МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія авіаційного і радіоелектронного обладнання

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни
«Основи електрики та електроніки, електричні вимірювання та їх стандартизація»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
(Оператор безпілотних літальних апаратів)

за темою № 10 - Електричні кола однофазного синусоїдального змінного струму. Метод комплексних амплітуд

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, протокол від 28.08.2023р № 1

Розробник: *викладач циклової комісії Авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., доцент, спеціаліст вищої категорії, Юрко О.О.*

Рецензенти:

1. *К.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання Шмельов Ю.М.*
2. *Заступник директора з ОЛР, командир авіаційного загону ТОВ «ЕЙР ТАУРУС» Гетьман Ю.Ю.*

План лекції:

1. Метод комплексних амплітуд
2. Частотні характеристики електричних кіл

Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна:

1. Болюх В. Ф., Данько В. Г., Гончаров Є. В. Основи електротехніки, електроніки та мікропроцесорної техніки. Харків: Планета-Прінт, 2019. 248 с.
2. Васильєва Л. Д., Медведенко Б. І., Якименко Ю. І. Напівпровідникові прилади: Підручник. Київ: ІВЦ Видавництво “Політехніка”, 2003. 338 с.
3. Кармазін В.В., Семенець В.В. Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. Київ: Кондор, 2016. 786 с.
4. Коваль Ю. О., Гринченко Л. В., Милютченко І. О. , Рибін О. І. Основи теорії кіл. Ч. 1. Харків: Компанія СМІТ, 2008. 432 с.
5. Колонтаєвський Ю. П., Сосков А. Г. Промислова електроніка та мікросхемотехніка: Теорія і практикум: навч. посіб. Київ: Каравела, 2004. 432 с.
6. Лавренова Д. Л., Хлистов В. М. Основи метрології та електричних вимірювань: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 133 с.

Допоміжна:

1. Андріяшик М. В., Вербицький Б. І., Король А.М. Курс фізики. Київ: Фламенко, 2008. 530 с.
2. Готра З. Ю., Лопатинський І. Є., Лукіянець Б. А., Микитюк З. М., Петрович І. В. Фізичні основи електронної техніки: Підручник. Львів: Видавництво “Бескид Бит”, 2004. 880 с.
3. Гумен Б. М., Гуржій А. М., Співак В. М. Основи теорії електричних кіл: у 3 кн. Київ: Вища шк., 2003.
4. Дмитріева В. Ф. Фізика: Навч. посіб, Київ: Техніка, 2008. 648 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. https://www.youtube.com/channel/UCWfhBu4fAt126ZbxREz3IBw

Текст лекції

1. Метод комплексних амплітуд

Символічний метод – це зображення гармонічних функцій часу у вигляді комплексних амплітуд на комплексній площині (рис. 1).

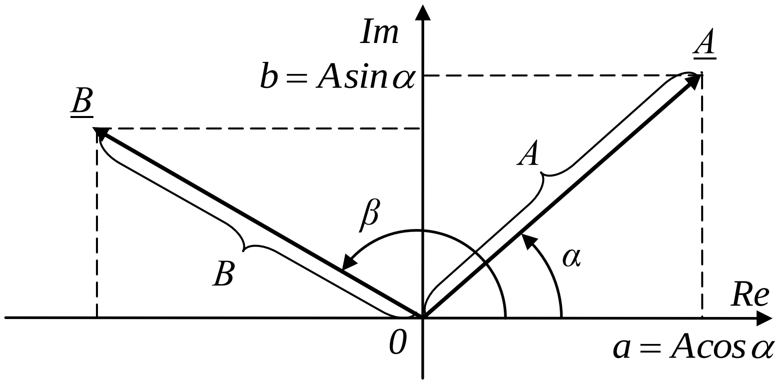


Рисунок 1 – Зображення комплексних чисел на комплексній площині

По осі абсцис комплексної площини відкладаються дійсні (реальні) складові комплексних чисел. Тому цю вісь називають *дійсною* і позначають Re. Таке позначення дійсної осі пов’язане з операцією Re[...], що означає виділення дійсної частини комплексного виразу в дужках.

Вісь ординат комплексної площини називають *уявною,* оскільки на ній відкладають уявні частини комплексних чисел. Позначення уявної осі зумовлене операцією виділення уявної частини комплексного виразу Im[...].

Не слід плутати позначення уявної осі та операції виділення уявної частини з позначенням амплітуди струму I_m .

