МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія авіаційного і радіоелектронного обладнання

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Теорія автоматичного управління»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
(Аеронавігація)

За темою № 9 – Критерії стійкості АСУ

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник: *викладач циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., професор, спеціаліст вищої категорії Гаврилюк Ю.М.*

Рецензенти:
1. Заступник директора з ОЛР, командир авіаційного загону ТОВ «ЕЙР ТАУРУС» Гетьман Ю.Ю.
2. Кт.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання Шмельов Ю.М.

План лекції

1. Правила визначення стійкості системи.
2. Алгебричні критерії стійкості.
   2.1 Використання математичної матриці для визначення алгебричних критеріїв.
   2.2 Критерії стійкості Гурвіца
3. Частотні критерії стійкості
   3.1 Аналітичний спосіб побудови годографа
   3.2 Критерій стійкості Михайлова
   3.3 Експериментальний спосіб побудови годографа
   3.4 Критерій стійкості Найквіста

Рекомендована література

Основна:

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 2007. – 656 с.
2. Бобух А.О. Автоматизація інженерних систем: Навч. посібник: ХНАМГ, 2005. – 212 с.

Допоміжна:

3 . Попович М.Г, Борисюк М.Г., Гаврилюк В. А. Теорія електропривода. – К.: Вища шк.., 1993. – 494 с.

Інтернет – ресурс:

4. http://znanium.com/book

Текст лекції

1. Правила визначення стійкості системи

Стійкість – це здатність системи повертатися до вихідного стану після її короткотривалого збурення.

Математично стійкість вільного руху оцінюють здатністю АСУ прямувати до заданих параметрів після припинення збурення. Необхідною і достатньою умовою стійкості є від'ємність усіх дійсних коренів і дійсних частин комплексних коренів характеристичного рівняння.

У зв'язку з тим, що згасання вільного руху АСУ визначається тільки коренями характеристичного рівняння і не залежить від збурень, стійкість є внутрішньою властивістю ***лінійних систем.***

Однак АСУ реальних промислових об'єктів є нелінійними.

Тому дослідження стійкості руху таких АСУ здійснюють лінеаризацією нелінійних диференціальних рівнянь їх руху на підставі ***теореми А.М. Ляпунова (1892р.):***

Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має хоча б один нульовий корінь або одну пару уявних коренів, то робити висновок про стійкість реальної системи по лінеаризованому рівнянню не можна.

Це означає, що стійкість реальної системи необхідно оцінювати по вихідному нелінійному рівнянню.

На практиці використовують математичний висновок про те, що для судження про стійкість лінійної АСУ достатньо визначити лише знаки дійсних частин коренів характеристичного рівняння. При цьому розроблені правила, за допомогою яких можна судити про знаки дійсних частин коренів, не вирішуючи характеристичне рівняння і не знаходячи числові значення коренів.

Ці правила отримали назву ***критеріїв стійкості***.

Розрізняють алгебричні і частотні критерії стійкості.

Алгебричні критерії встановлюють необхідні і достатні умови від'ємності дійсних частин коренів у формі обмежень на певні комбінації коефіцієнтів характеристичного рівняння системи.

Частотні критерії визначають зв'язок між стійкістю системи і формою її частотних характеристик.

Алгебричні критерії стійкості

1.1Використання математичної матриці для визначення алгебричних критеріїв

Матриця – це математичний об'єкт, що записується у вигляді прямокутної таблиці елементів і зображується сукупністю рядків і стовпців, на перетині яких знаходяться її елементи.

Приклад матриці:

$$\mathbf{A_{mn}} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{a_{11} \ldots a_{12} \ldots a_{1n}} \\ \\ \\ \mathbf{a_{m1} \ldots a_{m2} \ldots a_{mn}} \end{matrix} \right. \qquad (9.1)$$

Читається : ***матриця розміру «* m*» на «*n*».***

m – число рядків;

n – число стовпців.

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту – **A, B, C** …

Для позначення елементів матриці використовують рядкові літери з подвійним індексом: $\mathbf{a_{mn}}$ **,** де **m –** номер рядка, **n –** номер стовпця.

