4	E	20	U	36	k	52	0
5	F	21	V	37	l	53	1
6	G	22	W	38	m	54	2
7	H	23	X	39	n	55	3
8	I	24	Y	40	o	56	4
9	J	25	Z	41	p	57	5
10	K	26	a	42	q	58	6
11	L	27	b	43	r	59	7
12	M	28	c	44	s	60	8
13	N	29	d	45	t	61	9
14	O	30	e	46	u	62	+
15	P	31	f	47	v	63	/

Задача 2.1.3

Перекодувати своє прізвище, ім'я та по батькові на українській мові в URL encoding (Відсоткове кодування в URI).

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Лабораторна робота 2.2 (3). Оптимальне кодування

Навчальна мета заняття: сформулювати вміння здійснювати та оцінювати оптимальне кодування дискретних повідомлень

Час проведення: 4 год.

Навчальні питання

Вступ

1. Побудова оптимальних кодів дискретних повідомлень

Висновки

Література: Матеріали лекції 2.1.

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Провести письмове опитування за контрольними питаннями:

1. Якою є ціль оптимального кодування джерела повідомлень?
2. Якою є умова кодування без втрат?
3. Якою повинна бути довжина кодового ланцюга для здійснення кодування без втрат?
4. Яке мінімально можливе значення може приймати середня довжина коду при оптимальному кодуванні?
5. Які існують шляхи зменшення середньої довжини коду при оптимальному кодуванні?
6. Як визначається мінімально середня довжини коду, якщо при цьому забезпечено рівна ймовірність появи знаків вторинного алфавіту?
7. Як визначається відносна надмірність коду?
8. Що стверджує перша теорема Шеннона?
9. Якою є умова Фано для префіксних кодів?
10. Які виконуються процедури при побудові префіксного коду Шеннона-Фано?
11. Які виконуються процедури при побудові проміжного алфавіту префіксного коду Хаффмена?
12. У чому особливість префіксного коду Хаффмена?

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до лабораторних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

1. Побудова оптимальних кодів дискретних повідомлень

Завдання 2.2.1

1. Задати дискретне джерело повідомлень без пам'яті, що вибирає повідомлення $a_k \in A$ та $b_k \in B$, де A, B – множини літер прізвища, імені, по-батькові українською мовою відповідно.
2. Розрахувати ансамбль джерела повідомлень, пов'язавши з кожним дискретним повідомленням a_i ймовірність p_i його вибору джерелом.
3. Розрахувати ентропію джерела.

Приклад виконання завдання 1.1

ІВАНОВ ІВАН ІВАНОВИЧ $A = \{I, B, A, H, O, И, Ч, _\}$

літера	I	B	A	H	O	И	Ч	_
p_i	0,15	0,25	0,15	0,15	0,10	0,05	0,05	0,10

$$H(A) = \sum_{i=1}^k p_i I(a_i), \quad H(A) = 3,156.$$

Завдання 2.2.2

Для ансамблю повідомлень побудувати рівномірний двійковий код з мінімальною довжиною.

Приклад виконання завдання 2.2.2

Кількість різних повідомлень, що генерує джерело, $k = 8$. Тому для рівномірного двійкового коду мінімальна довжина кодового слова складає

$$n = \log_2 k$$

Кодова таблиця має вигляд

літера	код
I	000
B	001
A	010
H	011
O	100
И	101
Ч	110
_	111

Завдання 2.2.3

1. Для ансамблю повідомлень побудувати кодову таблицю та кодове дерево коду Шеннона-Фано.
2. Перевірити оптимальність коду відносно довжини кодових комбінацій.

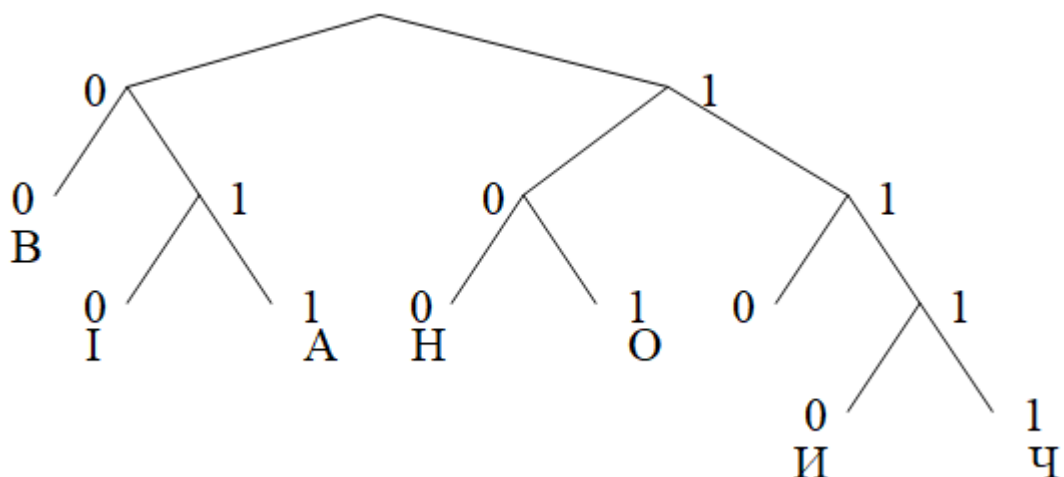
Приклад виконання завдання 2.2.3

Кодова таблиця має вигляд

літера	p_i	Поділ на групи				Код
		перша	друга	третя	четверта	
B	0,25	0,55	0,25			00

I	0,15		0,30	0,15	010	
A	0,15			0,15	011	
H	0,15	0,45	0,25	0,15	100	
O	0,10			0,10	101	
—	0,10		0,20	0,10	110	
И	0,05			0,10	0,05	1110
Ч	0,05				0,05	1111

Кодове дерево має вигляд



Для того щоб перевірити оптимальність коду відносно довжини кодових комбінацій, визначаємо середню довжину кодової комбінації. У разі оптимальності ця довжина не повинна перевищувати довжину рівномірного коду, яким можна закодувати $k = 8$ повідомлень, тобто

$$q^n = 2^n = 8(n = 3):$$

$$n_{\text{сер}} = 0,25 \times 2 + (0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,10 + 0,10) \times 3 + (0,05 + 0,05) \times 4 = 2,85 < 3$$

Завдання 2.2.4

- Для ансамблю повідомлень побудувати нерівномірний префіксний код Хаффмена із використанням:
 - кодової таблиці;
 - кодового дерева.
- Перевірити оптимальність коду відносно довжини кодових комбінацій.