Комплексні числа, що відповідають точкам або векторам на комплексній площині, прийнято позначати підкреслюванням. Основні терміни і позначення, які пов’язані з комплексними числами і застосовуються в комплексному методі аналізу кіл, наведені на рис. 1 і в табл. 1, а операції над комплексними числами – в табл. 2. Алгебра комплексних чисел ґрунтується на формулі Ейлера:

$$e^{ja} = \cos\alpha + j\sin\alpha,$$

де e = 2,718 – основа натуральних логарифмів; $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Вектори, що обертаються в комплексній площині, проєкції яких відповідають синусоїдним струмам і напругам, називають *комплексними миттєвими значеннями (комплексними гармоніками)* і позначають відповідно *i(t), u(t)*. Комплексні миттєві значення можна записати в одній з трьох форм запису комплексних чисел – показниковій, тригонометричній і алгебраїчній:

$$\underline{i}(t) = I_m cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot I_m sin(\omega t + \psi_i) = Re\left[\underline{i}(t)\right] + j\,Im\left[\underline{i}(t)\right].$$

$$\underline{u}(t) = U_m cos(\omega t + \psi_u) + j \cdot U_m sin(\omega t + \psi_u) = Re\left[\underline{u}(t)\right] + j\,Im\left[\underline{u}(t)\right].$$

Модулі комплексних гармонік дорівнюють амплітудам I_m і U_m, а аргументи – повним фазам $\psi(t) = \omega t + \psi$ відповідних синусоїдних струмів, напруг. Дійсною частиною комплексних гармонік є миттєві значення в косинусоїдній формі запису, а уявною – миттєві значення, записані в синусоїдній формі. Комплексні гармоніки у виразах мають однакову частоту, що відповідає усталеному режиму кола із синусоїдними джерелами однакової частоти.

Таблиця 1 – Форми запису і складові комплексних чисел

Термін		Аналітичний запис
Форми подання комплексних чисел	Алгебраїчна	$\underline{A} = a + jb = Re[\underline{A}] + j\,Im[\underline{A}]$
	Тригонометрична	$\underline{A} = \lvert A\rvert cos\alpha + j\lvert A\rvert sin\alpha$
	Показникова	$\underline{A} = \lvert\underline{A}\rvert e^{j\alpha}$
	Спряжене комплексне число	$\underline{A}^* = a - jb = \lvert\underline{A}\rvert e^{-j\alpha}$
Складові комплексних чисел	Дійсна частина	$a = Re[\underline{A}] = \lvert\underline{A}\rvert cos\alpha$
	Уявна частина	$b = Im[\underline{A}] = \lvert\underline{A}\rvert sin\alpha$
	Модуль	$\lvert\underline{A}\rvert = A = \sqrt{a^2 + b^2}$
	Аргумент	α = *arctg* (*b/a*)+ $n\pi$, *n* = 0, 1 значення *n* залежить від чверті, де лежить комплексне число
	Уявна одиниця	$j = \sqrt{-1} = e^{j\pi/2};\ -j = e^{-j\pi/2};\ j^2 = -1$

Таблиця 2 – Основні операції над комплексними числами

Операція	Співвідношення
Додавання	$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
Віднімання	$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
Множення	$\underline{A}\underline{B} = Ae^{j\alpha}Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)}$
Ділення	$\dfrac{\underline{A}}{\underline{B}} = \dfrac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \dfrac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}$
Піднесення до степеня	$\underline{A}^n = A^n e^{j(n\alpha)}$
Здобування кореня	$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{A}e^{j(\alpha/n)}$

На рис. 2, *a* на комплексній площині показана комплексна гармоніка з тими самими параметрами, що і напруга, миттєві значення якої зображені у вигляді проєкцій вектора $\underline{i}(t)$, що обертається.