Матриці застосовують для компактного запису систем лінійних алгебричних або диференціальних рівнянь. У цьому випадку *кількість рядків* матриці відповідає кількості рівнянь, а *кількість стовпців* – кількості невідомих. Рішення систем лінійних рівнянь зводиться до операцій над матрицями, тобто над таблицями чисел.

Кожній матриці **A** відповідає число, яке називається детермінантом і позначається |**A**| або Δ **n .** Детермінантом виступає число, що записується у вигляді таблиці.

$$\Delta \mathbf{n} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{a_{11} \ldots a_{12}} \\ \mathbf{a_{21} \ldots a_{22} \ldots a_{2n}} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathbf{a_{n1} \ldots a_{n2} \ldots a_{nn}} \end{array} \right. \qquad (9.2)$$

Δ **n –** детермінант матриці **n** – го порядку.

Приклад детермінанта матриці другого порядку:

$$\Delta \mathbf{2} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}} \qquad (9.3)$$

Щоб підрахувати детермінант самої простої квадратної матриці. Необхідно обчислити різницю добутків головної діагоналі (**a_{11} • a_{22}**) і побічної діагоналі (**a_{12} • a_{21}**)

Для **n = 3** детермінант матриці третього порядку має вигляд:

$$\Delta\, \mathbf{3} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} \bullet a_{33} + a_{12} \bullet a_{23} \bullet a_{31} + a_{13} \bullet a_{21} \bullet a_{32} - a_{13} \bullet a_{22} \bullet a_{31} - a_{12} \bullet a_{21} \bullet a_{33} - a_{11} \bullet a_{23} \bullet a_{32} \tag{9.4}$$

Обчислення детермінанта Δ **3** виконується за правилом Саррюса (три доданки із знаком **+** позначені чорними лініями) і три доданки із знаком **–** (позначені червоними лініями).

Для дослідження стійкості лінійної системи достатньо знайти корені характеристичного рівняння. Якщо всі корені мають від’ємні дійсні частини (або є «лівими», система вважається стійкою.

Повернемося до характеристичного рівняння (8.4)

$$\mathbf{a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}P + a_n = 0}$$

Можна визначити корені $\mathbf{P}_i$ за допомогою комп’ютерних програм. Однак такий підхід дає лише кількісні(а не якісні) результати і не дозволяє визначати межі областей стійкості.

Для якісної оцінки стійкості системи розроблені критерії стійкості поліномів (таких, як рівняння (8.4).

Це алгебричні критерії, що використовують матрицю, складену з коефіцієнтів $\mathbf{a_1}$ полінома. Далі розглядається один з таких критеріїв – **критерій стійкості Гурвіца**.

2.1 Критерій стійкості Гурвіца

Критерій стійкості Гурвіца використовує матрицю Δ **n** розміром **n** × **n,** що складається з коефіцієнтів $\mathbf{a_1}$ полінома (8.4).

Для **n = 5:**

- перший рядок містить коефіцієнти $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_5}$ ...(всі з непарними номерами, а решта елементів – **нулі**).
- другий рядок містить коефіцієнти $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_4}$…(всі з парними номерами, решта – **нулі**).
- третій і четвертий рядки отримують зсувом першого і другого рядків на **1** позицію праворуч.

В результаті матриця має вигляд:

$$\Delta 5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} \qquad a_0 > 0 \qquad (9.5)$$

Критерій стійкості системи з використанням матриці коефіцієнтів полінома (характеристичного рівняння) сформулював німецький математик А. Гурвіц у 1895р.

Стосовно задач ТАУ критерій стійкості Гурвіца визначається так:

Автоматична система управління, яка описується характеристичним рівнянням

$$\mathbf{a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + a_2\, p^{n-2} + \ldots + a_n = 0}$$

стійка, якщо при $\mathbf{a_0} > \mathbf{0}$ додатні всі детермінанти $\Delta_{\mathbf{1}}, \Delta_{\mathbf{2}}, \ldots, \Delta_{\mathbf{n}}$ матриці Δ_i:

$$\Delta_i \quad = \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_5} & \ldots & \mathbf{a_{21-1}} \\ \mathbf{a_0} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_4} & \ldots & \mathbf{a_{21-2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_3} & \ldots & \mathbf{a_{21-3}} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{a_{i-2}} & \mathbf{a_i} \end{vmatrix}$$

Якщо хоча б один з детермінантів буде від’ємним, система нестійка.