Приклад виконання завдання 2.2.4

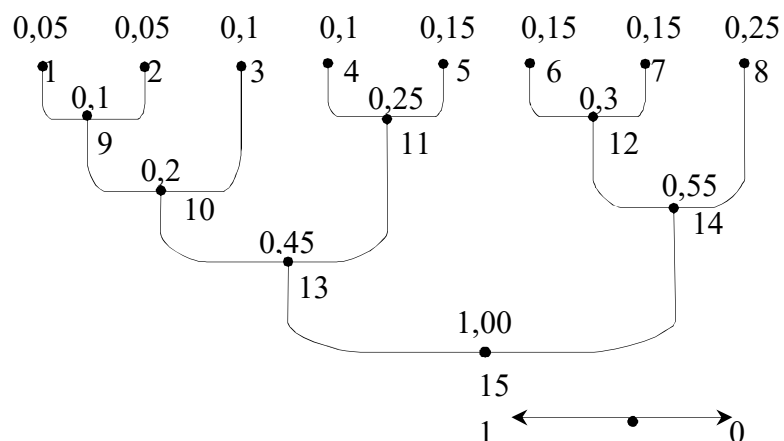
Кодова таблиця має вигляд

Літера	Ймовірності											
	рі	Код	Проміжні алфавіти									
			A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	A(7)			
В	0,25	01	0,25 01	0,25 01	0,25 01	0,3 00	0,45 1	0,55 0	1			
І	0,15	000	0,15 000	0,2 11	0,25 10	0,25 01	0,3 00	0,45 1				
А	0,15	001	0,15 001	0,15 000	0,2 11	0,25 10	0,25 01	0,3 00				
Н	0,15	100	0,15 100	0,15 001	0,15 000	0,2 11	0,25 10	0,25 01				
О	0,1	101	0,1 101	0,15 100	0,15 001	0,2 11	0,25 10	0,25 01				
—	0,1	110	0,1 110	0,1 101	0,15 001	0,2 11	0,25 10	0,25 01				
И	0,05	1110	0,1 111									
Ч	0,05	1111										

Кодове дерево.

Процес побудови кодового дерева є таким. Кожному символу дерева поставимо у відповідність кінцевий вузол кодового дерева. Разом з позначенням символу напишемо біля вузла значення ймовірності його появи. Для зручності пояснення вузли дерева занумеровані. Кінцеві вузли мають номери з 1-го по 8-ий. Далі вибираємо два вузли, яким відповідають найменші значення ймовірностей (це вузли 1 та 2), об'єднуємо (склеюємо) їх, в результаті чого отримуємо новий вузол (номер 9), котрому приписуємо ймовірність, що дорівнює сумі ймовірностей об'єднаних вузлів. Знову вибираємо два вузли з найменшими ймовірностями, але тепер не враховуємо вузли, що були об'єднані (тобто вузли 1 та 2), а беремо до уваги вузол, який з'явився (вузол 9). В даному випадку це вузли 3 та 9. Об'єднуємо їх у вузол 10, та приписуємо ймовірність 0,02. Повторюємо процедуру об'єднання вузлів з найменшими ймовірностями доки не утвориться кореневий вузол. Таким чином отримуємо кодове дерево. Гілки дерева можуть перехрещуватись.

И	Ч	О	—	І	Н	А	В
1	2	3	4	5	6	7	8
0,05	0,05	0,10	0,10	0,15	0,15	0,15	0,25



И	Ч	О	—	І	Н	А	В
1	2	3	4	5	6	7	8
0,05	0,05	0,10	0,10	0,15	0,15	0,15	0,25
1111	1110	110	101	100	011	010	00

Для перевірки оптимальності коду відносно довжини кодових комбінацій визначаємо середню довжину $n_{\text{сер}}$ кодової комбінації

$$n_{\text{сер}} = 0,25 \times 2 + (0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,10 + 0,10) \times 3 + (0,05 + 0,05) \times 4 = 2,85 < 3$$

Висновки

Серед наведених кодів найменшу середню довжину кодової комбінації мають ____ і ____ коди, крім того, код ____ дає можливість ____, отже він і є найбільш оптимальним для заданого джерела.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити результати виконання задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для їх розв'язання на самостійній роботі, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Лабораторна робота 2.3 (4). Обчислення характеристик кодів

Навчальна мета заняття: сформулювати вміння обчислювати і автоматизувати розрахунки характеристик кодів

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Обчислення характеристик кодів

Література:

1. Матеріали лекції 4.
2. [4, с. 121 – 126]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до практичних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Задача 2.3.1.

Алфавіт дискретного джерела інформації налічує 64 символи, які кодуються в кодері рівномірним двійковим завадостійким кодом довжиною $n = 8$. Визначити надмірність такого коду.

Задача 2.3.2.

Визначити кодову відстань між комбінаціями A і B двійкового коду та записати всі комбінації, які знаходяться від комбінації A на кодовій відстані $d = 3$, якщо $A = 01001$, $B = 11101$.

