

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

*Факультет № 6
Кафедра соціології та психології*

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «**Математичні методи в психології**»
обов'язкових компонент
освітньої програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

053 Психологія (практична психологія)

Тема №7. Параметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних.

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО

Вченою радою факультету № 6
Протокол від 25.08.2023 № 7

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної
ради ХНУВС гуманітарних та
соціально- економічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні кафедри соціології та психології (протокол №8 від 15.08.2023)

Розробник:

Доцент кафедри соціології та психології, кандидат психологічних наук, доцент
Твердохвалова Ю.Л.

Рецензенти:

1. Професор кафедри психології Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди, доктор психологічних наук, професор, Кузнєцов М.А.
2. Доцент кафедри соціології та психології факультету № 6 Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат психологічних наук, доцент Греса Н.В.

План лекції

- 7.1.** Теоретичні засади та сфера застосування t-критерію Стьюдента
- 7.2.** Статистичний критерій t-Стьюдента для однієї вибірки
- 7.3.** Статистичний критерій t-Стьюдента для незалежних вибірок
- 7.4.** Статистичний критерій t-Стьюдента для залежних вибірок

Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна:

1. Климчук В.О. Математичні методи у психології. Навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. Київ : Освіта України. 2009. 288 с.
2. Телейко А.Б. Чорней Р.К. Математико-статистичні методи в соціології та психології : Навч. посібник. Київ : МАУП, 2007. 424 с.
3. Руденко В.М., Руденко Н.М. Математичні методи в психології : підручник. Київ : Академвидав, 2009. 384 с.

Допоміжна:

1. Літнарів Р.М. Основи математичної статистики у психології : Навчальний посібник. Ч.3. Рівне : МЕРУ, 2006. 49 с.
2. Татьянчиков А.О. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з курсу «Методи психологічного дослідження: математичні методи в психології». Одеса : Вид-во Університету Ушинського, 2019. 38 с.
3. Климчик В.О. Кластерний аналіз: використання в психологічних дослідженнях// Практична психологія та соціальна робота. 2006. №4. С. 30-36.
4. Циба В.Т. Математичні основи соціологічних досліджень: кваліметричний підхід. - К.: МАУП, 2002. - 248 с.
5. Климчук В.О. Викладання курсу “Математичні методи у психології” в умовах кредитно-модульної системи // Соціальна психологія. 2008. №2 (28). С. 180-189.

Текст лекції

7.1. Теоретичні засади та сфера застосування t-критерію Стьюдента

Для порівняння вибірових середніх величин, які належать до двох сукупностей даних, і для вирішення питання про те, чи відрізняються середні значення статистично достовірно один від одного, використовують t- критерій Стьюдента або його непараметричні аналоги

Критерій розроблений англійським математиком Вільямом С. Госсетом (1876-1937). «Стьюдент» - це псевдонім, під яким В. Госсет друкував свої роботи, працюючи в Дубліні на пивоварні Артура Гіннеса. Інший дослідник, який свого часу працював на Гіннеса, опублікував статтю, що містила конфіденційну комерційну інформацію, - з того часу працівникам підприємства було заборонено публікуватися (незалежно від змісту публікації). Тож В. Госсет, щоб уникнути розголосу і обійти заборону, друкував свої роботи під псевдонімом.

В. Госсет тісно співпрацював із К. Пірсоном (багато його робіт надруковано у Пірсонівському журналі «Біометрика»), і саме К. Пірсон відправив його роботу «The probable error of a mean», у якій власне і дається опис t-статистики Р. Фішеру. Завдяки пропозиціям Р. Фішера t-критерій набув сучасного вигляду.

У вітчизняній традиції прийнято говорити про t-критерій Стьюдента. В англomовній літературі і в статистичних програмах вживають термін «Т- тест».

Критерій t-Стьюдента використовується у трьох випадках:

- 1) порівняння середніх показників двох залежних вибірок (t-критерій для залежних вибірок);
- 2) порівняння середніх показників двох незалежних вибірок (t-критерій для незалежних вибірок);
- 3) порівняння середнього показника однієї вибірки із певною заданою величиною (t-критерій для однієї вибірки).

