

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

з навчальної дисципліни «Теорія машин і механізмів»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт**  
**Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів**

**за темою - Кінематичне дослідження механізмів**

**Кременчук 2023**

## **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

## **СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

## **ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол  
від 28.08.2023 № 1

### **Розробник:**

*Викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії,  
Сіора А.С.*

### **Рецензенти:**

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Кременчуцького льотного коледжу Харківського національного університету внутрішніх справ, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Тягній В.Г.*

### План лекції

1. Задачі та методи кінематичного дослідження. Функція положень та кінематичні передатні функції механізму. Плани механізму. Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм. Метод планів швидкостей та прискорень. Кінематичне дослідження механізмів аналітичними методами.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин: Підручник . - К.: Наукова думка, 2002. - 660 с. ISBN 966-00-0740-X
2. Кореняко О. С. Теорія механізмів і машин: Навчальний посібник / За ред. Афанасьєва М. К.-К.:Вища школа,1987 .-206 с.
3. Бучинський М.Я., Горик О.В., Чернявський А.М., Яхін С.В. Основи творення машин/ За редакцією О.В. Горика, – Харків : Вид-во «НТМТ», 2017. — 448 с. : 52 іл. ISBN 978-966-2989-39-7
4. Кіницький Я. Т. Практикум з ТММ: Навчальний посібник, Львів: Афіша, 2002. - 165 с.

#### Додаткова

5. Соколенко А.І., Українець А.І., Шевченко О.Ю., та ін.. Теорія механізмів і машин. Курсове проектування, навчальний посібник, 2005, К.: Люксар. – 112с.

#### Інформаційні ресурси

6. <http://mashinoved.ua>
7. <http://li.ro/go?www./optimi-zation>
8. <http://tmm-umk.bmstu.ua>

### Текст лекції

**1. Задачі та методи кінематичного дослідження. Функція положень та кінематичні передатні функції механізму. Плани механізму. Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм. Метод планів швидкостей та прискорень. Кінематичне дослідження механізмів аналітичними методами.**

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчається рух тіл у просторі та часі без урахування їх інертності (мас) і діючих на них сил. Кінематичне дослідження механізму, тобто дослідження руху ланок з точки зору структури (будови) механізму без урахування сил, що обумовлюють цей рух, полягає, в основному, в розв'язку трьох таких задач:

- визначення положень, переміщень ланок механізму і траєкторій окремих точок ланок;

- визначення швидкостей характерних точок і кутових швидкостей ланок;

- визначення прискорень характерних точок та кутових прискорень ланок.

Переміщення, траєкторії, швидкості та прискорення точок і кутові швидкості та прискорення ланок механізму є основними кінематичними характеристиками руху.

Кінематичне дослідження полягає у визначенні названих кінематичних характеристик за заданим законом руху початкової (вхідної) ланки та кінематичною схемою.

Закон руху початкової ланки, якщо вона виконує обертальний рух, в загальному випадку задають у вигляді рівняння  $\varphi = \varphi(t)$ , що виражає залежність кута її повороту (узагальненої координати) від часу. При поступальному русі початкової ланки цей закон може бути заданий у вигляді рівняння  $s = s(t)$ , що виражає залежність переміщення вхідної ланки від часу.

Функції переміщення  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $s = s(t)$  можуть бути також задані графічно. У деяких інженерних задачах закон руху може бути заданий у вигляді функцій швидкості  $\omega = \omega(t)$ ,  $v = v(t)$ , або прискорення -  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ ,  $a = a(t)$ .

Кінематичне дослідження механізмів виконують графічними, графоаналітичними, аналітичними й експериментальними методами. В ТММ широке розповсюдження отримали графічні та графоаналітичні методи. Це зумовлено тим, що ці методи універсальні (їх можна застосовувати для механізмів будь-якої структури), досить прості і наочні; в той час як аналітичні методи призводять до дуже громіздких формул і складних результатів. Для більшості практичних задач точність цих методів достатня. У свою чергу, графічні методи неефективні, коли необхідна висока точність і коли необхідно провести великий об'єм побудов. В наш час, завдяки широкому розповсюдженню ЕОМ та прикладних математичних програм, приділяють все більшу увагу аналітичним методам. З допомогою цих методів дослідження можна виконати з будь-якою ступінню точності. Крім того, суттєвим є те, що аналітичні методи дозволяють встановити взаємозв'язок кінематичних характеристик з його метричними параметрами, тобто розмірами ланок; результати аналітичного дослідження зручні для програмування та реалізації на ЕОМ, особливо з використанням сучасних систем комп'ютерної математики (Mathcad, Mathematica, Maple, MATLAB та інших).

Знання кінематичних параметрів необхідне для оцінки роботи існуючих машин або ж для практичного використання при конструюванні нових. Наприклад, траєкторії окремих точок механізму потрібні для визначення ходу ланок, для з'ясування можливого їх зіткнення з іншими ланками, окреслення габаритів картерів і корпусів машин. Для виконання силового розрахунку механізму необхідно визначити сили інерції та опір рухові ланок, для чого повинні бути відомі їх швидкості та прискорення. За кінематичними параметрами конструктор робить висновок про те, наскільки успішно виконана одна з основних задач проектування механізму - вибрана кінематична схема.

Функція положень та кінематичні передатні функції механізму

До числа кінематичних характеристик відносяться також і ті, що не залежать від закону руху початкових ланок (часу), а визначаються лише будовою механізму, розмірами його ланок і, в загальному випадку, залежать від узагальнених координат механізму. Це функції положень та кінематичні передатні функції.

Досить часто при проектуванні механізмів дійсний закон руху початкової ланки вдається визначити лише на наступних стадіях проектування, після динамічного аналізу. У таких випадках вводять кінематичні передатні функції, що не залежать від часу. А кінематичне дослідження виконується в два етапи - спочатку встановлюються залежності кінематичних параметрів ланок від узагальненої координати, тобто визначаються відносні функції (функції положення та кінематичні передатні функції механізму). І тільки після визначення закону руху початкової ланки знаходять залежності кінематичних параметрів вихідних і проміжних ланок від часу.

**Функція положень механізму.** Функцією положень будь-якої ланки механізму називають залежність координати, що відображає положення даної ланки, від узагальненої координати і геометричних параметрів механізму. Функція положень вихідної ланки є функцією положення механізму. Тобто це залежність  $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$  для третьої ланки механізму на рис. 2.1, або в загальному вигляді  $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1)$  при обертальному русі  $n$ -ої ланки; при поступальному русі ланки, наприклад, ланки 5 механізму на рис. 1.3,  $s$  – залежність  $s_F = s_F(\varphi_1)$ . Треба зазначити, що в загальному випадку механізму з декількома ступенями вільності функція положень механізму є функцією усіх узагальнених координат  $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s)$ , де  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$  – узагальнені координати механізму.