Задача 2.3.3.

Побудувати всі комбінації n -елементного (розрядного) двійкового простого коду, які знаходяться від двійкової комбінації A на кодовій відстані $d = 2$, якщо $A = 10101$, $n = 5$.

Задача 2.3.4. Алфавіт джерела налічує N_0 символів, які кодують рівномірним двійковим простим кодом. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.3.1, визначити надмірність повідомлень, які надходять до каналу

зв'язку з завадами з виходу кодера, де вони кодуються завадостійким кодом, якщо довжина коду на виході кодера n .

Таблиця 2.3.1

№ варіанта	Кількість повідомлень, N_0	Довжина коду, n
1	16	7
2	32	9
3	128	11
4	256	12
5	512	15

Задача 2.3.5. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.3.2, визначити кодову відстань між двійковими комбінаціями A та B двійкового коду та записати всі комбінації, які знаходяться від комбінації A на кодовій відстані d .

Таблиця 2.3.2

№ варіанта	Двійкові кодові комбінації		Кодова відстань, d
	A	B	
1	0110	1101	2
2	10101	01011	3
3	1101001	0011101	4
4	0111000	1000110	5
5	00011101	11100110	6

Задача 2.3.6. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.3.3, побудувати всі комбінації n -елементного двійкового простого коду, які знаходяться від двійкової комбінації A на кодовій відстані d .

Таблиця 2.3.3

№ варіанта	Двійкова кодова комбінація, A	Довжина коду, n	Кодова відстань, d
1	0110	4	2
2	101010	6	3
3	1101001	7	4
4	01110001	8	5
5	111010	6	1,2,3,4

Задача 2.3.7. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.3.4, визначити мінімальну та максимальну кодові відстані Хеммінга d між комбінаціями A , B , C , D двійкового n -елементного простого коду.

Таблиця 2.3.4

№ варіанта	Двійкові кодові комбінації				Довжина коду, n
	A	B	C	D	
1	00011	11011	10101	11110	5
2	100011	011010	010100	011100	6
3	0010000	1101011	0101110	0101101	7
4	11100011	00110110	01010101	11001101	8
5	010101010	110110110	010010101	110011010	9

Задача 2.3.8. Згідно з варіантами, поданими в таблиці 2.3.5, підрахувати кількість всіх комбінацій двійкового n -елементного простого коду, які знаходяться від комбінації A на кодовій відстані Хеммінга d , та побудувати їх.

Таблиця 2.3.5

№ варіанта	Кодова комбінація, A	Довжина коду, n	Кодова відстань, d
1	0110	4	2
2	10000	5	3
3	101001	6	4
4	1010110	7	5
5	01110101	8	6

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Лабораторна робота 2.4 (5). Побудова двійкових кодів, що виявляють помилки

Навчальна мета заняття: сформувати вміння будувати двійкові коди, що виявляють помилки

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Побудова двійкових кодів, що виявляють помилки

Література:

1. Матеріали лекції 6.
2. [2]

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Провести письмове опитування за контрольними питаннями лекції 5. Нагадати класифікацію кодів та основні їх характеристики, принципи побудови кодів:

- з перевіркою на парність;
- з перевіркою на непарність;
- з простим повторенням;
- Бауера;
- кореляційних;
- Бергера;
- з постійною вагою;
- з числом одиниць у комбінації, кратним трьом.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до лабораторних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Побудова двійкових кодів, що виявляють помилки

Закодувати комбінацію A двійкового простого коду двійковими кодами, що виявляють помилки, згідно варіанта, поданого в таблиці 1. Показати на прикладі виявлення помилок, кількість яких визначається заданим варіантом, та порівняти надмірності цих кодів.

Таблиця 1.

№ варі- анта	Первинна кодова комбінація A двійкового простого коду	Двійковий код, що виявляє помилки	Кількість помилки, яка виявляється першим / другим кодом
1	100101010100	ПРП, КБ	1/1
2	11101101101	ПРН, ПП	1/1
3	11011010	КК, КБ	1/1
4	0000011100	ПВ(4), ПП	1/1
5	0000011000	ПВ(3), ОКЗ	1/1
6	10111101011	ІК, КБ	3/1
7	11101010101	ІК, ПП	3/1
8	0011101100	ІК, КК	3/1
9	11000010100	ІК, ПВ(5)	3/1
10	00101010100	ПВ(6), ПРП	1/1
11	100101010100	ПВ(5), ПРН	1/1
12	101111010	КК, ПП	1/1
13	1110010111	КК, КБ	1/1
14	100101011110	ПРП, ПП	1/1
15	100101010100	ПРН, ОКЗ	1/1
16	110000101011	ІК, КБ	3/1
17	010101010101	ІК, ПП	3/1
18	1011101101	ІК, КБ	3/1
19	1100001011	ІК, ПВ(5)	3/1
20	1000000101	ПВ(4), ПРП	1/1
21	1001010101	ПВ(7), ПРН	1/1
22	10111	КК, ПП	1/1
23	11100101	КК, ОКЗ	1/1
24	100101011110	ПРП, ПП	1/1
25	100101010100	ПРН, ОКЗ	1/1

Умовні позначення двійкових кодів, що виявляють помилки: ПРП – з перевіркою на парність; ПРН – з перевіркою на непарність; ПП – з простим повторенням; ІК – інверсний; КК – кореляційний; КБ – Бергера; ОКЗ – з числом одиниць, кратним трьом; ПВ(w) – з постійною вагою w .

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити результати виконання задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для їх розв'язання на самостійній роботі, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Лабораторне заняття 2.5. (6) Коди, що виправляють помилки (Хеммінга, циклічні, БЧХ)

Навчальна мета заняття: сформувати вміння будувати коди, що виправляють помилки, та порівнювати їх характеристики

Кількість годин: 8 год.