Застосовувавши критерій Стьюдента, ми дізнаємося, наскільки статистично значимі відмінності між двома вибірками і, відповідно, наскільки впевнено можна робити висновки про ці відмінності. Ситуації застосування критерію Стьюдента за змістом не відрізняються від ситуацій застосування критерію Манна-Уїтні, критерій знаків чи критерію Т- Вілкоксона - основна відмінність лежить у царині формальних характеристик числових даних. Зокрема, критерій Стьюдента значно потужніший за свої непараметричні аналоги, але вимагає дотримання двох вимог: 1) відповідності числових даних параметрам нормального розподілу; 2) рівності дисперсій двох вибірок, які порівнюються між собою.

Алгоритм застосування t-критерію Стьюдента:

1. Перевірка нормальності розподілу даних у вибірках, що порівнюються.
2. Перевірка рівності (гомогенності) дисперсій незалежних вибірок або перевірка наявності прямого кореляційного зв'язку між залежними вибірками.
3. Власне обчислення t-критерію (схема обчислення критерію різниться залежно від того, порівнюються залежні чи незалежні вибірки; однаковий чи різний обсяг вибірок).
4. Порівняння отриманого емпіричного значення t-критерію із критичним табличним значенням і висновок про підтвердження чи спростування нульової гіпотези про відсутність відмінностей.

Обчислення t-критерію Стьюдента (без застосування комп'ютера)

1. Перевірка нормальності розподілу даних у вибірках, що порівнюються. На нормальність перевіряють обидві вибірки. Для цього розраховують для кожної вибірки емпіричні значення асиметрії та ексцесу та порівнюють їх із критичними значеннями.

Емпіричне значення асиметрії розраховується за такою формулою:

$$A = \frac{\sum_i z_i^3}{n}$$

Формула для емпіричної величини ексцесу має такий вигляд:

$$E = \frac{\sum_i z_i^4}{n} - 3$$

Для обчислення величин z слід знайти середнє арифметичне (\bar{X}) та стандартне відхилення (5) і потім розрахувати значення z , за формулою:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}$$

Розрахунок стандартного відхилення роблять за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Для розрахунків критичних значень асиметрії та ексцесу користуються формулами:

$$A_{\text{крит}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}}$$

$$E_{\text{крит}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}}$$

У всіх випадках n – обсяг вибірки.

Далі емпіричні значення асиметрії та ексцесу порівнюють із критичними значеннями. Рішення про нормальність розподілу даних приймають, якщо отримані емпіричні значення менші за критичні.

Перевірка нормальності розподілу є обов'язковою процедурою для t -критерію Стюдента, оскільки він був розроблений виключно для аналізу даних, розподілених нормально. У випадку проведення обчислень на комп'ютері у програмах Statistica, SPSS є статистичні критерії для перевірки нормальності - критерій Колмогорова-Смирнова, критерій Лілліфорса, W -критерій Шапіро-Вілکا. Останнім часом більшість закордонних дослідників орієнтуються на критерій Лілліфорса, який власне є удосконаленим критерієм Колмогорова-Смирнова, або на критерій Шапіро-Вілкса. Зверніть увагу, що перевірка нормальності полягає у аналізі відмінностей між частотним розподілом, побудованим на основі ваших даних, і нормальним розподілом, тому позитивним результатом є підтвердження нульової гіпотези - отримання статистично не значимого результату, при якому p більше 0,05 ($p > 0,05$). Якщо перевірка нормальності дала негативний результат ($p < 0,05$) - скористайтесь непараметричними критеріями.

1. Перевірка рівності (гомогенності) дисперсій незалежних вибірок.