Отже, функція положень є геометричною характеристикою механізму, яка не залежить від закону руху початкової ланки (часу, абсолютних значень швидкостей ланок і т.ін.) і визначається лише структурною схемою механізму та розмірами його ланок. Також відзначимо, що функція положень навіть для найпростіших важільних механізмів виражається складними рівняннями. Однак одержати її у графічній формі розміткою траєкторій неважко. Зупинимося на цій задачі нижче.

**Перша та друга кінематичні передатні функції механізму.** Диференціюючи двічі функцію положень по узагальненій координаті, отримаємо вирази

$$\frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \varphi'_n, \quad \frac{ds_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} = s'_n, \\ \frac{d^2\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1^2} = \varphi''_n, \quad \frac{d^2s_n(\varphi_1)}{d\varphi_1^2} = s''_n.$$

Одержані функції  $\varphi'_n, s'_n$  і  $\varphi''_n, s''_n$  є геометричними характеристиками  $n$ -ої ланки механізму і називаються, відповідно, *першою та другою передатними функціями механізму*. Або  $s'_n$  – кінематична передатна функція швидкості точки (аналог швидкості);  $\varphi'_n$  – кінематична передатна функція кутової швидкості ланки (аналог кутової швидкості або передатне відношення);  $s''_n, \varphi''_n$  – відповідно передатна функція прискорення або кутового прискорення (аналог прискорення точки або аналог прискорення ланки).

Встановимо зв'язок між вказаними геометричними та кінематичними характеристиками механізму з одним ступенем вільності при обертальному русі  $n$ -ої ланки. Продиференціюємо функцію положення за часом

$$\omega_n = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{dt} = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi'_n \cdot \omega_1,$$

тобто,  $\omega_n = \omega_1 \cdot \varphi'_n = \omega_1 \cdot u_{n1}$ ,

де  $\omega_1, \omega_n$  - кутові швидкості відповідно ланок  $I$  та  $n$ ;  $u_{n1} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$ .

Як бачимо, функція  $\varphi'_n = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \frac{dt}{dt} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$  є відношенням миттєвих швидкостей ланок; в загальному випадку її називають передатною функцією. Відношення  $\frac{\omega_n}{\omega_1}$  називається *передатним відношенням* і позначається  $u_{n1}$ .

*Відношення кутової швидкості однієї ланки до кутової швидкості другої ланки називається передатним відношенням, позначається буквою  $u$ , як правило, з цифровими індексами, що відповідають номерам розглядуваних ланок  $u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}$ .*

*Передатне відношення є величиною безрозмірною. Це одна з основних характеристик механізмів передач.*

З допомогою другої похідної функції положення за часом визначають кутові прискорення ланок механізму

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{d^2\varphi_n(\varphi_1)}{dt^2} = \frac{d\omega_n}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \cdot \varphi'_n) = \\ &= \omega_1 \frac{d\varphi'_n}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi'_n \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1^2 \cdot \varphi''_n + \varphi'_n \cdot \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Якщо  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ , то  $\varepsilon_i = \varphi''_n \cdot \omega_1^2$ .

Таким чином, дійсна кутова швидкість  $n$ -ої ланки механізму дорівнює добутку кутової швидкості  $\omega_1$  початкової ланки на першу передатну функцію (передатне відношення  $u_{n1}$ ); помноживши другу передатну функцію на  $\omega_1^2$  (при  $\omega_1 = \text{const}$ ), дістанемо, відповідно, прискорення  $n$ -ої ланки. Фізичний зміст передатних функцій такий: перша  $\varphi'_n = u_{n1}$  та друга  $\varphi''_n$  передатні функції являють собою відповідно швидкість  $\omega_n = \varphi'_n \cdot 1$  та прискорення  $\varepsilon_n = \varphi''_n \cdot 1^2$   $n$ -ої ланки механізму за умови, що  $\omega_1 = 1$ . Тому зазначені передатні функції називають також аналогами швидкостей та прискорень.

При поступальному русі ланки викладки аналогічні:

$$v_n = \frac{ds_n(\varphi_1)}{dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = s'_n \cdot \omega_1,$$

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{d(s'_n \omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{ds'_n}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + s'_n \frac{d\omega_1}{dt} = s''_n \cdot \omega_1^2 + \varepsilon_1 \cdot s'_n.$$

Якщо  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ , тоді  $a_n = s''_n \cdot \omega_1^2$ .

Передатні функції швидкості та прискорення мають розмірність довжини, кутові передатні функції є безрозмірними величинами.

Оскільки для даної кінематичної схеми механізму передатні функції залежать лише від узагальненої координати і не залежать від закону руху початкової ланки, то кінематичне дослідження можна виконувати суто геометричними методами. Передатні функції дозволяють легко порівнювати закони руху ланок, а отже і знаходити оптимальні параметри механізму за

заданими умовами роботи. Кінематичне дослідження за допомогою передатних функцій є ефективним у випадку кількох можливих рухів початкової ланки.

Якщо при проектуванні чи дослідженні механізму задана чи визначена функція положення або одна з передатних функцій механізму, то інші залежності можуть бути встановлені методами диференціювання чи інтегрування як числовими, так і графічними.

### Плани механізму

Визначення переміщень, положень ланок і траєкторій, що описують окремі точки ланок, тобто розв'язання першої основної задач кінематики, можна виконати графічними або аналітичними методами. Досить широко використовується графічний метод - за допомогою побудови планів механізму.

*Зображення кінематичної схеми механізму у вибраному масштабі при відповідному положенні початкової ланки називається планом механізму.*

Графічне розв'язування задач теорії механізмів потребує зображення різноманітних фізичних величин (шляху, довжин ланок, швидкостей, прискорень, сил і т. ін.) у вигляді ліній тієї чи іншої довжини. Для цього користуються масштабним коефіцієнтом.

*Масштабний коефіцієнт (масштаб) є відношення дійсного значення зображуваної величини до довжини відрізка, який цю величину зображує на кресленні.* Масштаб позначається літерою  $\mu$  з індексом того параметра, який зображується графічно.

$$\mu_x = \frac{x}{ab} \quad \begin{array}{l} \text{— деяка фізична величина, яку зображають графічно} \\ \text{— довжина відрізка, який зображає дану величину на кресленні} \end{array} \quad \text{Масштаб має}$$

розмірність: у чисельнику – розмірність зображуваної величини, а у знаменнику - мм (розмірність довжини відрізка на кресленні).

Таким чином, масштаб довжини – це відношення натурального розміру ланки в метрах до довжини відрізка в міліметрах, який зображує цю ланку на кресленні (плані механізму),  $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB}, \frac{м}{мм}$ , де  $l_{AB}$  - справжній розмір;  $AB$ - масштабний розмір на кресленні.

При виборі масштабу рекомендують дотримуватися стандартних креслярських масштабів, а також міркувань зручності підрахунків та наочності зображення. Наприклад, масштабу  $M1:1$  відповідає масштабний коефіцієнт  $\mu_l=0,001м/мм$ , масштабу  $M1:2$  відповідає  $\mu_l=0,002м/мм$  і т.ін.