Детермінанти Гурвіца записують таким чином:

На головній діагоналі записують усі коефіцієнти характеристичного рівняння від $\mathbf{a_1}$ до $\mathbf{a_i}$ (за порядком зростання індексу), потім у кожному стовпці вище діагональних коефіцієнтів записують коефіцієнти з послідовно – зростаючими індексами, а нижче – з послідовно убувальними індексами;

На місця з коефіцієнтами з індексами більшими, ніж **n** або меншими 0 проставляють нулі. При цьому кожний ***i***-й детермінант має розмір ***i***×***i***.

Останній стовпець детермінанта Δ **n** містить завжди тільки дин елемент, що відрізняється від нуля, тому:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Розглянемо приклад застосування критерія Гурвіца для характеристично рівняння третього порядку

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Умови стійкості по Гурвіцу:

$a_0 > 0$

$\Delta 1 = a_1 > 0$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \bullet a_2 - a_0 \bullet a_3 > 0$$

$\Delta 3 = a_3 \Delta 2 > 0$

Критерій Гурвіца доцільно застосовувати для аналізу стійкості систем не вище п’ятого порядку. При **n** >**5** обчислення детермінантів стає громіздким.

Для аналізу стійкості систем вище четвертого порядку застосовують алгебричний критерій Рауса.

3. Частотні критерії стійкості

3.1. Аналітичний спосіб побудови годографа

Частотні критерії стійкості визначають двома способами: ***аналітичним і експериментальним.***

Обидва способи пов’язані з побудовою **годографа.**

Годограф – це крива, яка з’єднує кінці вектору змінної величини, відкладені в різні моменти часу від однієї точки, яка показана на рис. 9.1

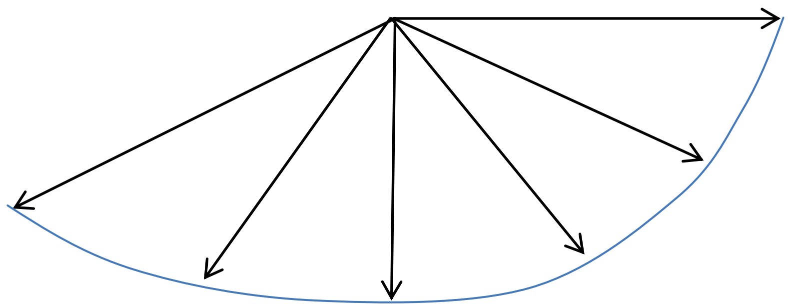


Рис. 9.1 Приклад годографа

Годограф можна застосувати для визначення частотної характеристики системи.

Розглянемо аналітичний спосіб побудови годографа.

За основу береться характеристичне рівняння системи:

$$\mathbf{W(P) = a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n} \qquad (9.6)$$

В рівнянні (9.6) виконують заміну $\boldsymbol{P = j\omega}$

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{j\omega}) = \mathbf{a_0}\,(\boldsymbol{j\omega})^{\mathbf{n}} + \mathbf{a_1}\,(\boldsymbol{j\omega})^{\mathbf{n-1}} + \ldots + \mathbf{a_{n-1}}\boldsymbol{j\omega} + \mathbf{a_n} \qquad (9.7)$$

З рівняння (9.7) виділяють дійсну і уявну частини $U(\omega)$ і $jv(\omega)$, враховуючи, що $j = \sqrt{-1}$; $j^2 = -1$; $j^4 = +1$; $j\omega^2 = -\omega^2$; $j\omega^3 = -j\omega^3$; $j\omega^4 = \omega^4$ і т.д, тобто парні степені дійсні, а непарні – уявні.

Отримуємо:

Дійсна частина $U(\omega) = a_n - a_{n-2}\,\omega^2 + a_{n-4}\,\omega^4 - \dots$ (9.8)

Уявна частина $jv(\omega) = a_{n-1}\,\omega - a_{n-3}\,\omega^3 - a_{n-5}\,\omega^5 - \dots$ (9.9)

Далі для кожного значення частоти ω в діапазоні від 0 до ∞ можна обрахувати величини $U(\omega)$ і $jv(\omega)$, а потім занести їх до таблиці 9.1

Таблиця 9.1

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	…	…	…	…	…	∞
$U(\omega)$	$U(\omega_1)$	$U(\omega_2)$	$U(\omega_3)$	…	…	…	…	…	$U(\infty)$
$jv(\omega)$	$jv(\omega_1)$	$jv(\omega_2)$	$jv(\omega_3)$	…	…	…	…	…	$jv(\infty)$

По отриманих даних на комплексній площині в координатах $U(\omega)$ і $jv(\omega)$наносять точки у дійсній та уявній частинах. Точки відповідають кінцям вектора (годографа).

