

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія авіаційного і радіоелектронного обладнання**

## **ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

навчальної дисципліни  
«Основи електрики та електроніки, електричні вимірювання та їх  
стандартизація»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої  
освіти

***272 Авіаційний транспорт  
(Оператор безпілотних літальних апаратів)***

**за темою № 11 - Електричні кола при негармонійній дії**

**Кременчук 2023**

### **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

### **СХВАЛЕНО**

Методичною радою  
Кременчуцького льотного коледжу  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

### **ПОГОДЖЕНО**

Секцією Науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, протокол від 28.08.2023р № 1

**Розробник:** викладач циклової комісії Авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., доцент, спеціаліст вищої категорії, Юрко О.О.

### **Рецензенти:**

1. К.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання Шмельов Ю.М.
2. Заступник директора з ОЛР, командир авіаційного загону ТОВ «ЕЙР ТАУРУС» Гетьман Ю.Ю.

### **План лекції:**

1. Розрахунки кіл методом комплексних амплітуд під дією періодичних сигналів
2. Спектральний аналіз неперіодичних сигналів

### **Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті**

#### **Основна:**

1. Болюх В. Ф., Данько В. Г., Гончаров Є. В. Основи електротехніки, електроніки та мікропроцесорної техніки. Харків: Планета-Прінт, 2019. 248 с.
2. Васильєва Л. Д., Медведенко Б. І., Якименко Ю. І. Напівпровідникові прилади: Підручник. Київ: ІВЦ Видавництво "Політехніка", 2003. 338 с.
3. Кармазін В.В., Семенець В.В. Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. Київ: Кондор, 2016. 786 с.
4. Коваль Ю. О., Гринченко Л. В., Милютченко І. О., Рибін О. І. Основи теорії кіл. Ч. 1. Харків: Компанія СМІТ, 2008. 432 с.
5. Колонтаєвський Ю. П., Сосков А. Г. Промислова електроніка та мікросхемотехніка: Теорія і практикум: навч. посіб. Київ: Каравела, 2004. 432 с.
6. Лавренова Д. Л., Хлистов В. М. Основи метрології та електричних вимірювань: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 133 с.

#### **Допоміжна:**

1. Андріяшик М. В., Вербицький Б. І., Король А.М. Курс фізики. Київ: Фламенко, 2008. 530 с.
2. Готра З. Ю., Лопатинський І. Є., Лукіянець Б. А., Микитюк З. М., Петрович І. В. Фізичні основи електронної техніки: Підручник. Львів: Видавництво "Бескид Бит", 2004. 880 с.
3. Гумен Б. М., Гуржій А. М., Співак В. М. Основи теорії електричних кіл: у 3 кн. Київ: Вища шк., 2003.
4. Дмитрієва В. Ф. Фізика: Навч. посіб, Київ: Техніка, 2008. 648 с.

#### **Інформаційні ресурси в Інтернеті**

1. <https://www.youtube.com/channel/UCWfhBu4fAt126ZbxREz3IBw>

## Текст лекції

### 1. Розрахунки кіл методом комплексних амплітуд під дією періодичних сигналів

Періодичну негармонічну функцію  $f(t)$  можна зобразити у вигляді суми гармонічних коливань за допомогою ряду Фур'є:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)), \quad (2.1)$$

де  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T$  – частота першої гармоніки;

$T$  – період сигналу  $f(t)$ ;

$A_0, a_k, b_k$  – коефіцієнти ряду Фур'є:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad (2.2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \quad (2.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt. \quad (2.4)$$

У спектральній області функція визначається своїми частотними характеристиками: амплітудною (АЧХ) та фазовою (ФЧХ).

Амплітуди  $C_k$ , та фази  $\Theta_k$  гармонік визначають через коефіцієнти ряду:

$$C_0 = A_0, \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \Theta_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (2.5)$$

Розрахунки доцільно виконувати за таким алгоритмом.