Для побудови планів механізму повинні бути задані розміри всіх його ланок, а якщо будується одне конкретне положення механізму і положення початкової ланки.

У русі більшості механізмів спостерігається циклічність, при цьому усі кінематичні параметри механізмів змінюються періодично. Тому, зазвичай, при дослідженні механізмів будують ряд послідовних положень механізму. При виконанні курсових проектів, як правило, кінематична схема механізму будується для 12 положень.

*Послідовність побудови планів механізму:*

□ вибирають масштаб побудови  $\mu_l$ ;  
 □ знаходять довжини відрізків, якими на кресленні зображатимуться ланки (рис. 2.1 –  $\mu_l = \frac{l_{AO_1}}{AO_1}$ , отже  $AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}$ ,  $BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}$ ,  $O_1C = \frac{l_{O_1C}}{\mu_l}$ );

□ перш за все, на креслення наносять положення нерухомої ланки (намічаються нерухомі точки механізму, наносяться, при наявності, нерухомі напрямні; на рис. 2.1 – т.  $O_1$ ,  $C$ );

□ викреслюють задане положення початкової ланки. Якщо будується  $n$  планів механізму, то знаходять початкові (“мертві”, крайні) положення механізму і, відповідно, початкової ланки;

□ лише після цього викреслюють групи Ассура в порядку їх приєднання при утворенні механізму.

Наголосимо, що доцільно за початкове положення механізму (кривошипа) вибрати те, яке відповідає одному з крайніх положень вихідної ланки (ланки, до якої прикладена сила корисного опору, або рушійна сила). У кривошипно-повзунному механізмі чи шарнірному чотириланковому (або якщо вони лежать в основі розглядуваних механізмів) вихідна ланка перебуватиме у крайніх положеннях, коли кривошип накладатиметься на шатун, або витягуватиметься в одну лінію з ним. У кулісному механізмі вихідна ланка (куліса  $CD$ , рис. 1.3, *в*) перебуватиме у крайніх положеннях, коли кривошип  $AB$  і куліса утворюють прямий кут. Зазначимо, що з двох крайніх положень механізму за початкове вибирають те, що відповідає початку робочого ходу. Оскільки в більшості машин робочий хід здійснюється повільніше (рівномірніше) ніж холостий, то він відповідає руху кривошипа з одного крайнього положення до іншого через більший з центральних кутів. Більший з центральних кутів, що описує кривошип при русі механізму з одного крайнього положення до іншого, називається *кутом робочого ходу*.

Розглянемо побудову 12 планів механізму на прикладі шарнірного чотириланкового, структурна схема якого зображена на рис. 1.3, *а*. Виконуємо перші три пункти наведеної вище послідовності побудови планів. Після цього, радіусом  $O_1A$  (рис. 2.1) проводимо коло з центром у т.  $O_1$ , яке є геометричним місцем миттєвих положень т.  $A$  кривошипа 1. Як відомо, закон руху початкової ланки в загальному випадку задається у вигляді рівняння  $\varphi = \varphi(t)$ . В технічних задачах при кінематичному дослідженні механізмів закон руху початкової ланки беруть лінійним, тобто швидкість її руху вважають сталою ( $\omega_1 = \text{const}$ , дорівнює проєктованій середній кутовій швидкості; в дійсності кривошип може обертатися нерівномірно, навіть із зупинками). Таким чином, за рівні проміжки часу кривошип повертається на рівні кути. При побудові 12 планів механізму коло, що описує т.  $A$  кривошипа, ділиться на 12 рівних частин, починаючи з початкового положення механізму. Для його знаходження з центра обертання кривошипа  $O_1$  досить зробити засічки радіусами  $R=AB-O_1A$  і  $R=O_1A+AB$  на траєкторії руху т.  $B$  – дузі  $\alpha_3$ - $\alpha_3$  (відповідно кривошип  $O_1A$  накладатиметься на шатун  $AB$  або витягуватиметься з ним в одну лінію). За початкове положення т.  $A$  візьмемо т.  $A_0$ , яка відповідає початку робочого ходу ( $\varphi_p > \varphi_x$ ), при заданому



напрямі обертання кривошипа. Зрозуміло, що т.  $A'_0$  не завжди збігається з точками поділу траєкторії т.  $A$  на рівні частини, послідовні положення якої позначені  $A_0, A_1, A_2, \dots, 11$ .

Для визначення положення ланок 2 і 3 достатньо встановити положення кінематичної пари  $B$ , що шарнірно з'єднує ці ланки між собою. Для цього умовно роз'єднуємо шарнір у т.  $B$  і розглядаємо можливі рухи цієї точки. Оскільки нерухомий центр обертання  $C$  займає цілком певне положення, то т.  $B$ , яка знаходиться на сталій відстані  $BC$  від т.  $C$ , може описати тільки дугу  $\alpha_3 - \alpha_3$  кола радіуса  $BC$ . З іншого боку, внаслідок незмінності довжини шатуну  $AB$  точка  $B$  може описати навколо т.  $A$  тільки дугу радіуса  $AB$ . Таким чином, геометричним місцем можливих положень центра шарніра  $B$  є дві дуги кіл радіусів  $AB$  та  $BC$ . Точка перетину цих дуг і дасть дійсне положення т.  $B$  для конкретного положення кривошипа.

Отже, якщо потрібно побудувати, наприклад, 3-тє положення механізму, то з точки  $A_3$  радіусом  $R=AB$  робимо засічку на дузі  $\alpha_3 - \alpha_3$ . Точка перетину дуг дає шукане положення т.  $B_3$ . Дану побудову називають способом *засічок*. Для знаходження положень ланок 2 і 3 достатньо з'єднати відповідні точки (центри кінематичних пар  $A$  та  $B$ ,  $B$  та  $C$ ) відрізками. Аналогічно будуємо всі інші положення механізму.

Якщо до складу механізму входять декілька груп Ассура, то їх плани будуються аналогічно.

На планах механізму, у разі необхідності, можна побудувати траєкторії, що описують окремі точки ланок. Траєкторії різних точок шатуну мають різноманітну форму, оскільки шатун здійснює плоскопаралельний рух. Траєкторії точок, що розміщені на ланках, які здійснюють плоскопаралельний рух, називають *шатунними кривими*. Точність побудованої траєкторії залежить від вибраного числа положень механізму і масштабу  $\mu_l$ . На рис. 2.1 показано, наприклад, послідовні положення т.  $S$  шатуну 2. З'єднавши плавною кривою намічені точки  $S_i$  для кожного з положень механізму, одержимо траєкторію т.  $S$ . Відмітимо, що шатунні криві можуть бути також описані аналітичними співвідношеннями, але в цьому випадку задача значно ускладнюється. Наприклад, для шарнірного чотириланковика траєкторія т.  $S$  описується кривою шостого порядку.