3.2. Критерій стійкості Михайлова

У 1938 р. А.В.Михайлов використав годограф для оцінки стійкості системи. Вчений показав – для того, щоб система n-го порядку була стійкою, необхідно і достатньо, щоб вектор годографа Михайлова при використанні частоти від **0** до ∞ починав свій рух від позитивної дійсної навів осі, обертався проти стрілки годинника і ніде не перетворюючись в нуль, обходив послідовно n квадрантів комплексної площини, тобто обернувшись на кут $\frac{\pi}{2} \cdot n$, де n – степінь характеристичного рівняння.

Система буде стійкою, коли виконуються всі перелічені умови критерію.

Характер годографа залежить від степені характеристичного рівняння.

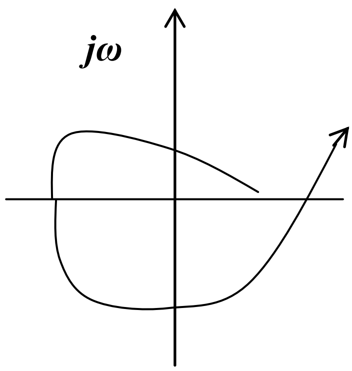
Якщо хоча б одна з умов не виконується, система буде нестійкою.

Формулювання критерія Михайлова

Система стійка, коли годограф обходить послідовно $\boldsymbol{n}$ квадрантів у позитивному напрямі, де $\boldsymbol{n}$ – порядок характеристичного рівняння.

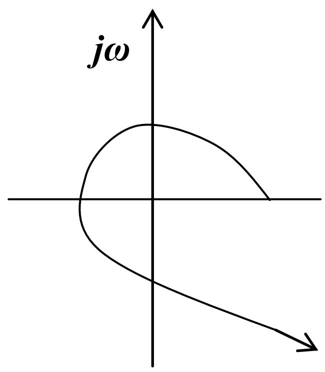
На рис.9.2 показані приклади годографів стійкості системи за критерієм Михайлова.

$\boldsymbol{n = 5}$



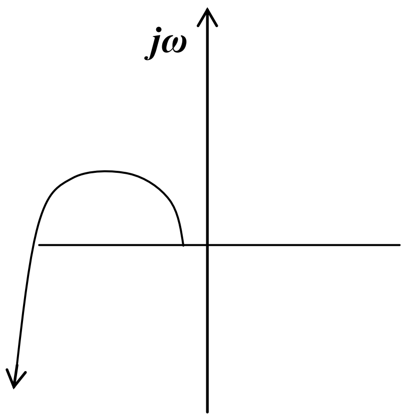
Стійка

$\boldsymbol{n = 4}$

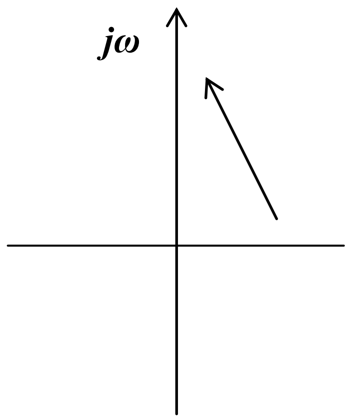


Стійка

$\boldsymbol{n = 3}$



$\boldsymbol{n = 5}$



Нестійка Нестійка

Рис.9.2 Графіки стійкості системи за критерієм Михайлова

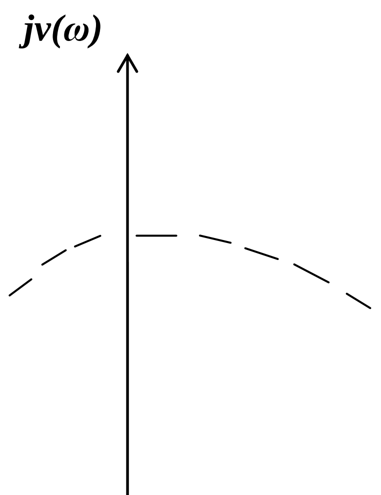
3.3 Експериментальний спосіб побудови годографа

Експериментальний спосіб визначення стійкості системи базується на побудові годографа, що зображає амплітудно – фазову частотну характеристику(АФЧХ). Його використовують у випадках, коли невідомі рівняння деяких ланок системи, бо навіть невідоме рівняння всієї системи.