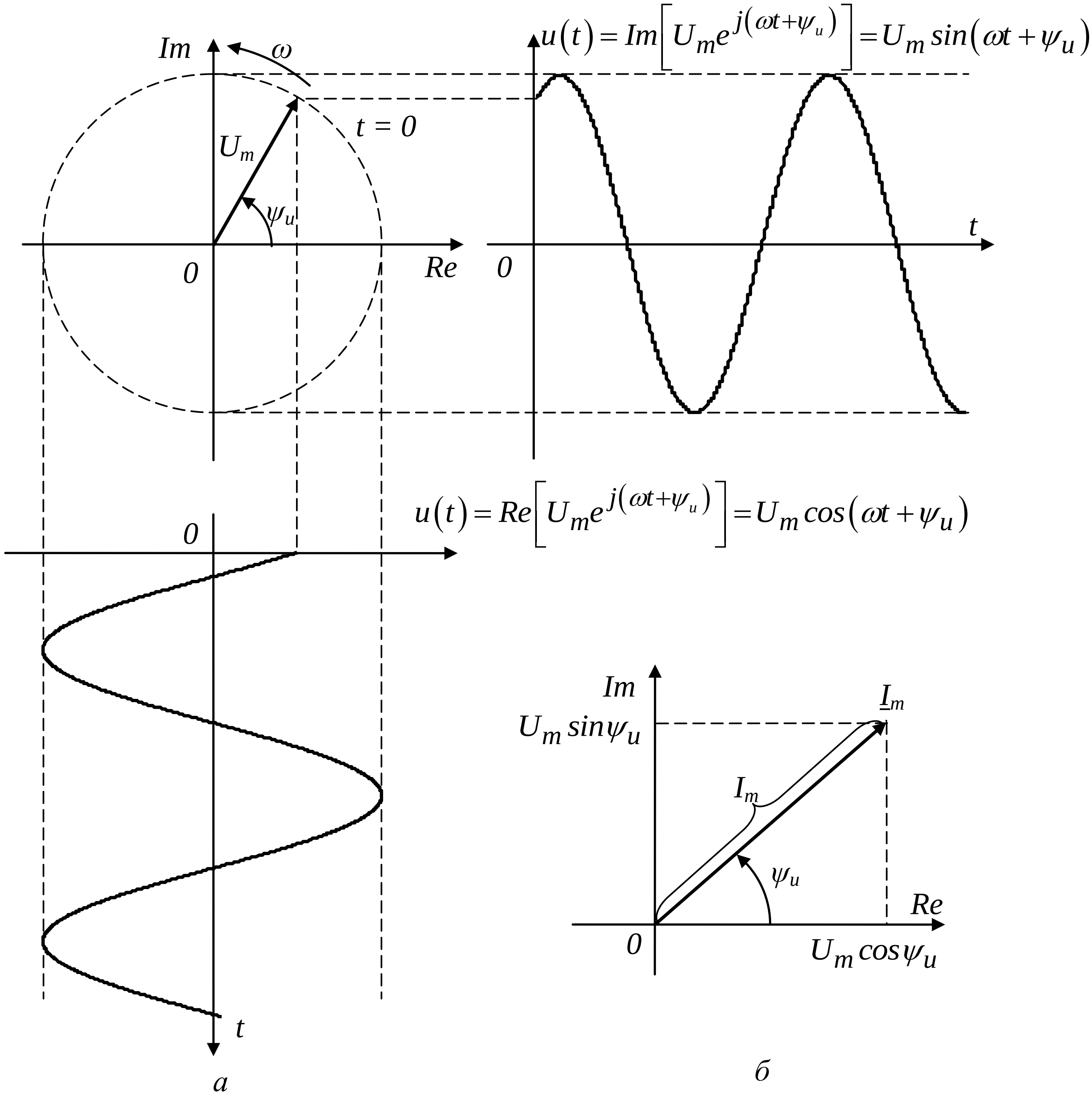


Рисунок 2 – Зображення синусоїдного струму в комплексній формі

Комплексні миттєві значення в показниковій формі можна записати як добуток співмножників:

$$\underline{i}(t) = I_m \cdot e^{j\psi_i} e^{j\omega t} \;; \qquad \underline{u}(t) = U_m \cdot e^{j\psi_u} e^{j\omega t} \qquad (1)$$

Перші співмножники у виразах (5.1) є амплітудами гармонік, другі – визначаються початковими фазами гармонік. Третій співмножник:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

однаковий у кожному з виразів (5.1), визначає швидкість обертання векторів і називається *оператором обертання.*

У момент часу t = 0 вирази (1) перетворюються на комплексні величини, які мають важливе значення в методах аналізу кіл синусоїдного струму і називаються *комплексними амплітудами*:

$$\underline{I}_m = \underline{i}(0) = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_m = \underline{u}(0) = U_m e^{j\psi_u}. \tag{2}$$

Комплексна амплітуда синусоїдного струму або напруги ($\underline{I}_m$, $\underline{U}_m$) – це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді *(I_m, U_m),* а аргумент – початковій фазі (ψ_i, , ψ_u) відповідно струму, напрузі.