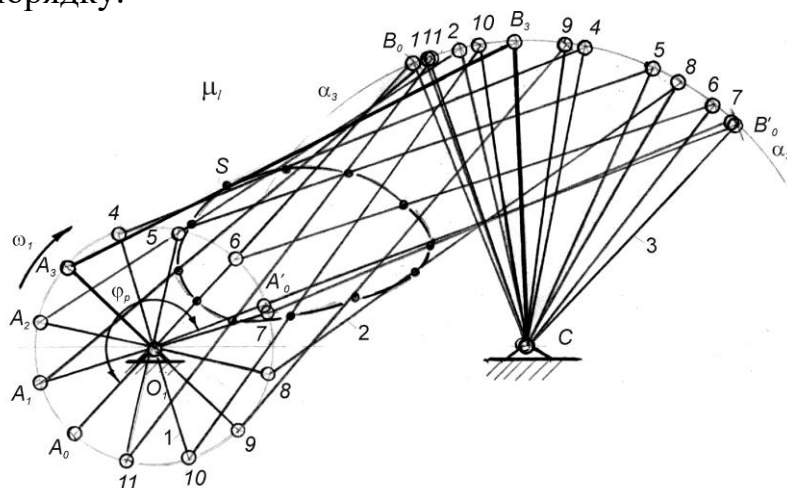


Рис. 2.1

Зазначимо, що залежно від вибору положення точки ( $F$ ,  $E$ ,  $K$ ,  $H$ ,  $G$ ) на шатуні отримуються різні шатунні криві (рис. 2.2). Окремі ділянки деяких кривих мало відрізняються від прямих або дуг кіл. Ці ділянки можуть бути використані для спрямляючих механізмів або механізмів із зупинками. Шатунні криві в сучасній техніці широко використовуються для виконання певних рухів робочих органів різних машин і механізмів. Наприклад, у механізмі сіноворушилки, в тістомісильній машині і т.ін.

Подібно будуються плани механізму (кінематичні схеми) інших важільних механізмів другого класу.

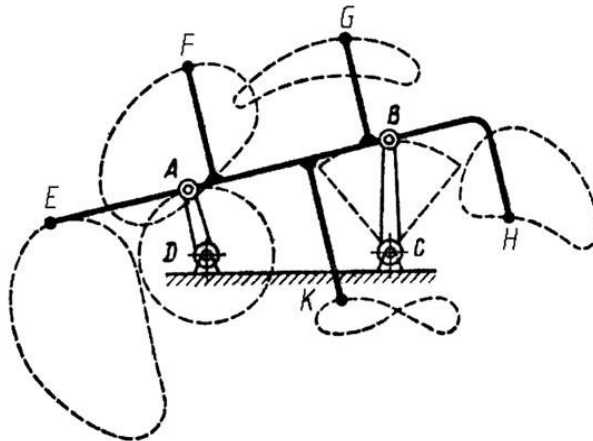


Рис. 2.2

При побудові планів механізмів, що мають триповодкові групи, також може бути використаний метод перетину двох траєкторій відносного руху (спосіб засічок). Цей спосіб в розглядуваному випадку ще називають способом *удаваних положень* або *геометричних місць*. Оскільки такий метод побудови є досить трудомістким, часто користуються шаблоном, який має форму базисної ланки.

У випадку механізмів з вищими кінематичними парами (наприклад, кулачковими) доводиться враховувати, що профілі, або один з них, мають складні контури. Викреслювання послідовно декількох складних профілів є трудомісткою процедурою. У цих випадках доцільно застосувати *метод обернення руху* (метод *інверсії*). Суть його полягає в тому, що всьому механізмові (разом зі стояком) надають обертання з кутовою швидкістю, яка дорівнює за величиною, але протилежна за напрямом кутовій швидкості ланки, що має складний профіль (кулачок). Таким чином, рухому ланку зі складним контуром умовно роблять нерухомою; це дозволяє викреслювати її лише один раз. Відносне положення усіх ланок при цьому не змінюється. Приклад використання методу обернення руху буде розглянуто при вивченні кулачкових механізмів.

При побудованих планах механізму неважко побудувати діаграми переміщення та отримати функції положень ланок механізму.

**Побудова діаграм переміщення.** При дослідженні механізмів будують діаграми лінійних або, при коливальному русі ланки, кутових переміщень.

Розглянемо побудову графіка  $s_B(t)$  переміщень повзуна  $B$  кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3):

- викреслюють 12 рівновіддалених за кутом повороту кривошипа планів механізму в масштабі  $\mu_l, \frac{м}{мм}$ ; за початок відліку прийнято нижнє крайнє положення повзуна;

- будують прямокутну систему координат. На осі абсцис відкладають відрізок  $l$ , що в масштабі  $\mu_l$  зображає період  $T$  одного оберту кривошипа, тобто  $\mu_l = \frac{T}{l}, \frac{с}{мм}$ ;

- ділять відрізок  $l$  на 12 рівних частин. Від точок поділу  $1, 2, 3, \dots, 11$ , паралельно осі ординат, відкладають відрізки  $1-1', 2-2', 3-3', \dots$ , які у вибраному масштабі  $\mu_s$  зображають переміщення повзуна від крайнього нижнього положення. Якщо переміщення відкладаються безпосередньо з планів механізму (як у прикладі на рис. 2.3), то  $\mu_s = \mu_l$ .

З'єднавши одержані точки  $0, 1', 2', \dots, 11'$  плавною кривою, отримують діаграму переміщень повзуна,  $s_B(t)$ . Оскільки у задачах кінематики прийнято рух кривошипа рівномірним (за однакові проміжки часу він повертається на рівні кути), то можна вважати, що по осі абсцис відкладено і час  $t$  і кут повороту кривошипа  $\varphi$ . Тобто графік  $s_B(t)$  одночасно є графіком  $s_B(j_1)$ , який представляє собою функцію положення механізму. Масштаб  $\mu_\varphi$  цього графіка буде:  $\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l}, \frac{рад}{мм}$ , або  $\mu_\varphi = \frac{360^\circ}{l}, \frac{град}{мм}$ .