Навчальні питання

Вступ

1. Побудова та оцінка кодів, що виправляють помилки

Висновки

Література: [1, л.7].

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Провести письмове опитування за контрольними питаннями:

1. Як утворюється код Хеммінга?
2. Як утворюються вкорочені систематичні (групові) коди?
3. Як утворюється розширений код Хеммінга?
4. Як утворюються циклічні коди з $d_{min} = 3$?
5. Як утворюються коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема (БЧХ)?

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до лабораторних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Побудова та оцінка кодів, що виправляють помилки

Завдання 2.5.1.

1. Задати дискретне джерело повідомлень без пам'яті, що вибирає повідомлення $a_k \in A$ та $b_k \in B$ де A, B – множини літер прізвища, імені, по-батькові українською мовою відповідно.
2. Розрахувати ансамбль джерела повідомлень, пов'язавши з кожним дискретним повідомленням a_i ймовірність p_i його вибору джерелом.
3. Розрахувати ентропію джерела.

Приклад виконання завдання 2.5.1.

ІВАНОВ ІВАН ІВАНОВИЧ $A = \{I, V, A, H, O, I, C, _\}$

літера	I	V	A	H	O	I	C	_
p_i	0,15	0,25	0,15	0,15	0,10	0,05	0,05	0,10

$$H(A) = - \sum_{i=1}^k p_i \log_2 p_i, \quad H(A) = 3,156 \text{ біт.}$$

Завдання 2.5.2.

1. Для ансамблю повідомлень побудувати двійковий лінійний систематичний груповий (блоковий) код та код Хеммінга, здатний виправляти поодинокі помилки.
2. Продемонструвати виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення.

Приклад виконання завдання 2.5.2.

Побудова твірної матриці та визначення комбінацій лінійного систематичного двійкового групового коду, здатного виправляти поодинокі помилки ($s = 1$).

Через те що $N = 2^k = 2^3 = 8$, маємо $k = 3$.

Кількість інформаційних розрядів коду $k = \log_2 8 = 3$. Кількість перевірочних розрядів визначається як найменше ціле r , яке задовольняє нерівності $2^r \geq k + r + 1$; таким значенням буде $r = 3$. Довжина коду $n = k + r = 6$. Таким чином, твірна матриця $G_{n,k}$ має 6 стовпців та 3 рядка, а перевірочна підматриця $C_{r,k}$ має 3 стовпця та 3 рядка.

Згідно з правилом побудови підматриці $C_{r,k}$ кількість одиниць у кожному рядку цієї підматриці повинно бути не менша за $d_{\min} - 1 = 3 - 1 = 2$, а кодова відстань між окремими рядками цієї підматриці – не менша за $d_{\min} - 2 = 3 - 2 = 1$. Тому, з триелементних комбінацій для підматриці $C_{3,3}$ вибираємо тільки ті, які задовольняють цим умовам, тобто 110, 101, 011.

Оскільки як інформаційна підматриця E_k твірної матриці $G_{n,k}$ вибирається одинична підматриця, дописавши до неї перевірну підматрицю, дістанемо твірну матрицю лінійного систематичного групового коду, здатного виправляти однократні помилки:

$$G_{(6,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

За допомогою цієї матриці визначаємо всі вісім комбінацій даного коду:

1. 000000
2. 100101
3. 010011
4. 001110
5. 110110($2 \oplus 3$);
6. 101011 ($2 \oplus 4$);
7. 011101 ($3 \oplus 4$);
8. 111000($2 \oplus 3 \oplus 4$).

Для побудови перевірочної матриці лінійного систематичного двійкового групового коду, здатного виправляти однократні помилки, скористаємось твірною матрицею.

Перевірочна матриця H повинна мати $r=3$ рядки та $n=6$ стовпців. Вона складається з двох підматриць: $D_{(3,3)}$, що містить по три стовпці та рядки, кожний рядок якої відповідає стовпцю перевірочної підматриці $C_{(3,3)}$ твірної матриці $G_{(6,3)}$; одиничної підматриці $E_{(3)}$. Отже,

$$H_{(6,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірні елементи коду згідно з цією матрицею визначаються як $b_1=a_1\oplus a_3$; $b_2=a_2\oplus a_3$; $b_3=a_1\oplus a_2$.

Користуючись перевіркою матрицею $H_{(6,3)}$, виконуємо кодування повідомлень.

Кодова таблиця має вигляд

літера	рівномірний двійковий код	перевірні розряди $b_1=a_1\oplus a_3$ $b_2=a_2\oplus a_3$ $b_3=a_1\oplus a_2$	лінійний систематичний груповий код
І	000	000	000000
В	001	110	001110
А	010	011	010011
Н	011	101	011101
О	100	101	100101
И	101	011	101011
Ч	110	110	110110
—	111	000	111000

Надмірність коду

$$R_{\text{над}}=1-k/n$$

$$R_{\text{над}}=1-3/6=0,5$$

Повідомлення для передачі перших трьох літер прізвища

C = 000000 001110 01001

Виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення.

Нехай в комбінації коду виникла однократна помилка, вектор якої $E=000000\ 000000\ 001000$. Тоді сума $C\oplus E=000000\ 001110\ 011011$.