На комплексній площині комплексні амплітуди є нерухомими векторами (рис. 2, *б*).

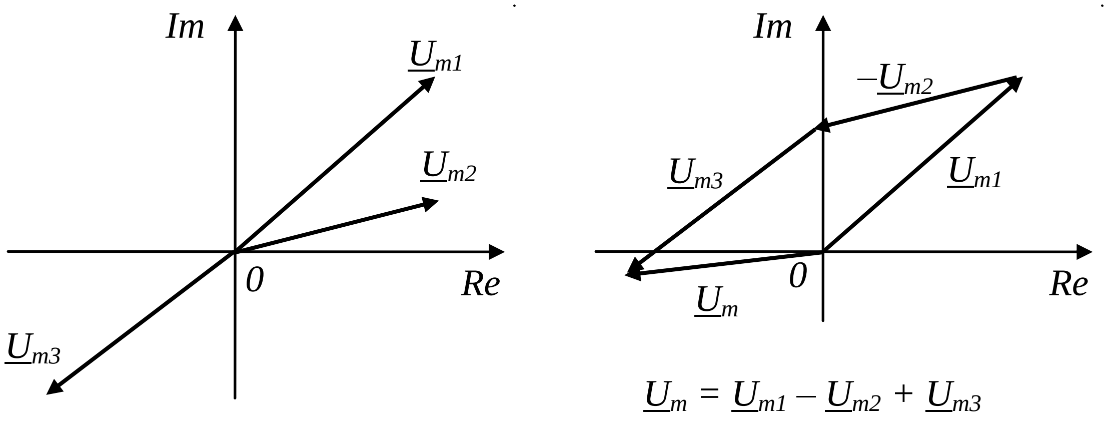
Подання гармонічних процесів однакової частоти в комплексному вигляді дозволяє спростити їх алгебраїчне додавання. Для цього використовують згадану вище властивість комутативності векторів. Наприклад, алгебраїчне додавання трьох гармонічних напруг виконуватимуть так:

$$\begin{gathered}
u(t) = u_1(t) - u_2(t) + u_3(t) = \\
= U_{m1} cos(\omega t + \psi_{u1}) - U_{m2} cos(\omega t + \psi_{u2}) + U_{m3} cos(\omega t + \psi_{u3}) = \\
= Re\left[\underline{U}_{m1} \cdot e^{j\omega t}\right] - Re\left[\underline{U}_{m2} \cdot e^{j\omega t}\right] + Re\left[\underline{U}_{m3} \cdot e^{j\omega t}\right] = \\
= Re\left[\underline{U}_{m1} \cdot e^{j\omega t} - \underline{U}_{m2} \cdot e^{j\omega t} + \underline{U}_{m3} \cdot e^{j\omega t}\right] = \\
= Re\left[\left(\underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m2} + \underline{U}_{m3}\right) \cdot e^{j\omega t}\right] = Re\left[\underline{U}_m \cdot e^{j\omega t}\right] = \\
= Re\left[U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_u)}\right] = U_m cos(\omega t + \psi_u),
\end{gathered}$$

де $\underline{U}_m = U_m \cdot e^{j\omega t} = \underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m2} + \underline{U}_{m3}$ – комплексна амплітуда результуючої напруги, яка дорівнює алгебраїчній сумі комплексних амплітуд напруг, що додаються.

Отже, щоб алгебраїчно додати миттєві значення синусоїдних струмів (напруг), достатньо провести алгебраїчне додавання комплексних амплітуд цих струмів (напруг) і від здобутої комплексної амплітуди перейти до миттєвого значення.

На рис. 3, *а* показані вектори, які відповідають комплексним амплітудам трьох напруг, що додаються у наведеному вище прикладі, і результат алгебраїчного підсумовування комплексних амплітуд (рис. 3, *б).* Результуючий вектор U_m (рис. 3, *б*) замикає ламану лінію, утворену векторами, що алгебраїчно додаються за їх паралельного перенесення.