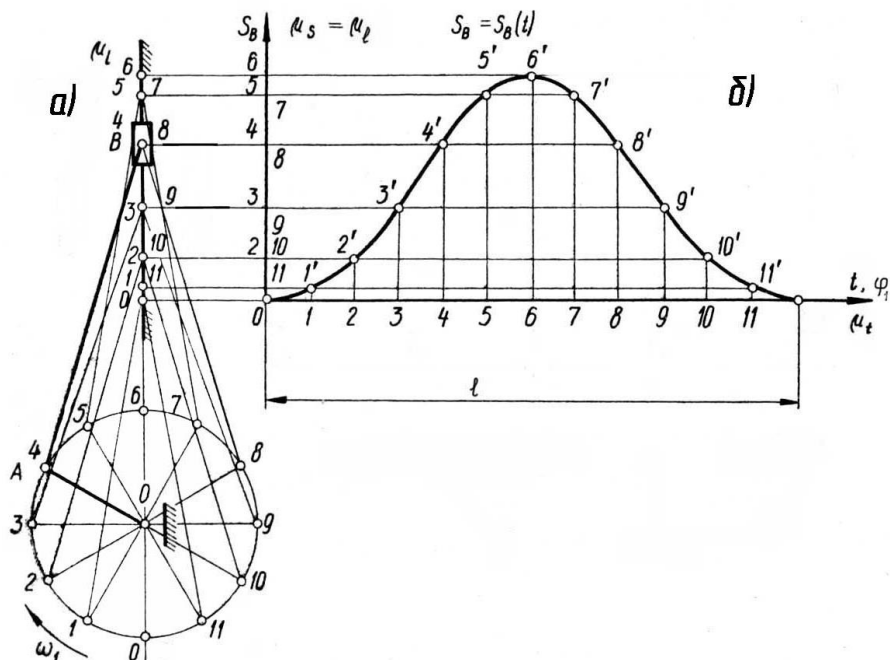


Рис. 2.3

### Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм

Якщо один з кінематичних параметрів механізму заданий у вигляді графіка чи таблиці значень, то в цьому випадку ефективними є графічні або чисельні методи диференціювання та інтегрування. Зазначимо, що при експериментальному дослідженні такі графіки викреслюються за допомогою самописних приладів.

Задачі дослідження закономірності зміни переміщень, швидкостей і прискорень за повний цикл (період) руху досліджуваного механізму простіше розв'язуються за допомогою *кінематичних діаграм (графіків руху)*.

У практичних задачах ТММ кожна *кінематична діаграма* - це графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів ланки: переміщення, швидкості або прискорення як функції від часу або переміщення початкової ланки механізму (як функції від узагальненої координати). Наприклад, у випадку кривошипно-повзунного механізму для т.В повзуна (рис. 2.3) - це залежності  $s_B(t)$ ,  $v_B(t)$ ,  $a_B(t)$  або  $s_B(\varphi_1)$ ,  $v_B(\varphi_1)$ ,  $a_B(\varphi_1)$ . Якщо дослідженню підлягає  $i$ -та ланка механізму, яка здійснює обертальний рух, то можна побудувати діаграми  $\varphi_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$ ,  $\varepsilon_i(t)$ , або  $\varphi_i(\varphi_1)$ ,  $\omega_i(\varphi_1)$ ,  $\varepsilon_i(\varphi_1)$ .

Розглядуваний метод дозволяє при заданій будь-якій з цих діаграм без значних зусиль отримати інші. Методом кінематичних діаграм часто користуються для наочності та виявлення можливих помилок при обчисленні. Переваги цього методу – простота у використанні й те, що результатом є наочне графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів руху від часу чи узагальненої координати. Варто мати на увазі, що методи графічного диференціювання та інтегрування не завжди можуть забезпечувати достатню точність результатів.

Зазначимо, що до графічного диференціювання та інтегрування необхідно деколи звертатись навіть у тих випадках, коли кінематична функція задана аналітично, але не має достатньо простих формул для визначення похідної чи інтеграла.

**Графічне диференціювання. Метод дотичних.** Графічне диференціювання використовується, коли є графік функції, а потрібно отримати графік її похідної. Так, наприклад, побудовано графік переміщення повзуна кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3), а необхідно побудувати графіки швидкості, прискорення.

Розглянемо теоретичні основи графічного диференціювання. Використаємо відому залежність  $v = \frac{ds(t)}{dt}$ . Геометрично, похідна функції визначається тангенсом кута нахилу дотичної до графіка функції, проведеної у точці, абсциса якої є точка диференціювання,  $f'(x) = \tan \alpha$ .

Нехай крива  $AB$  (рис. 2.4) є графік деякої функції  $y = f(x)$ . Проведемо дотичну до графіка у т.  $M_1$ , що відповідає заданій абсцисі  $x_1$ . Відкладемо на осі абсцис вліво від початку прямокутної системи координат відрізок  $OP$  (полюсну відстань), що дорівнює одиниці масштабу. З точки  $P$  (полюса) проведемо

пряму, паралельну дотичній до перетину з віссю ординат. Відрізок  $Ol''$  буде виражати значення похідної  $f'(x)$ , при заданому значенні  $x_1$ .

$$Ol'' = OP \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x)$$

Проведемо з точки  $l'$  пряму, паралельну осі  $Ox$ , до перетину з ординатою т. $M_1$ . Ордината точки перетину  $l''$  дає значення похідної  $f'(x)$  при заданому значенні  $x_1$ . Тобто, точка  $l'$  буде точкою шуканої диференціальної кривої. У загальному випадку, ордината диференціальної кривої у будь-якій точці є відрізок, пропорційний до кута нахилу дотичної, що проведена у відповідній точці заданої кривої.

Таким чином, для того, щоб побудувати графік похідної за графіком функції, поділимо ділянку  $AB$ , заданої кривої, на деяке число частин. Далі, розглянутим методом, неважко знайти у точках поділу заданої кривої значення похідної - тобто точки диференціальної кривої. З'єднавши отримані точки плавною кривою, дістанемо графік функції  $y = f'(x)$ .

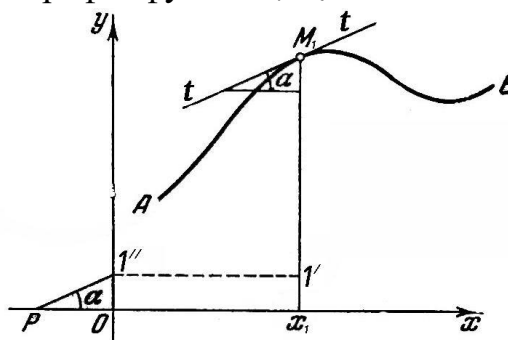


Рис. 2.4

Диференціювання методом дотичних має відносно низьку точність, оскільки досить складно проводити дотичні до кривих. Більшого поширення набув метод хорд, який відрізняється більшою точністю. Відмінність методу хорд полягає лише у тому, що значення похідної функції знаходять не у точках поділу кривої, а у точках, що ділять навпіл кожний з інтервалів (рис. 2.5, точки  $M_1, M_2, M_3, \dots$ ). Перевагою є те, що при цьому замість дотичних беруться, як правило, з досить великою точністю, хорди, що з'єднують кінцеві точки кожного інтервалу. Метод ґрунтується на відомій теоремі про скінчений приріст функції: якщо функція, що задана графічно, та її перша похідна неперервні, то в будь-якому інтервалі хорда, що стягує дану дугу, паралельна дотичній до кривої, принаймні, в одній точці, яка лежить у середині цього інтервалу.