На приймальному боці для виявлення та виправлення однократної помилки в прийнятій кодовій комбінації виконується перевірка — визначається синдром помилки. Для матриці $H_{(6,3)}$ маємо

$$S_1=a_1\oplus a_3\oplus b_1; S_2=a_2\oplus a_3\oplus b_2; S_3=a_1\oplus a_2\oplus b_3$$

$$000000S_1=0\oplus 0\oplus 0=0; S_2=0\oplus 0\oplus 0=0; S_3=0\oplus 0\oplus 0=0 \quad \text{— без помилок;}$$

$$001110S_1=0\oplus 1\oplus 1=0; S_2=0\oplus 1\oplus 1=0; S_3=0\oplus 0\oplus 0=0 \quad \text{— без помилок;}$$

$$011011S_1=0\oplus 1\oplus 0=1; S_2=1\oplus 1\oplus 1=1; S_3=0\oplus 1\oplus 1=0 \quad \text{— помилка.}$$

Синдром має вигляд 110, що відповідає третьому стовпцю перевіркою матриці $H_{(6,3)}$, тобто помилка знаходиться в третьому розряді прийнятої кодової комбінації. Для її виправлення інвертуємо значення цього розряду. Виправлена комбінація матиме вигляд 010011.

Код Хеммінга

Для розрахунку основних параметрів коду Хеммінга використаємо співвідношення $2^n \geq (n+1) \cdot 2^k$, $n=k+r$. Звідки $k=3$, $n=6$, $r=3$

Характерна особливість перевіркою матриці коду з $d_{\min}=3$ полягає у тому, що її стовпці є різними ненульовими комбінаціями завдовжки r .

$$H_{(6,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & a_1 & b_3 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

Перевірні розряди розміщуються між інформаційними так, щоб номер i -го стовпця матриці H і номер розряду кодової комбінації відповідали двійковому поданню числа i . Тоді синдром, знайдений з перевірних рівнянь, буде двійковим поданням номера розряду кодової комбінації, в якій виникла помилка. Для цього перевірні розряди мають знаходитися не в кінці кодової комбінації, а на номерах позицій, які подаються степенем двійки ($2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{r-1}$).

Згідно з матрицею формуємо систему перевірних рівнянь, за допомогою яких знаходимо перевірні розряди:

$$b_1 = a_1 \oplus a_2, \quad b_2 = a_1 \oplus a_3, \quad b_3 = a_2 \oplus a_3.$$

Кодова таблиця має вигляд

літера	рівномірний двійковий код u_3, u_5, u_6	перевірні розряди $b_1 = a_1 \oplus a_2$ $b_2 = a_1 \oplus a_3$ $b_3 = a_2 \oplus a_3$	код Хеммінга
І	000	000	000000
В	001	011	010101
А	010	101	100110
Н	011	110	110011
О	100	110	111000
И	101	101	101101
Ч	110	011	011110
_	111	000	001011

Надмірність коду

$$R_{\text{над}} = 1 - k/n$$

$$R_{\text{над}} = 1 - 3/6 = 0,5$$

Повідомлення для передачі перших трьох літер прізвища

$$C = 000000 \ 010101 \ 100110$$

Виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення.

Нехай в комбінації коду виникла однократна помилка, вектор якої $E = 000000 \ 000000 \ 001000$. Тоді сума $C \oplus E = 000000 \ 010101 \ 101110$.

На приймальному боці для виявлення та виправлення однократної помилки в прийнятій кодовій комбінації виконується перевірка — визначається синдром помилки.

$$S_1 = b_3 \oplus a_2 \oplus a_3; \quad S_2 = b_2 \oplus a_1 \oplus a_3; \quad S_3 = b_1 \oplus a_1 \oplus a_2$$

$$000000 S_1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0; \quad S_2 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0; \quad S_3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \quad \text{- без помилок;}$$

$$010101 S_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0; \quad S_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0; \quad S_3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \quad \text{- без помилок;}$$

$$101110 S_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0; \quad S_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1; \quad S_3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \quad \text{- помилка.}$$

Синдром має вигляд 011, тобто помилка знаходиться в третьому розряді прийнятої кодової комбінації. Для її виправлення інвертуємо значення цього розряду. Виправлена комбінація матиме вигляд 100110.

Завдання 2.5.3.

1. Для ансамблю повідомлень побудувати двійковий циклічний код.
2. Продемонструвати виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення.

Приклад виконання завдання 2.5.3.

Щоб побудувати циклічний код, необхідно вибрати твірний поліном $P(x)$. Його степінь визначається кількістю r перевірних елементів у комбінації циклічного коду, причому значення r при $d_{\min}=3$ можна знайти з виразу $2^r-1 \geq n$ або $2^r \geq k+r+1$. Отже, при $k=3$ маємо $r=3$, твірний поліном: $P(x)=x^3+x+1$.

Для побудови твірної матриці (формування її рядків) беремо комбінації $Q(x)$ двійкового простого коду, які містять одиницю в одному розряді $Q_i(x)$, де $i=1,2,\dots,k$. Ці комбінації множимо на x^r і знаходимо остачу від ділення $x^r Q_i(x)/P(x)$, що дорівнює $R_i(x)$.

Отже, для циклічного $(6,3)$ -коду з $n=6$, $k=3$ і твірним поліномом $P(x)=x^3+x+1$, беремо триелементні одиничні комбінації Q_i двійкового простого коду: $Q_1(x)=1$ (001); $Q_2(x)=x$ (010); $Q_3(x)=x^2$ (100). Вибрані комбінації $Q_i(x)$ множимо на x^3 ($r=n-k=6-3=3$), ділимо на $P(x)=x^3+x+1$ і знаходимо остачі:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^3+x+1 \\ \oplus x^3+x+1 & 1 \\ \hline & x+1 \end{array}$$

$$\frac{1x^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_1(x) = x+1 \rightarrow 011$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3+x+1 \\ \oplus x^4+x^2+x & x \\ \hline & x^2+x \end{array}$$

$$\frac{xx^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_2(x) = x^2+x \rightarrow 110$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^3+x+1 \\ \oplus x^5+x^3+x^2 & x^2+1 \\ \hline & x^3+x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \oplus x^3+x+1 & \\ \hline & x^2+x+1 \end{array}$$

$$\frac{x^2x^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_3(x) = x^2+x+1 \rightarrow 111$$

Твірна матриця матиме вигляд

$$G_{(6,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірна матриця H повинна мати $r=3$ рядки та $n=6$ стовпців. Вона складається з двох підматриць: $D_{(3,3)}$, що містить по три стовпці та рядки, кожний рядок якої відповідає стовпцю перевірної підматриці $C_{(3,3)}$ твірної матриці $G_{(6,3)}$; одиничної підматриці $E_{(3)}$. Отже,

$$H_{(6,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірні елементи коду згідно з цією матрицею визначаються як $b_1=a_1\oplus a_2$; $b_2=a_1\oplus a_2\oplus a_3$; $b_3=a_1\oplus a_3$.