а *б*

Рисунок 3 – Принцип побудови векторної діаграми

Приклад 1. Записати комплексне миттєве значення, комплексну амплітуду і комплексне діюче значення напруги:

$$u(t) = 5 \cdot cos\left(10^9 t - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ В}.$$

Розв'язання. Використовуючи визначення, запишемо комплексне миттєве значення, комплексну амплітуду і комплексне діюче значення цієї напруги у вигляді:

$$\underline{u}(t) = 5 \cdot e^{j\left(10^9 t - \frac{3\pi}{4}\right)} \text{В};$$

$$\underline{U}_m = 5 \cdot e^{j\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 5 \cdot cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j5 \cdot sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{5}{\sqrt{2}} - j\frac{5}{\sqrt{2}} \text{ В};$$

$$U_m = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -2{,}5 - j2{,}5 \text{ В}.$$

Комплексний опір — де відношення комплексних амплітуд (або комплексних діючих значень) напруги і струму:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_U}}{I \cdot e^{j\psi_I}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\psi_U - \psi_I)}. \qquad (5.3)$$

У показниковій формі комплексний опір має вигляд:

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

де $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$ – модуль комплексного опору, котрий називають *повним опором*; $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – аргумент комплексного опору.

У показниковій формі комплексний опір має вигляд:

$$\underline{Z} = R + jX.$$

Таблиця 3 – Елементи R, L, C у колі синусоїдального струму

Елемент	$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$.	$\lvert\underline{Z}\rvert = Z$	$\varphi = \psi_u - \psi_i$
R	R	R	*0*
L	$j\omega L = jX_L = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$	$X_L = \omega L$	$\frac{\pi}{2}$
C	$\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$

Величину, обернену комплексному опору, називають *комплексною провідністю:*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}. \tag{4}$$

Приклад 2. Знайти опір кола, зображеного на рис. 5.4, якщо $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = X_C = 2$ Ом.

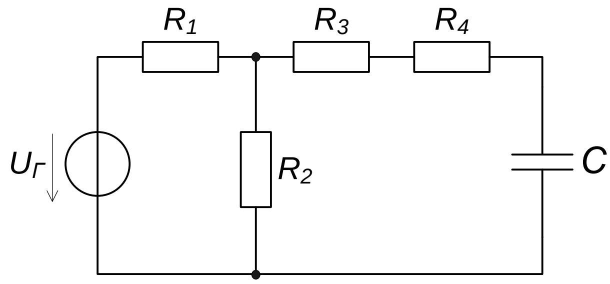


Рисунок 4

Розв'язання. Знайдемо загальний опір кола $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2\left(R_3 + R_4 - jX_c\right)}{R_2 + R_3 + R_4 - jX_c} = \frac{R_1\left(R_2 + R_3 + R_4\right) + R_2\left(R_3 + R_4\right) - jX_c\left(R_1 + R_2\right)}{R_2 + R_3 + R_4 - jX_c}.$$

Підставимо числові значення:

$$\underline{Z} = \frac{2(2+2+2) + 2(2+2) - j2(2+2)}{2+2+2-j2} = \frac{20 - j8}{6 - j2}.$$

Подамо в показниковій формі запису:

$$\underline{Z} = \frac{\sqrt{20^2 + 8^2}e^{-jarctg\frac{8}{20}}}{\sqrt{6^2 + 2^2}e^{-jarctg\frac{2}{6}}} = \frac{21{,}5 \cdot e^{-j21{,}8^\circ}}{6{,}3 \cdot e^{-j18{,}4^\circ}} = 3{,}4 \cdot e^{-j3{,}4^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Частотні характеристики електричних кіл

Відношення комплексних вихідної величини (реакції) до вхідної (дії) мають назву передавальної функції кола:

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{A}_{вих}(j\omega)}{\underline{A}_{вх}(j\omega)}=\frac{A_{вих}(\omega)\cdot e^{j\varphi_{вих}(\omega)}}{A_{вх}(\omega)\cdot e^{j\varphi_{вх}(\omega)}}=\frac{A_{вих}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}\cdot e^{j\left(\varphi_{вих}(\omega)-\varphi_{вх}(\omega)\right)}\ .$$

Тобто в показниковій формі запису:

$$\underline{H}(j\omega)=H(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}\ ,$$

де $H(\omega)=\dfrac{A_{вих}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}$ – відношення модулів вихідної до вхідної величини – *амплітудно-частотна характеристика* (АЧХ) кола;

$\varphi(\omega)=\varphi_{вих}(\omega)-\varphi_{вх}(\omega)$ – *фазо-частотна характеристика* (ФЧХ) кола.

Якщо вихідна та вхідна величини є напругами, то отримаємо передавальну функцію кола за напругою: $\underline{H}_u(j\omega)=\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$.

Також розрізняють передавальні функції кола за струмом $\underline{H}_i(j\omega)=\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$, передатний опір $\underline{Z}(j\omega)=\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}$ та передатну провідність $\underline{Y}(j\omega)=\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}$.