Зазначимо, що графік похідної буде точнішим при більшій кількості частин поділу кривої. Інтервали не обов'язково повинні бути рівними між собою; їх розмір вибирається з урахуванням того, щоб відповідні частини кривої менше відхилялись від прямої. Особливу увагу треба звернути на ділянки, де крива, яку диференціюють, має екстремуми; ділянки, у яких лінія значно звивається, слід розбивати на більше число частинок.

**Масштаби при графічному диференціюванні.** Припустимо, що задана крива (рис. 2.5) зображає діаграму переміщень,  $s_B(t)$ . Знаючи масштаб  $\mu_s$

переміщень та масштаб  $\mu_t$  часу, для будь-якої точки  $M(x,y)$  кривої можна записати  $s = y \cdot \mu_s$ ,  $t = x \cdot \mu_t$ . Тоді

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \frac{dy}{dx} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.1)$$

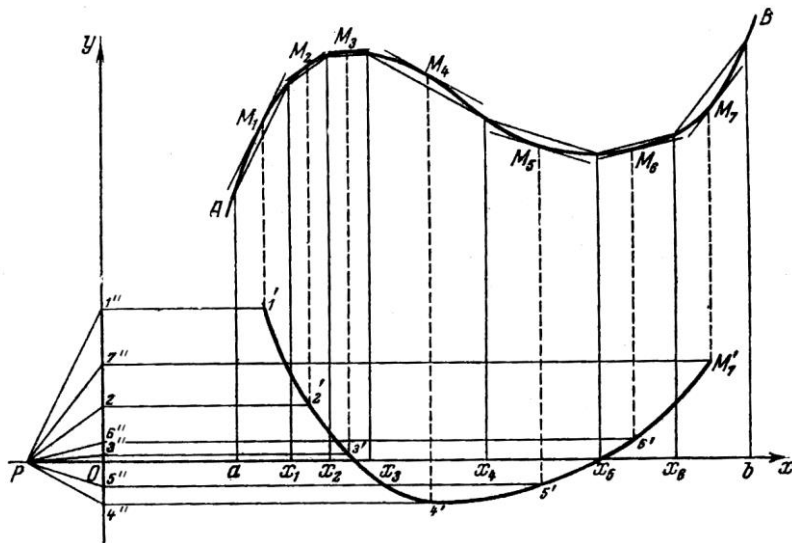


Рис. 2.5

Підставимо в (2.1)  $v = y'_i \cdot \mu_v$  та  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_i}{H}$ ,

де  $y'_i$  - відрізки  $01''$ ,  $02''$ ,  $03''$ ,..., які зображають в масштабі  $\mu_v$  швидкості у відповідних положеннях механізму;  $H$  - полюсна відстань  $OP$ . Тоді масштаб графіка швидкості  $\mu_v$  можна визначити за формулою

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{H \cdot \mu_t},$$

або в загальному випадку масштаб диференціальної кривої  $\mu_{y'} = \frac{\mu_y}{H \cdot \mu_x}$ .

**Послідовність диференціювання методом хорд.** Задано діаграму переміщення кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.6, а). Побудуємо діаграму швидкості:

- на заданій кривій відмічають ряд точок  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,..., які з'єднують хордами, тобто, замінюють задану криву ламаною лінією;
- під діаграмою переміщень будуємо нову систему координат так, щоб осі абсцис були паралельними, а ординат - лежали на одній прямій (рис. 2.6, б). Ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку;
- відкладаємо по осі абсцис ліворуч від початку системи координат довільний відрізок  $OP_1$  - полюсну відстань;

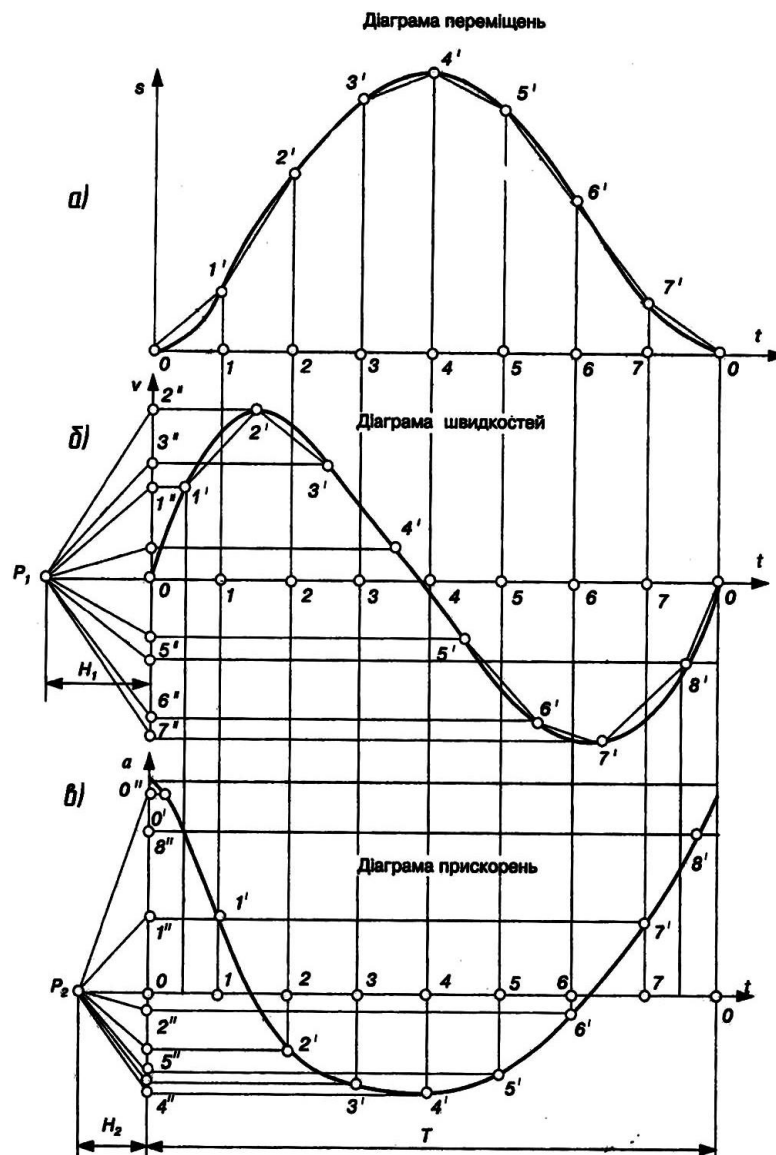


Рис. 2.6.

- з точки  $P_1$  проводимо промені  $P_11''$ ,  $P_12''$ ,  $P_13''$ ,..., паралельні до відповідних хорд кривої переміщень. Ці промені відтинають на осі ординат відрізки  $01''$ ,  $02''$ ,  $03''$ ,..., що пропорційні середній швидкості повзуна посередині відповідних інтервалів часу;

- перенесемо точки  $01''$ ,  $02''$ ,  $03''$ ,..., на середини ординат відповідних ділянок. З'єднаємо точки  $0$ ,  $1'$ ,  $2'$ ,... плавною кривою. Отримана крива і буде діаграмою швидкості.