Користуючись перевіркою матрицею $H_{(6,3)}$, виконуємо кодування повідомлень.

Кодова таблиця має вигляд

літера	рівномірний двійковий код	перевірні розряди $b_1=a_1\oplus a_2$ $b_2=a_1\oplus a_2\oplus a_3$ $b_3=a_1\oplus a_3$	циклічний код
І	000	000	000000
В	001	011	001011
А	010	110	010110
Н	011	101	011101
О	100	111	100111
И	101	100	101100
Ч	110	001	110001
—	111	010	111010

Надмірність коду

$$R_{\text{над}}=1-k/n$$

$$R_{\text{над}}=1-3/6=0,5$$

Повідомлення для передачі перших трьох літер прізвища

$$C=000000\ 001011\ 010110$$

Виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення.

Нехай в комбінації коду виникла однократна помилка, вектор якої $E=000000\ 000000\ 001000$. Тоді сума $C\oplus E=000000\ 001011\ 011110$.

На приймальному боці для виявлення та виправлення однократної помилки в прийнятій кодовій комбінації виконується перевірка — визначається синдром помилки.

$$S_1=a_1\oplus a_2\oplus b_1; S_2=a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus b_2; S_3=a_1\oplus a_3\oplus b_3$$

$$000000S_1=0\oplus 0\oplus 0=0; S_2=0\oplus 0\oplus 0\oplus 0=0; S_3=0\oplus 0\oplus 0=0 \quad \text{- без помилок;}$$

$$001011S_1=0\oplus 0\oplus 0=0; S_2=0\oplus 0\oplus 1\oplus 1=0; S_3=0\oplus 1\oplus 1=0 \quad \text{- без помилок;}$$

$$011110S_1=0\oplus 1\oplus 1=0; S_2=0\oplus 1\oplus 1\oplus 1=1; S_3=0\oplus 1\oplus 0=1 \quad \text{- помилка.}$$

Синдром має вигляд 011, що відповідає третьому стовпцю перевіркою матриці $H_{(6,3)}$, тобто помилка знаходиться в третьому розряді прийнятої кодової комбінації. Для її виправлення інвертуємо значення цього розряду. Виправлена комбінація матиме вигляд 010011.

Виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення, що ґрунтується на застосуванні твірного полінома $P(x)$.

Поліном прийнятої комбінації циклічного коду $F'(x)=F(x)+E(x)$.

На приймальному боці декодер виконує перевірку ділення комбінації $F'(x)$ на поліном $P(x)$, використаний при кодуванні інформації:

$$\begin{array}{r} 000000 \quad | \quad 1011 \quad 001011 \quad | \quad 1011 \quad 011110 \quad | \quad 1011 \\ \oplus 0000 \quad | \quad 0 \quad \oplus 1011 \quad | \quad 001 \quad \oplus 1011 \quad | \quad 010 \\ \hline 0 \rightarrow 0 \quad \quad \quad 0 \rightarrow 0 \quad \quad \quad 1000 \rightarrow x^3 \end{array}$$

Оскільки остача від ділення в третій кодовій комбінації не дорівнює нулю, робимо висновок про наявність помилки в прийнятій кодовій комбінації.

Для визначення місця помилки користуємося методом гіпотез:

- будуюмо гіпотезу про помилку в молодшому розряді комбінації $F'(x)$, тобто вважаємо, що вектор помилки $E_1(x)=1 \rightarrow E_1=000001$. Виконавши додавання $F' \oplus E_1$ поділивши результат на поліном $P(x)$ з метою підтвердження (в разі нульової остачі) або спростування (в разі ненульової остачі) гіпотези, дістанемо

$$\begin{array}{r} 011110 \\ \oplus 000001 \\ \hline 011111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 011111 \\ \oplus 1011 \\ \hline 1001 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1011 \\ | 010 \\ \hline \end{array}$$

$$1001 \rightarrow R(x)=x^3+1$$

тобто остача ненульова й гіпотеза відкидається;

- будуюмо гіпотезу про помилку в п'ятому розряді комбінації $F'(x)$, тобто вважаємо, що вектор помилки $E_2(x)=2 \rightarrow E_2=000010$. Виконавши додавання $F' \oplus E_2$ та поділивши результат на поліном $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези, матимемо

$$\begin{array}{r} 011110 \\ \oplus 000010 \\ \hline 011100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 011100 \\ \oplus 1011 \\ \hline 1010 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1011 \\ | 010 \\ \hline \end{array}$$

$$1010 \rightarrow R(x)=x^3+x$$

тобто остача ненульова й гіпотеза відкидається;

- будуюмо гіпотезу про помилку в четвертому розряді комбінації $F'(x)$, тобто вважаємо, що вектор помилки $E_3(x)=3 \rightarrow E_3=000100$. Виконавши додавання $F' \oplus E_3$ та поділивши результат на поліном $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези, знайдемо

$$\begin{array}{r} 011110 \\ \oplus 000100 \\ \hline 011010 \end{array} \quad \begin{array}{r} 011010 \\ \oplus 1011 \\ \hline 1100 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1011 \\ | 011 \\ \hline \end{array}$$

$$\oplus 1011$$

$$0111 \rightarrow R(x)=x^2+x+1$$

тобто остача ненульова й гіпотеза відкидається;