1. Розкласти напругу  $u_i(t)$  в ряд Фур'є, користуючись відповідними таблицями, наведеними у літературі. Якщо задана функція відрізняється від стандартної, необхідно у розклад стандартної функції додати постійну складову (якщо вона є у заданій функції) та прийняти до уваги наявність зсуву у часі заданої функції відносно стандартної. Урахування кута зсуву здійснюють заміною у формулах розкладу змінної  $(\omega t)$  на змінну  $(\omega t \pm \Delta\alpha)$ , де  $\Delta\alpha$  – визначений у радіанах кут зсуву з відповідним знаком. Наприклад, якщо задана функція запізнюється відносно стандартної на  $\pi/2$ , змінна має вигляд  $[\omega t - \pi/2]$ .

2. Позначивши опір елементів схеми в загальному вигляді як  $R_H, jX_{Lk}$  та  $jX_{Ck}$ , вивести формулу для комплексної амплітуди  $k$ -ї гармоніки напруги на навантаженні  $\underline{U}_{2mk}$  через комплексну амплітуду тієї самої гармоніки вхідної напруги  $\underline{U}_{1mk}$ .

3. Записати миттєве значення напруги на навантаженні у вигляді ряду Фур'є.

4. Побудувати лінійчасті спектри амплітуд і фаз вхідної і вихідної напруг.

**Приклад 1.** Для чотириполосника, зображеного на рис. 7.1, б, дією є вхідний сигнал, зображений на рис. 7.1, а.

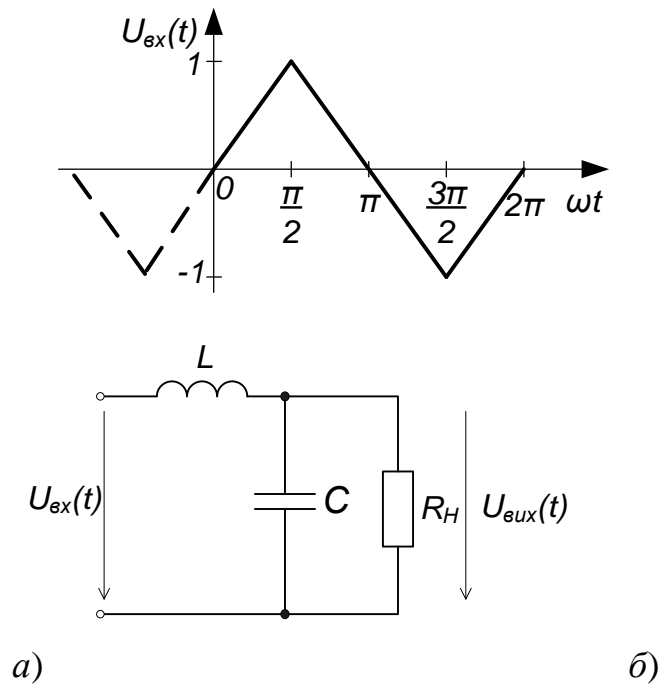


Рисунок 1

Схожа трикутна таблична функція має вигляд, зображений на рис. 2.

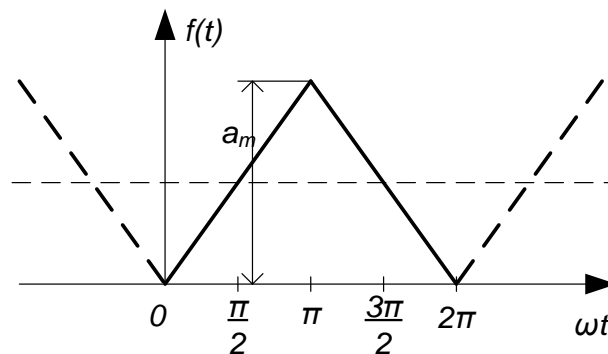


Рисунок 2

Розкладання до ряду Фур'є табличної функції:

$$f(\omega t) = \frac{a_m}{2} - \frac{4a_m}{\pi^2} \left[ \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots + \frac{1}{n^2} \cos n\omega t \right].$$

Необхідно визначити величини зсувів табличної функції, щоб отримати задану функцію за нерухомих осей ординат.