Маючи діаграму швидкості, аналогічно методом хорд будують, за потреби, діаграму прискорень (рис. 2.6, в).

Зазначимо, якщо діаграму переміщень задано у вигляді функції  $s_B(\varphi_1)$ , то в результаті графічного диференціювання отримуємо відповідно графіки кінематичних передатних функцій швидкості  $s'_B(\varphi_1)$  та прискорення  $s''_B(\varphi_1)$  (аналогів швидкості та прискорення).

Масштаби по осях ординат визначаються за формулами:

$$- \text{ для діаграм швидкостей та прискорень } \mu_v = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_t}, \quad \mu_a = \frac{\mu_v}{H_2 \cdot \mu_t},$$

– для діаграм аналогів швидкостей та прискорень  $\mu_{s'} = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_\phi}$ ,  $\mu_{s''} = \frac{\mu_{s'}}{H_2 \cdot \mu_\phi}$ ,

де  $H_1, H_2$  – відрізки в мм, взято з креслення (рис. 2.6).

Масштаби по осях абсцис  $\mu_\phi$  усіх графіків залишаються звичайно такими ж, як і на графіку переміщень.

Порівнюючи графіки (рис. 2.6), можна встановити такий зв'язок між кінематичними діаграмами:

- зростанню ординат кривої функції, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню – від'ємні значення;

- екстремальним значенням функції (максимуми та мінімуми) відповідають нульові значення графіка похідної.

- точкам перегину графіка функції відповідають екстремальні значення диференціальної кривої.

**Графічне інтегрування.** Побудову графіків швидкості за заданим графіком прискорень та графіків переміщень – за графіком швидкостей виконують так званими прийомами графічного інтегрування.

Існує декілька способів побудови інтегральної кривої: спосіб *хорд*, *площ* та інші.

Розглянемо спосіб хорд. Інтегрування – це дія, обернена диференціюванню. Відповідно послідовність графічного інтегрування за способом хорд обернена послідовності диференціювання за цим способом. Нехай заданим є графік функції швидкості  $v(t)$ . Знайдемо графік функції переміщення  $s(t)$ .

**Послідовність графічного інтегрування.**

1. Ділимо задану криву (рис. 2.7, а) на інтервали - точки 1, 2, 3, ... на осі абсцис.

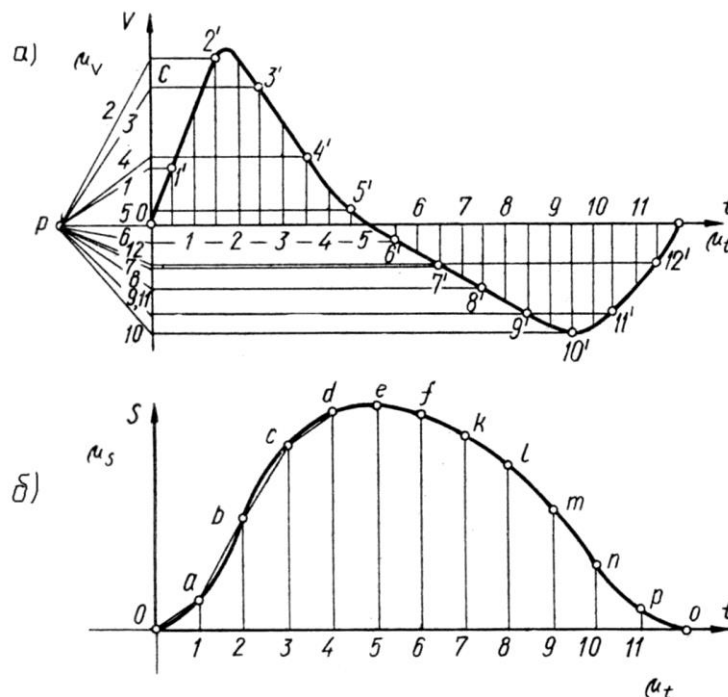


Рис. 2.7



2. Проводимо полюсну відстань  $OP$ . Ординати  $1', 2', 3', \dots$  середини кожного інтервалу проєктують на вісь ординат і отримані точки з'єднують з полюсом  $P$ .

3. Під діаграмою швидкості будуємо нову систему координат (рис. 2.7, б). Ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку.

4. З початку нової системи координат  $O$  проводять у першому інтервалі лінію  $0a$  паралельно до променя  $P1$ ; з кінця відрізка  $0a$  проводять у другому інтервалі відрізок  $ab$  паралельний променю  $P2$ , і так далі,  $bc//P3$ ,  $cd//P4, \dots$  Отриману ламану лінію замінюють плавною кривою, одержують графік переміщень

Масштаб одержаної інтегральної кривої знаходять за формулою

$$\mu_s = \mu_v \mu_t H$$

або, в загальному випадку,  $\mu_y = \mu_v \mu_x H$ .

**Чисельне диференціювання та інтегрування.** До чисельного диференціювання звертаються, перш за все, коли функція  $f(x)$ , для якої потрібно знайти похідну, задана таблично. При розробці програм для чисельного диференціювання на ЕОМ використовують інтерполяційні формули Ньютона, Стірлінга, Бесселя та ін..

Розглянемо як приклад формули диференціювання функції  $f(x)$ , яка задана скінченною множиною  $y_1, y_2, \dots, y_n$  її значень у  $n$  рівновіддалених точках  $x_i$  з кроком  $h = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 2, \dots, n$ ). Шукане значення похідної  $y'_i = \frac{dy}{dx}$  обчислюється за формулами

$$y'_i = \frac{1}{2h}(-y_3 + 4y_2 - 3y_1) \quad (\text{при } i=1),$$

$$y'_i = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$y'_i = \frac{1}{2h}(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}) \quad (\text{при } i=n).$$

Зазначимо, що чисельне диференціювання чутливе до помилок, які викликані похибками вихідних даних.

Чисельне інтегрування функції  $y(x)$ , що задана множиною значень аргументу  $x_i$  і відповідних їм значень функції  $y_i$ , виконують за формулами трапеції, Сімпсона та інших. Наведемо, для прикладу, формулу *трапеції*. У рівновіддалених значеннях аргументу  $x_i$  значення інтегралів  $I = \int_{x_1}^{x_i} y(x) dx$  обчислюють за формулою

$$I_i = I_{i-1} + \frac{h}{2}(y_i + y_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

### Метод планів швидкостей та прискорень

Методи графічного диференціювання та інтегрування при всій їх простоті та наочності не розв'язують повністю питання кінематики. Діаграми переміщень, швидкостей та прискорень дають лише скалярні кінематичні величини, а напрями векторів цих величин невідомі. Цього недоліку позбавлений графоаналітичний метод, що ґрунтується на побудові планів

швидкостей та прискорень (*векторний спосіб*); метод достатньою мірою розроблений, точний і зручний у практичному застосуванні, особливо, коли треба визначити швидкості і прискорення для конкретного положення механізму.