Для перевірки гомогенності дисперсій А.Д. Наследов пропонує використовувати критерій F -Фішера (який теж є параметричним). Перш за все слід сформулювати дві статистичні гіпотези:

$H_0: \delta_1^2 = \delta_2^2$ (дисперсії обох вибірок рівні)
 $H_1: \delta_1^2 \neq \delta_2^2$ (дисперсії обох вибірок нерівні)

Для проведення обчислень необхідно скористатися формулою F- критерію Фішера:

$$F_{\text{емп}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}; df_{\text{чис}} = n_1 - 1; df_{\text{знам}} = n_2 - 1$$

Критичні значення ($F_{\text{крит.}}$) шукають у таблиці критичних значень F- критерію Фішера для перевірки ненаправлених альтернатив.

Якщо $F_{\text{емп}} \geq F_{\text{крит}}$ - приймають рішення про підтвердження гіпотези про нерівність дисперсій на рівні $p < 0,05$ і, відповідно, слід застосовувати не критерій Стюдента у стандартній формі, а критерій Велша (модифікований критерій Стюдента для незалежних вибірок із негомогенними дисперсіями).

Для перевірки гомогенності дисперсій незалежних вибірок у програмі Statistica є два критерії: критерій Левена та критерій Брауна-Форсайта. Ці критерії доступні в діалоговому вікні обчислення критерію Стюдента. Зауважимо, що критерій Брауна-Форсайта рекомендують використовувати для порівняння дисперсій вибірок різного обсягу.

7.2. Статистичний критерій t-Стюдента для однієї вибірки

Алгоритм обчислення t-критерію Стюдента для однієї вибірки

1. Сформулюйте статистичні гіпотези:

H_0 - відмінності між \bar{X} та A випадкові і незначимі.

H_1 - відмінності між \bar{X} та A достовірні, значимі.

2. Обчисліть емпіричне значення t-критерію ($t_{\text{емп}}$) за формулою:

$$t_{\text{емп}} = \frac{|\bar{X} - A|}{\sigma / \sqrt{n}}; df = n - 1$$

\bar{X} - середнє арифметичне;

A - величина, з якою середнє арифметичне порівнюється;

δ - стандартне відхилення;

n - обсяг вибірки;

df - число ступенів свободи.

3. Врахувавши число ступенів свободи (df) за таблицею критичних значень критерію t-Стюдента, знайдіть $t_{\text{крит}}$ і порівняйте отримані значення:

- якщо $t_{\text{емп}} \geq t_{\text{табл}}$ - приймають гіпотезу H_1 ;

- якщо $t_{\text{емп}} < t_{\text{табл}}$ - приймають гіпотезу H_0 .

7.3. Статистичний критерій t-Стюдента для незалежних вибірок

Обчислення t-критерію Стюдента для незалежних вибірок (гомогенні дисперсії)

Формальним критерієм незалежності вибірок є відсутність кореляції між ними. З точки зору змісту - незалежними є ті вибірки, між якими не можна виявити жодних зв'язків. Прикладом незалежних вибірок можуть бути рандомізовані (сформовані випадковим чином) контрольна та експериментальна група, два класи у школі, дві студентські групи тощо.

1. Сформулюйте статистичні гіпотези:

H_0 - відмінності між \bar{X}_1 та \bar{X}_2 випадкові і незначимі.

H_1 - відмінності між \bar{X}_1 та \bar{X}_2 достовірні, значимі.

2. Обчисліть емпіричне значення t-критерію ($t_{\text{емп}}$) за формулою, якщо обсяги вибірок однакові:

$$t_{\text{емп}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}; df = 2n - 2$$

Якщо обсяги вибірок різні то емпіричне значення t-критерію ($t_{\text{емп}}$) обчислюється за формулою:

$$t_{\text{емп}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}; df = n_1 + n_2 - 2$$

\bar{X}_1 та \bar{X}_2 - середнє арифметичне;
 δ_1^2, δ_2^2 - стандартні відхилення відповідних вибірок;
 n, n_1, n_2 - обсяги вибірок;
 df - число ступенів свободи.

3. Врахувавши число ступенів свободи (df) за таблицею критичних значень критерію t-Стюдента, знайдіть $t_{\text{крит}}$ і порівняйте отримані значення:

- якщо $t_{\text{емп}} \geq t_{\text{табл}}$ - приймають гіпотезу H_1 ;
- якщо $t_{\text{емп}} < t_{\text{табл}}$ - приймають гіпотезу H_0 .