Табличну функцію необхідно змістити вниз на  $a_m/2$  та вліво на  $\pi/2$ . Відповідні зміни враховують так:

$$u(t) = f\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{a_m}{2}.$$

Загальний розмах функції  $u(t)$  від  $-1$  до  $+1$  дорівнює 2, а табличної функції  $f(t)$  дорівнює  $a_m$ . Тобто маємо відповідність:  $a_m = 2$ .

Отже, розкладання до ряду Фур'є заданої функції:

$$u(t)_{\text{ex}} = \frac{a_m}{2} - \frac{4a_m}{\pi^2} \left[ \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos 3\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \cos 5\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{a_m}{2}.$$

Перетворимо вираз:

$$u(t)_{\text{ex}} = -\frac{4a_m}{\pi^2} \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4a_m}{9\pi^2} \cos\left(3\omega_1 t + \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{4a_m}{25\pi^2} \cos\left(5\omega_1 t + \frac{5\pi}{2}\right).$$

Зробимо всі складові ряду додатними за допомогою виразу:  $-\cos \alpha = \cos(\alpha - \pi)$  та врахуємо, що  $a_m = 2$ .

$$u(t)_{\text{ex}} = \frac{8}{\pi^2} \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} - \pi\right) + \frac{8}{9\pi^2} \cos\left(3\omega_1 t + \frac{3\pi}{2} - \pi\right) + \frac{8}{25\pi^2} \cos\left(5\omega_1 t + \frac{5\pi}{2} - \pi\right)$$

;

$$u(t)_{\text{ex}} = 0,81 \cdot \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,09 \cdot \cos\left(3\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + 0,03 \cdot \cos\left(5\omega_1 t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Отже, комплексні амплітуди гармонічних складових спектра вхідного сигналу:

$$\underline{U}_{\text{ex}1} = 0,81 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}, \underline{U}_{\text{ex}3} = 0,09 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}, \underline{U}_{\text{ex}5} = 0,03 \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}.$$

Частотні характеристики вхідного сигналу залежно від номера гармоніки  $k$  зображені на рис. 3.

Знайдемо загальний опір кола, зображеного на рис. 4.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_L + \frac{\underline{Z}_C R_H}{\underline{Z}_C + R_H} = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C} R_H}{\frac{1}{j\omega C} + R_H} = j\omega L + \frac{\left(\frac{1}{j\omega C} R_H\right) j\omega C}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R_H\right) j\omega C} = j\omega L + \frac{R_H}{1 + j\omega C R_H} = \\ &= \frac{j\omega L(1 + j\omega C R_H) + R_H}{1 + j\omega C R_H} = \frac{j\omega L + (j\omega)^2 L C R_H + R_H}{1 + j\omega C R_H} = \frac{R_H - (\omega)^2 L C R_H + j\omega L}{1 + j\omega C R_H}. \end{aligned}$$

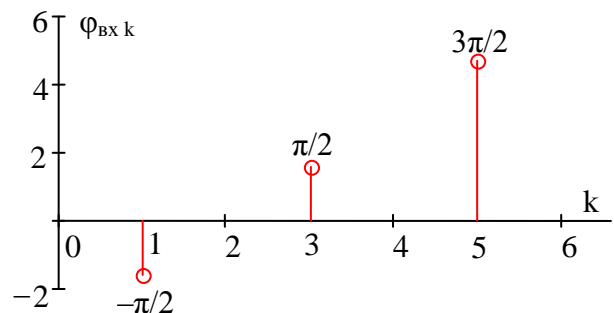
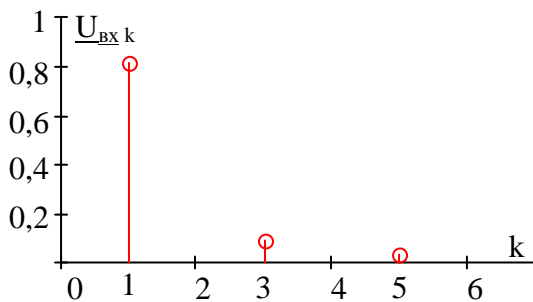