Частотний годограф може бути побудований на основі результатів вимірювань фізичних величин на різних частотах.

ТАУ вивчає поведінку передаточної функції **W(*jω*)** системи на комплексній площині в залежності від частоти ***ω.***

Якщо змінювати частоту ***ω*** від «-∞» до «+∞», то вектор **W(*jω*)** буде змінюватись по величині і по фазі. Крива, яку опише кінець вектору – це амплітудно – фазова частотна характеристика (АФЧХ) – рис. 9.3



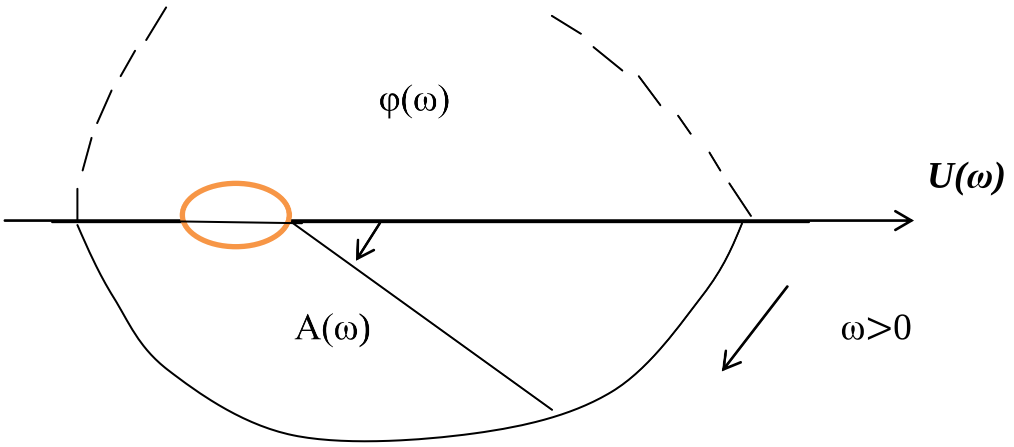


Рис. 9.3 Амплітудно – фазова частотна характеристика системи

Позначення на рис. 9.3

A(*ω***)** - ***амплітуда***

φ**(*ω*)** – ***фазовий зсув***

За видом АФЧХ оцінюють стійкість системи.

3.4 Критерій стійкості Найквіста

Експериментальний частотний критерій, який дозволив оцінювати стійкість системи, був розроблений у 1932р. американським вченим Г. Найквістом.

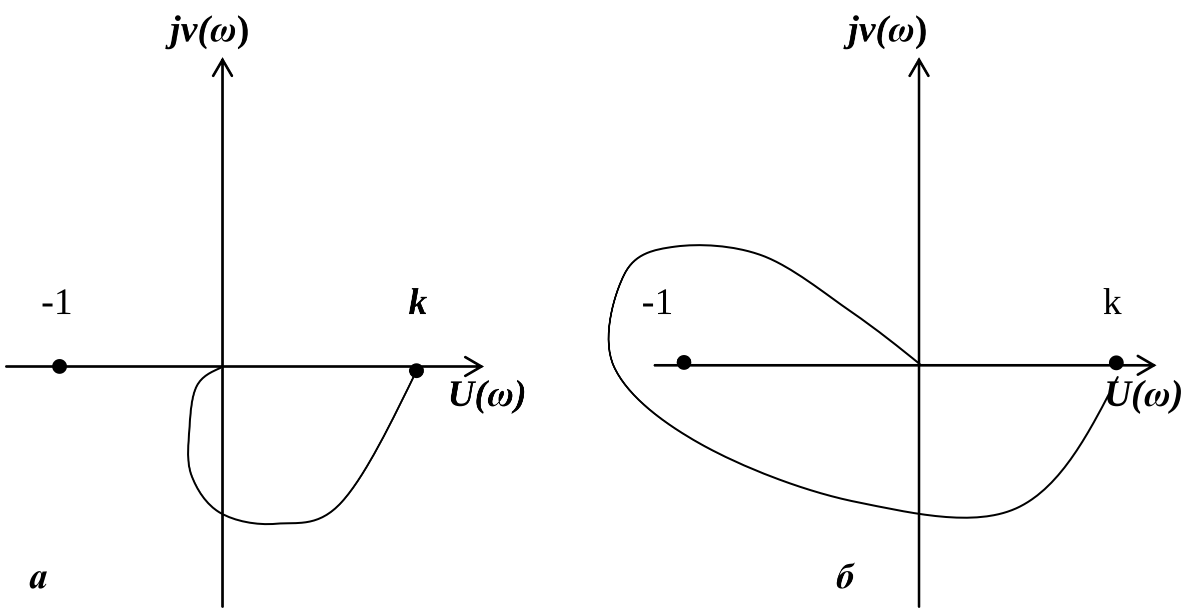
Критерій Найквіста дозволяє визначати стійкість замкненої системи за видом частотної характеристики розімкненої системи.