Обчислення t-критерію Велша для незалежних вибірок (модифікований t-критерій Стюдента для вибірок із негомогенними дисперсіями)

Процедура обчислення критерію Велша відрізняється лише формулою для обчислення величини t та числа ступенів свободи:

$$t_{\text{емп}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \frac{(\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)^2}{(\sigma_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (\sigma_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

\bar{X}_1 та \bar{X}_2 - середнє арифметичне;
 δ_1^2, δ_2^2 - стандартні відхилення відповідних вибірок;
 n_1, n_2 - обсяги вибірок;
 df - число ступенів свободи.

7.4. Статистичний критерій t-Стюдента для залежних вибірок

Формальним критерієм залежності вибірок є наявність кореляції між ними. З точки зору змісту - залежними є ті вибірки, між членами якої яких можна встановити однозначну відповідність. Прикладом залежних вибірок може бути експериментальна група до та після експериментального впливу. До певної міри залежними можна вважати вибірки, одна з яких сформована із чоловіків, а друга - з їх дружин, або одна вибірка - брати, друга - їх сестри.

Обчислення t-критерію Стюдента для залежних вибірок

1. Сформулюйте статистичні гіпотези:

H_0 - відмінності між \bar{X}_1 та \bar{X}_2 випадкові і незначимі.

H_1 - відмінності між \bar{X}_1 та \bar{X}_2 достовірні, значимі.

2. Оскільки тут ми маємо справу із залежними вибірками, фактично - із парами значень, то одиницею аналізу є різниця між цими парами значень. Саме тому спершу слід обчислити величини d_i - різниці між усіма парами значень.

3. Обчисліть емпіричне значення t-критерію ($t_{\text{емп}}$) за формулою:

$$t_{\text{емп}} = \frac{|X_d|}{\sigma_d / \sqrt{n}}; df = n - 1$$

X_d - середнє арифметичне різниці пар значень;

δ_d - стандартне відхилення різниці пар значень;

n - обсяг вибірок;

df - число ступенів свободи.

3. Врахувавши число ступенів свободи (df) за таблицею критичних значень критерію t-Стюдента, знайдіть $t_{\text{крит}}$ і порівняйте отримані значення:

- якщо $t_{\text{емп}} \geq t_{\text{крит}}$ - приймають гіпотезу H_1 ;
- якщо $t_{\text{емп}} < t_{\text{крит}}$ - приймають гіпотезу H_0 .

Обмеження застосування

Оскільки t-критерій Стюдента є параметричним, його застосування супроводжується рядом обмежень. Загальне обмеження для усіх варіантів критерію Стюдента - нормальність розподілу. Якщо дані розподілені ненормально, застосовувати критерій Стюдента не можна.

Обмеження, яке стосується виключно t-критерію Стюдента для незалежних вибірок, - гомогенність дисперсій обох вибірок. Якщо дисперсії негомогенні, користуватися цим варіантом критерію Стюдента не можна, - слід обрати критерій Велша.

Останнє обмеження стосовно t-критерію Стюдента для залежних вибірок - наявність значимого прямого кореляційного зв'язку між залежними вибірками. Якщо такої прямої кореляції немає, користуватися цим варіантом критерію Стюдента теж не можна.

Стосовно обсягів вибірок, жорстких обмежень немає. Однак дуже важко отримати нормальний розподіл на малих вибірках, тому досить часто дослідники для малих вибірок не проводять перевірки нормальності, а одразу застосовують непараметричні критерії (Манна-Уїтні, Вілкоксона тощо). Подібний крок відносно великих вибірок і критерію Стюдента є неправильним, адже великий обсяг вибірки зовсім не є гарантією нормальності розподілу даних.

Завдання на самостійну підготовку

1. Особливості використання та алгоритм розрахунку критерію t-Стюдента для однієї вибірки.
2. Особливості використання та алгоритм розрахунку критерію t-Стюдента для залежних вибірок.
3. Особливості використання та алгоритм розрахунку критерію t-Стюдента для незалежних вибірок.