Рисунок 3 – АЧХ та ФЧХ вхідного сигналу

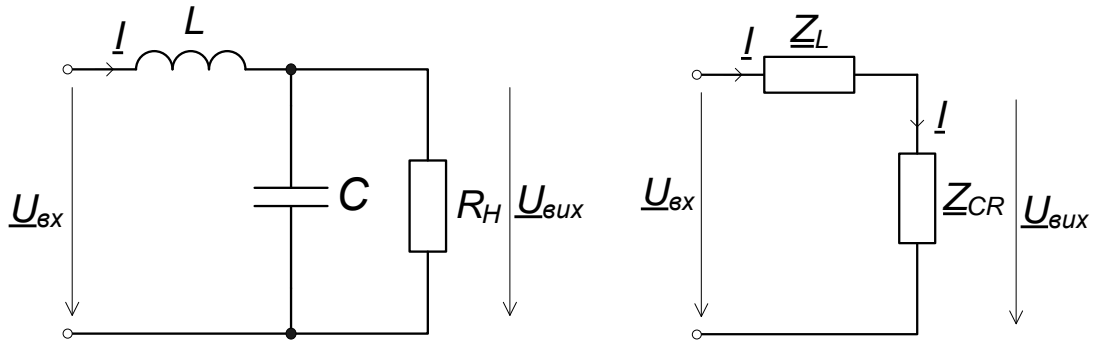


Рисунок 4 – Вихідна та перетворена ланки

Знайдемо вихідну напругу:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{вух} &= \underline{I} \cdot \underline{Z}_{CR} = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_C R_H}{\underline{Z}_C + R_H} = \frac{\underline{U}_{вх}}{\underline{Z}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C} R_H}{\frac{1}{j\omega C} + R_H} = \frac{\underline{U}_{вх}}{\underline{Z}} \cdot \frac{R_H}{1 + j\omega C R_H} = \\ &= \frac{\underline{U}_{вх}}{\frac{R_H - (\omega)^2 L C R_H + j\omega L}{1 + j\omega C R_H}} \cdot \frac{R_H}{1 + j\omega C R_H} = \underline{U}_{вх} \frac{R_H}{R_H - (\omega)^2 L C R_H + j\omega L}. \end{aligned}$$

Перейдемо до дискретних частот:  $\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T}$ .

$$\underline{U}_{вухk} = \underline{U}_{вхk} \frac{R_H}{R_H - (k\omega_1)^2 L C R_H + jk\omega_1 L}.$$

Запишемо вираз у показниковій формі запису:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{вухk} &= \frac{U_{вхk} \cdot e^{j\varphi_{вхk}} \cdot R_H}{\sqrt{\left(R_H - (k\omega_1)^2 L C R_H\right)^2 + (k\omega_1 L)^2} \cdot e^{j \cdot \arctg\left(\frac{k\omega_1 L}{R_H - (k\omega_1)^2 L C R_H}\right)}}, \\ \underline{U}_{вухk} &= \frac{U_{вхk} \cdot R_H}{\sqrt{\left(R_H - (k\omega_1)^2 L C R_H\right)^2 + (k\omega_1 L)^2}} \cdot e^{j\left(\varphi_{вхk} - \arctg\left(\frac{k\omega_1 L}{R_H - (k\omega_1)^2 L C R_H}\right)\right)}. \end{aligned}$$

$$L = 1 \text{ мГн} = 10^{-3} \text{ Гн},$$

$$C = 20 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ф},$$

$$T = 1 \text{ мс},$$

$$R = 100 \text{ Ом},$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10^{-3}} = \pi \cdot 2 \cdot 10^3 = 6,28 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