На рис. 9.3 показана частотна характеристика **W(*jω*)** передаточної функції **W(*P*).** Для кожної частоти ***ω*** значення **W(*jω*)** – це комплексне число, яке можна зобразити точкою на комплексній площині. При зміні частоти від

-∞ до ∞ з цих точок складається годограф Найквіста – крива, що починається у точці (***k;0***) на дійсній осі і закінчується на початку координат (***0;0***).

Г. Найквіст експериментально довів, що система стійка тоді і тільки тоді, коли годограф **W(*jω*)** не охоплює точку ***(-1; j0)***.

На рис. ***9.4 а*** годограф не охоплює цю точку (система стійка), на рис. ***9.4 б*** – охоплює (система нестійка), а на рис. ***9.4 в*** годограф проходить через точку ***(-1; j0)*** – система на межі стійкості.



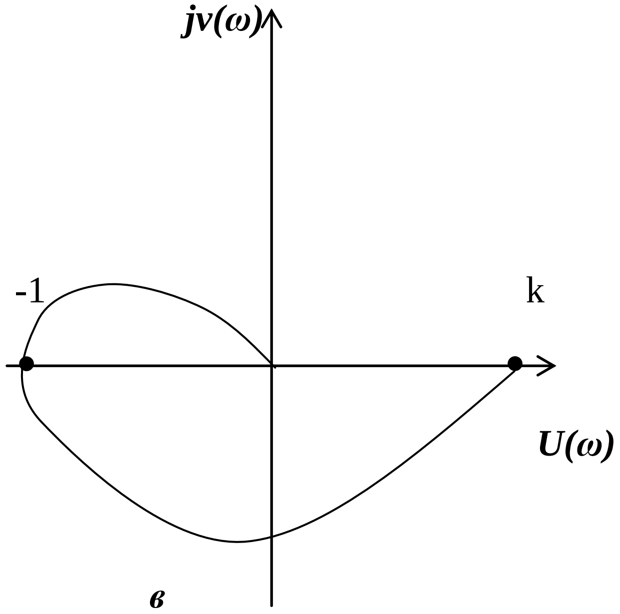


Рис. 9.4 Годографи Найквіста

До переваг метода слід віднести можливість оцінити стійкість системи без знання її диференціальних рівнянь, а також придатність використання результатів експериментів з розімкненими системами для оцінки стійкості замкнених систем.

Висновки по темі № 9

1.Стійкість є внутрішньою властивістю лінійних систем.
2. На практиці виходять з того, що для судження про стійкість лінійних АСУ достатньо визначити лише знаки дійсних частин коренів характеристичного рівняння.
3. Правила, за допомогою яких можна судити про знаки дійсних частин коренів, отримали назву **«критерії»**.
4. Алгебричні критерії встановлюють необхідні і достатні умови від'ємності дійсних частин коренів, що дає змогу визначити стійкість систем (критерій **Гурвіца**).

5. Частотні критерії визначають зв'язок між стійкістю системи і формою її частотної характеристики (критерії **Михайлова, Найквіста**).