- будуюмо гіпотезу про помилку в третьому розряді комбінації $F'(x)$, тобто вважаємо, що вектор помилки $E_4(x)=4 \rightarrow E_4=001000$. Виконавши додавання $F' \oplus E_4$ та поділивши результат на поліном $P(x)$ з метою підтвердження або спростування гіпотези, дістанемо

$$\begin{array}{r} 011110 \\ \oplus 001000 \\ \hline 010110 \end{array} \quad \begin{array}{r} 010110 \\ \oplus 1011 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1011 \\ | 010 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \rightarrow R(x)=0$$

тобто помилка дійсно є в третьому розряді, а початкова комбінація циклічного коду має вигляд $F=010110 \rightarrow F(x)=x^4+x^2+x$.

Завдання 2.5.4.

1. Для ансамблю повідомлень побудувати двійковий код БЧХ, здатний виправляти поодинокі помилки.
2. Продемонструвати виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення.

Приклад виконання завдання 2.5.4.

Довжину n комбінації кодів БЧХ можна визначити так: $n = 2^h - 1$ або $n = (2^h - 1)/g$, де $h > 0$ — ціле число; g — непарне додатне число, при діленні на яке n стає цілим непарним числом. Таким чином, довжина n може дорівнювати 3, 7, 15, 31 розрядам і т.д. Кількість перевірних елементів коду визначається виразом

$$r \leq \frac{h(d-1)}{2} = \left[\log_2(n+1) \right] \frac{d-1}{2},$$

а кількість інформаційних елементів — виразом

$$k \geq \left(2^h - 1 \right) - \frac{h(d-1)}{2} \quad \text{або } k = n - r.$$

Отже, при $n=7$ маємо $r=3$, $k=4$, твірний поліном: $P(x)=x^3+x+1$.

Для побудови твірної матриці (формування її рядків) беремо комбінації $Q(x)$ двійкового простого коду, які містять одиницю в одному розряді $Q_i(x)$, де $i=1,2,\dots,k$. Ці комбінації множимо на x^r і знаходимо остачу від ділення $x^r Q_i(x)/P(x)$, що дорівнює $R_i(x)$.

Отже, беремо чотириелементні одиничні комбінації Q_i двійкового простого коду: $Q_1(x)=1$ (0001); $Q_2(x)=x$ (0010); $Q_3(x)=x^2$ (0100); $Q_4(x)=x^3$ (1000). Вибрані комбінації $Q_i(x)$ множимо на x^3 ($r=n-k=7-4=3$), ділимо на $P(x)=x^3+x+1$ і знаходимо остачі:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^3+x+1 \\ \oplus x^3+x+1 & 1 \\ \hline x+1 & \end{array}$$

$$\frac{1x^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_1(x) = x+1 \rightarrow 011$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3+x+1 \\ \oplus x^4+x^2+x & x \\ \hline x^2+x & \end{array}$$

$$\frac{xx^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_2(x) = x^2+x \rightarrow 110$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^3+x+1 \\ \oplus x^5+x^3+x^2 & x^2+1 \\ \hline x^3+x^2 & \\ \oplus x^3+x+1 & \\ \hline x^2+x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2x^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_3(x) = x^2+x+1 \rightarrow 111$$

$$\begin{array}{r|l} x^6 & x^3+x+1 \\ \oplus x^6+x^4+x^3 & x^3+x+1 \\ \hline x^4+x^3 & \\ \oplus x^4+x^2+x & \\ \hline x^3+x^2+x & \\ \oplus x^3+x+1 & \\ \hline x^2+x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3x^3}{x^3+x+1} \rightarrow R_4(x) = x^2+x+1 \rightarrow 111$$

Твірна матриця матиме вигляд

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірні матриця H повинна мати $r=3$ рядки та $n=7$ стовпців.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірні елементи коду згідно з цією матрицею визначаються як $b_1=a_1\oplus a_2\oplus a_3$; $b_2=a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_4$; $b_3=a_1\oplus a_2\oplus a_4$.

Користуючись перевіркою матрицею, виконуємо кодування повідомлень.

Кодова таблиця має вигляд

літера	рівномірний двійковий код	перевірні розряди $b_1=a_1\oplus a_2\oplus a_3$ $b_2=a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_4$ $b_3=a_1\oplus a_2\oplus a_4$	код БЧХ
І	0000	000	0000000
В	0001	011	0001011
А	0010	110	0010110
Н	0011	101	0011101
О	0100	111	0100111
И	0101	100	0101100
Ч	0110	001	0110001
—	0111	010	0111010

Надмірність коду $R_{\text{над}}=1-3/7=0,65$

(один інформаційний розряд не використовується)

Повідомлення для передачі перших трьох літер прізвища

$C=0000000 \ 0001011 \ 0010110$

Виявлення та виправлення помилки при передачі повідомлення виконується як для циклічних кодів.

Інший варіант $n=7$, $r=3$, $k=4$, $s=1$, твірний поліном: $P(x)=x^3+x^2+1$.

Для побудови твірної матриці (формування її рядків) беремо комбінації $Q(x)$ двійкового простого коду, які містять одиницю в одному розряді $Q_i(x)$, де $i=1,2,\dots,k$. Ці комбінації множимо на x^r і знаходимо остачу від ділення $x^r Q_i(x)/P(x)$, що дорівнює $R_i(x)$.