$$\underline{U}_{\text{вих } k} = \frac{U_{\text{вх } k} \cdot 100}{\sqrt{\left(100 - (k \cdot 6,28 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 100\right)^2 + (k \cdot 6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3})^2}} \cdot e^{j \left( \varphi_{\text{вх } k} - \arctg \left( \frac{k \cdot 6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{100 - (k \cdot 6,28 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 100} \right) \right)}.$$

$$\underline{U}_{\text{вих } k} = \frac{U_{\text{вх } k} \cdot 100}{\sqrt{(100 - k^2 \cdot 78,96)^2 + (k \cdot 6,28)^2}} \cdot e^{j \left( \varphi_{\text{вх } k} - \arctg \left( \frac{k \cdot 6,28}{100 - k^2 \cdot 78,96} \right) \right)}.$$

Знайдемо гармоніки вихідного сигналу:

$$k=1: \underline{U}_{\text{вих } 1} = \frac{0,81 \cdot 100}{\sqrt{(100 - 1^2 \cdot 78,96)^2 + (1 \cdot 6,28)^2}} \cdot e^{j \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \left( \frac{1 \cdot 6,28}{100 - 1^2 \cdot 78,96} \right) \right)} = 0,81 \cdot e^{-j \cdot 1,57} \text{ В.}$$

$$k=3: \underline{U}_{\text{вих } 3} = \frac{0,09 \cdot 100}{\sqrt{(100 - 3^2 \cdot 78,96)^2 + (3 \cdot 6,28)^2}} \cdot e^{j \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \left( \frac{3 \cdot 6,28}{100 - 3^2 \cdot 78,96} \right) \right)} = 0,41 \cdot e^{j \cdot 1,28} \text{ В.}$$

$$k=5: \underline{U}_{\text{вих } 5} = \frac{0,03 \cdot 100}{\sqrt{(100 - 5^2 \cdot 78,96)^2 + (5 \cdot 6,28)^2}} \cdot e^{j \left( \frac{3\pi}{2} - \arctg \left( \frac{5 \cdot 6,28}{100 - 5^2 \cdot 78,96} \right) \right)} = 0,01 \cdot e^{j \cdot 4,77} \text{ В.}$$

Частотні характеристики вихідного сигналу залежно від номера гармоніки  $k$  зображені на рис. 5.

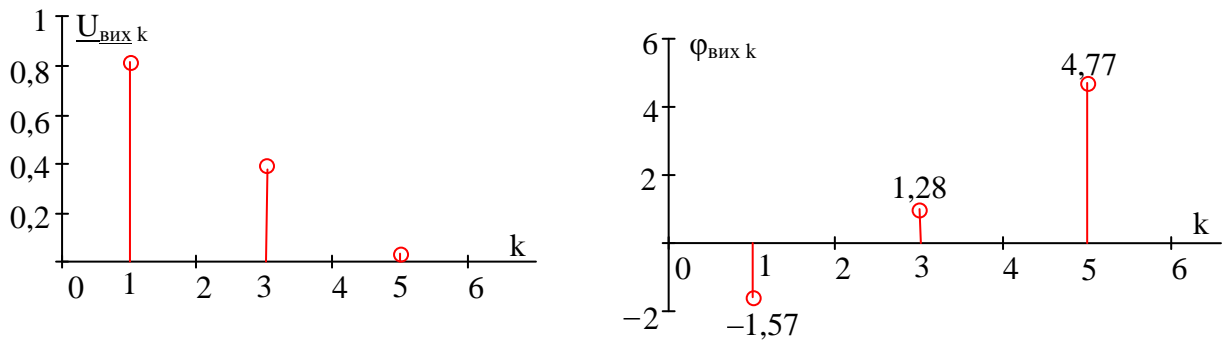


Рисунок 5 – АЧХ та ФЧХ вхідного сигналу

## 2. Спектральний аналіз неперіодичних сигналів

Пряме перетворення Фур'є:

$$\underline{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Функція  $X(j\omega)$  – комплексна і може бути подана у вигляді модуля  $X(\omega)$  і аргумента  $\varphi(\omega)$ :

$$\underline{X}(j\omega) = X(\omega) e^{j \cdot \varphi(\omega)}.$$

Модуль  $X(\omega)$  відображає спектральну густину амплітуд (СГА), а аргумент  $\varphi(\omega)$  – спектральну густину фаз (СГФ). На відміну від спектрів періодичних



коливань, які є дискретними за частотою, спектри неперіодичних коливань суцільні.

**Приклад 2.** Розрахувати спектральну густину  $U(j\omega)$  П-подібного відеоімпульсу, що зображено на рис. 8.1, а і записаного виразом:

$$u(t) = \begin{cases} U, & 0 \leq t < t_i \\ 0, & 0 > t \geq t_i \end{cases}$$

Виділити СГА та СГФ, побудувати їхні графіки.

*Розв'язання*

Використавши формулу ППФ, розрахуємо спектральну густину імпульсу:

$$\begin{aligned} \underline{U}(j\omega) &= \int_0^{t_i} U \cdot e^{-j\omega t} dt = U \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{t_i} = -\frac{U}{j\omega} e^{-j\omega t_i} + \frac{U}{j\omega} = \frac{U}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_i}) = \\ &= \frac{U}{j\omega} e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} \left( e^{j\omega \frac{t_i}{2}} - e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} \right) = \frac{2U}{\omega} e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} \left( \frac{e^{j\omega \frac{t_i}{2}} - e^{-j\omega \frac{t_i}{2}}}{2j} \right) = U \cdot t_i \frac{\sin \omega \frac{t_i}{2}}{\omega \frac{t_i}{2}} e^{-j\omega \frac{t_i}{2}}, \end{aligned}$$

де  $U(\omega) = U \cdot t_i \frac{\sin \omega \frac{t_i}{2}}{\omega \frac{t_i}{2}}$  – спектральна густина амплітуд,

$\varphi(\omega) = -\omega \frac{t_i}{2}$  – спектральна густина фаз.

Якщо записати, що  $\omega = 2\pi f$ , то

$$\begin{aligned} U(f) &= U \cdot t_i \frac{\sin \pi f t_i}{\pi f t_i}, \\ \varphi(f) &= -\pi f t_i. \end{aligned}$$

На рис. 6, а зображено графік  $U(f)$  – спектр амплітуд П-подібного відеоімпульсу, на рис. 6, б зображено графік  $\varphi(f)$  – спектр фаз цього самого імпульсу.