Отже, беремо чотириелементні одиничні комбінації Q_i двійкового простого коду: $Q_1(x)=1$ (0001); $Q_2(x)=x$ (0010); $Q_3(x)=x^2$ (0100); $Q_4(x)=x^3$ (1000). Вибрані комбінації $Q_i(x)$ множимо на x^3 ($r=n-k=7-4=3$), ділимо на $P(x)=x^3+x^2+1$ і знаходимо остачі:

$$\begin{array}{r} x^3 \\ \oplus x^3+x^2+1 \\ \hline x^2+1 \end{array} \quad \begin{array}{r} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{r} x^3+x^2+1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{1x^3}{x^3+x^2+1} \rightarrow R_1(x) = x^2+1 \rightarrow 101$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3+x^2+1 \\ \oplus x^4+x^3+x & x+1 \\ \hline x^3+x & \\ \oplus x^3+x^2+1 & \\ \hline x^2+x+1 & \end{array}$$

$$\frac{xx^3}{x^3+x^2+1} \rightarrow R_2(x) = x^2 + x + 1 \rightarrow 111$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^3+x^2+1 \\ \oplus x^5+x^4+x^2 & x^2+x+1 \\ \hline x^4+x^2 & \\ \oplus x^4+x^3+x & \\ \hline x^3+x^2+x & \\ \oplus x^3+x^2+1 & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2x^3}{x^3+x^2+1} \rightarrow R_3(x) = x + 1 \rightarrow 011$$

$$\begin{array}{r|l} x^6 & x^3+x^2+1 \\ \oplus x^6+x^5+x^3 & x^3+x^2+x+1 \\ \hline x^5+x^3 & \\ \oplus x^5+x^4+x^2 & \\ \hline x^4+x^3+x^2 & \\ \oplus x^4+x^3+x & \\ \hline x^2+x & \end{array}$$

$$\frac{x^3x^3}{x^3+x^2+1} \rightarrow R_4(x) = x^2 + x \rightarrow 110$$

Твірна матриця матиме вигляд

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Перевірні матриця H повинна мати $r=3$ рядки та $n=7$ стовпців.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірні елементи коду згідно з цією матрицею визначаються як $b_1=a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$; $b_2=a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$; $b_3=a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$.

Користуючись перевіркою матрицею, виконуємо кодування повідомлень.

Кодова таблиця має вигляд

літера	рівномірний двійковий код	перевірні розряди $b_1=a_1 \oplus a_2 \oplus a_4$ $b_2=a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$ $b_3=a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$	код БЧХ
І	0000	000	0000000
В	0001	110	0001110
А	0010	011	0010011
Н	0011	101	0011101
О	0100	111	0100111
И	0101	001	0101001
Ч	0110	100	0110100

	0111	010	0111010
--	------	-----	---------

Надмірність коду

$$R_{\text{над}} = 1 - 3/7 = 0,65$$

(один інформаційний розряд не використовується)

Повідомлення для передачі перших трьох літер прізвища

$C = 00000000\ 00011110\ 0010011$

Висновки

Серед наведених кодів найменшу надмірність мають ____ і ____ коди, крім того, код ____ дає можливість ____, отже він і є найбільш оптимальним для заданого джерела.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити результати виконання задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для їх розв'язання на самостійній роботі, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Оголосити тему наступного заняття.

Лабораторна робота 2.6 (8). Словникові методи стиснення повідомлень

Навчальна мета заняття: закріпити знання щодо словникових методів стиснення повідомлень

Кількість годин: 4 год.

Навчальні питання

1. Розв'язання задач по стисненню повідомлень словниковими методами

Література:

Матеріали лекції 2.7.

Матеріально-технічне забезпечення: комп'ютерна мережа із підключенням до Internet; медіа проектор.

План проведення заняття

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Зробити огляд завдання і визначити порядок його виконання. Надати посилання на відповідні презентації.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Здобувачі вищої освіти згідно керівництва до лабораторних занять за темою виконують задачі навчальних питань.

Викладач також синхронно виконує задачі заняття із виводом зображення монітору на екран проектору.

У ході заняття викладач надає потрібну допомогу та пояснює окремі елементи задач.

Задача 2.8.1

Записати своє ім'я і прізвище на англійській мові. Представити текстове повідомлення двійковим кодом згідно таблиці ASCII. Стиснути повідомлення алгоритмом LZ77.

Задача 2.8.2

Записати три рази без пробілу своє ім'я і поставити маркер кінця повідомлення #, наприклад, так: AliceAliceAlice#. Представити текстове повідомлення двійковим кодом згідно таблиці ASCII. Стиснути повідомлення алгоритмом LZW. Обчислити коефіцієнт стиснення.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Перевірити у декількох здобувачів результати виконання поставлених задач, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна

1. Гнусов Ю.В., Носов В.В. «Теорія інформації та кодування». Харків, ХНУВС, 2023 р.
2. Носов В.В. Електронний курс лекцій «Теорія інформації та кодування». Харків, ХНУВС, 2018 р.
3. Подлевський Б.М., Рикалюк Р.Є. Теорія інформації в задачах: підручник. – Київ «Центр учбової літератури», 2017, - 271 с. URL: <http://surl.li/ejjeh>

Допоміжна

4. Кожевников В.Л., Кожевников А.В. Теорія інформації та кодування : навч. посібник – Д.: Національний гірничий університет, 2011. – 108 с. URL: <http://surl.li/excml>
5. Курко А.М., Решетник В.Я. Введення в теорію інформації : Навч. посібник.– Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2017. – 108 с. URL: <http://surl.li/excku>

Інформаційні ресурси

6. <https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/informationtheory>
7. https://www.youtube.com/playlist?list=PLSQ10a2vh4HC9lvrBhVt4UUhkzpp3N5_x
8. <https://www.youtube.com/watch?v=bkLHszLIH34>
9. <https://www.youtube.com/watch?v=YtebGVx-Fxw>
10. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLE125425EC837021F>