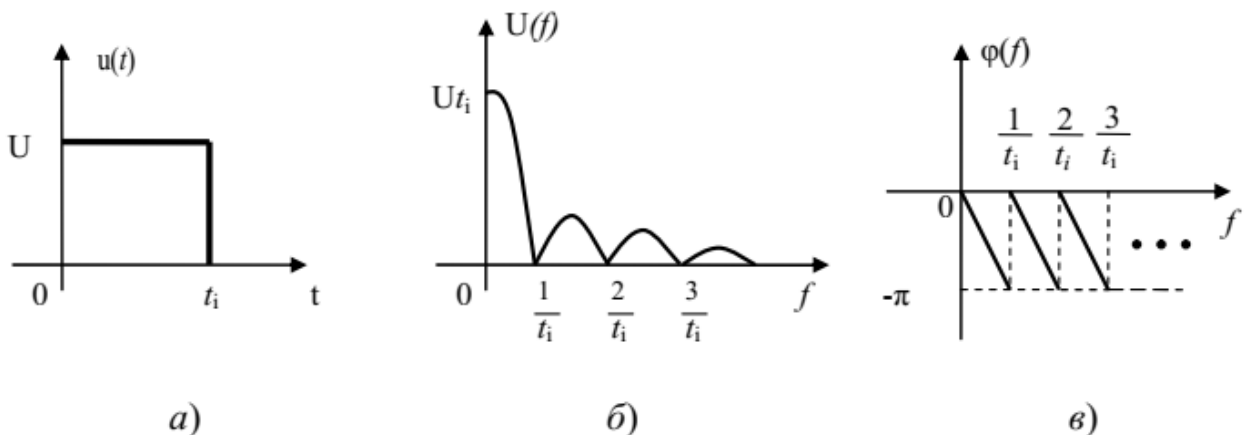


Рисунок 6 – Прямокутний відеоімпульс (а), спектр амплітуд (б), спектр фаз (в)

**Приклад 3.** Розрахувати спектральну густину  $U(j\omega)$  трикутного відеоімпульсу рис. 7, а. Побудувати графіки СГА та СГФ.

*Розв'язання*

Аналітичний вираз трикутного імпульсу можна записати так:

$$u(t) = \begin{cases} U \left( \frac{2t}{t_i} + 1 \right), & -\frac{t_i}{2} \leq t \leq 0 \\ U \left( 1 - \frac{2t}{t_i} \right), & 0 \leq t \leq \frac{t_i}{2} \end{cases}.$$

Спектральна густина імпульсу:

$$\underline{U}(j\omega) = U \int_{-\frac{t_i}{2}}^0 \left( \frac{2t}{t_i} + 1 \right) \cdot e^{-j\omega t} dt + U \int_0^{\frac{t_i}{2}} \left( \frac{2t}{t_i} + 1 \right) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

У результаті розрахунків отримаємо:

$$U(f) = \frac{U t_i}{2} \left( \frac{\sin \pi f \frac{t_i}{2}}{\pi f \frac{t_i}{2}} \right)^2.$$

Спектральна густина фаз  $\varphi(\omega) = 0$ .

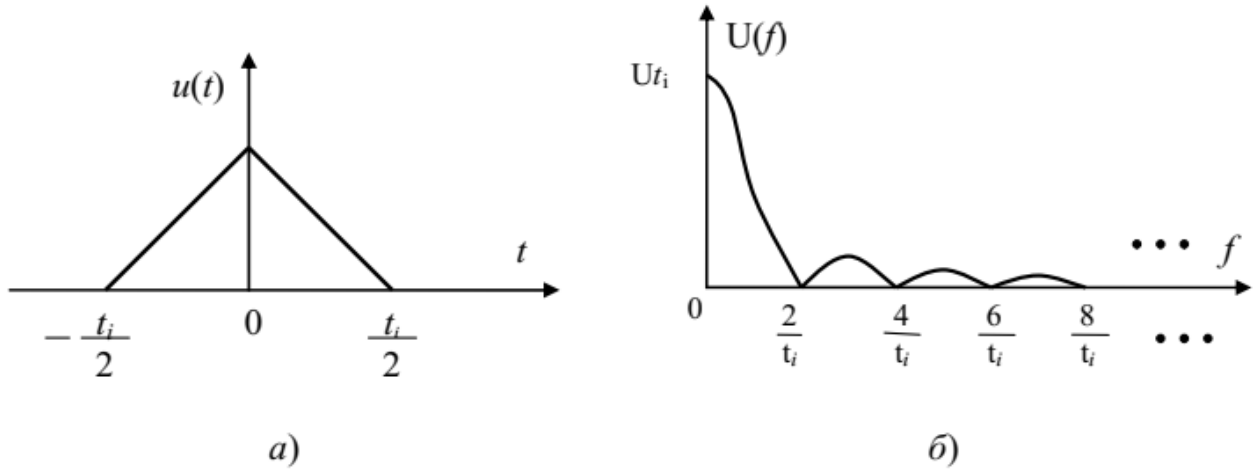


Рисунок 7 – Трикутний відеоімпульс (а), спектр амплітуд (б)