Теоретичні основи побудови планів швидкостей і прискорень розглядаються в курсі теоретичної механіки. За основу цього методу взята можливість розкласти складний рух точки або ланки на прості рухи шляхом введення додаткової (рухомої) системи відліку. Залежності між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів точки (ланки) записуються у векторній формі та представляються у вигляді планів швидкостей та прискорень. Плани викреслюються у відповідних масштабах, що дозволяє отримати числові значення кінематичних характеристик.

*Планом швидкостей (прискорень)* механізму називають креслення, на якому зображені у вигляді напрямлених відрізків вектори, які у масштабі визначають модуль та напрям швидкостей (прискорень) різних точок ланок для даного положення механізму. План швидкостей (прискорень) механізму є сукупністю планів швидкостей (прискорень) окремих ланок, що побудовані з одного полюса, спільного для всі ланок.

Кінематичний аналіз механізму проводиться у такому порядку:

- спочатку визначаються кінематичні параметри початкової ланки;

- далі виконується кінематичне дослідження окремих структурних груп Ассура в послідовності їх приєднання до початкової ланки при утворенні механізму. При цьому, кожна ланка механізму розглядається як така, що здійснює плоский рух; необхідно визначити швидкість і прискорення щонайменше двох її точок. Цими точками є центри шарнірів обертальних пар і однойменні точки елементів поступальних кінематичних пар. Як сказано, побудова планів виконується за структурними групами в порядку їх приєднання, починаючи з початкової ланки. У цьому випадку у кожній групі Ассура будуть відомі швидкості та прискорення зовнішніх кінематичних пар, якими приєднується дана група. Дослідження кожної групи повинно розпочинатись з визначення кінематичних параметрів внутрішньої пари, яка є спільною для ланок, що утворюють цю пару. Потім, за потреби, визначаються кінематичні параметри інших характерних точок групи та кутові швидкості і прискорення ланок.

При кінематичному аналізі механізму спочатку будується план швидкостей, а потім план прискорень.

**Плани швидкостей початкової ланки.** Зазвичай, початкова ланка механізму здійснює обертальний рух (рис. 2.8, *а*). Швидкість  $v_A$  точки *A* перпендикулярна до кривошипа *OA* (напряmlена по дотичній до траєкторії т.*A*) і спрямована у бік його обертання. Зобразимо швидкість точки *A* деяким вектором, відкладеним з довільної точки  $p_v$ , яку приймаємо за полюс плану швидкостей (рис. 2.8, *б*). Цей вектор перпендикулярний до прямої *OA* і напрямлений в бік обертання кривошипа. В кінці вектора поставимо точку *a*. Довжина відрізка  $p_v a$  може бути прийнята довільною. Переважно вона

вибирається при визначенні масштабу  $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a}$ ,  $\frac{м/с}{мм}$ , з урахуванням рекомендацій з вибору масштабів; модуль швидкості т.А визначається за формулою  $v_A = \omega l_{OA}$ , м/с, для визначення кутової швидкості користуються формулою  $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ ,  $с^{-1}$ ; де  $n$  – частота обертання. Аналогічні міркування проводять, при потребі, відносно будь-якої іншої точки кривошипа. Звичайно, швидкості та прискорення точок, що належать осі обертання, дорівнюють нулю і, відповідно, на планах вони знаходяться в полюсі (т.О, S). Отже, вектор  $\overline{p_v a}$  представляє собою план швидкостей початкової ланки для положення, що визначається кутовою координатою  $\varphi_1$ .

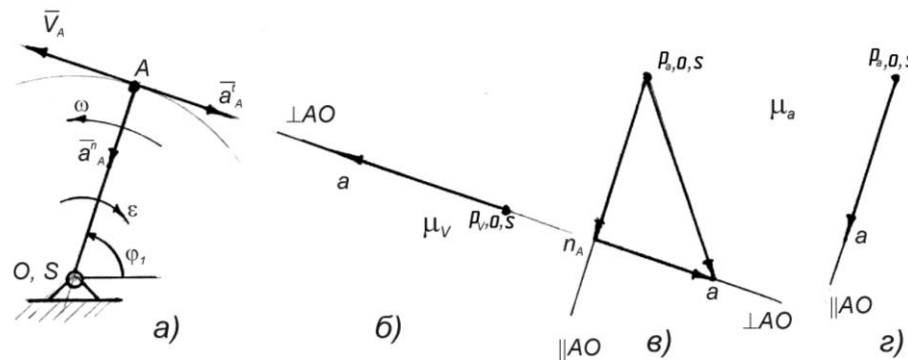


Рис. 2.8

Відмітимо, що зображення точок ланок (для розглядуваного прикладу О, S, А) на плані швидкостей позначаються малими літерами ( $o, s, a$ ).

**Плани прискорень початкової ланки.** На рис. 2.8, в, зображений план прискорень початкової ланки. Він побудований за відомими співвідношеннями:

- повне прискорення т. А при обертальному русі ланки дорівнює геометричній сумі нормального і дотичного (тангенціального) прискорень,

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t;$$

- модуль нормального прискорення т. А:  $a_A^n = \omega^2 l_{AO}$ ;

- модуль дотичного прискорення т. А:  $a_A^t = \varepsilon l_{AO}$ .

Масштаб плану прискорень визначається за формулою  $\mu_a = \frac{a_A^n}{p_a n_A}$ ,  $\frac{м/с^2}{мм}$ ,

попередньо задавши довжиною відрізка  $p_a n_A$ , що зображує  $\bar{a}_A^n$  нормальне прискорення на плані. Приймавши довільну точку  $p_a$  за полюс плану прискорень, відкладемо вектор  $\bar{a}_A^n$  у вигляді відрізка  $p_a n_A$ . При цьому вектор нормального прискорення, яке ще називають доцентровим, направлений по радіусу обертання до центра кривини траєкторії,  $\bar{a}_A^n \parallel AO$ , має напрям від точки А до О. Далі визначають  $n_A a = \frac{a_A^t}{\mu_a}$  – довжину відрізка, що зображає  $\bar{a}_A^t$  дотичне прискорення на плані прискорень.

Вектор дотичного прискорення направлений по дотичній до траєкторії руху (перпендикулярно радіусу обертання) в бік напрямку кутового прискорення  $\varepsilon$ ,  $\bar{a}_A^t \perp AO$ . Відкладаємо з точки  $n_A$  плану відрізок  $n_A a$  і отримуємо вектор  $\overline{p_a a}$  повного прискорення точки А.

Відзначимо, що переважно в задачах кінематики приймається, що початкова ланка обертається рівномірно ( $\omega_1 = \text{const}$ ), тобто  $\varepsilon_1 = 0$ , а отже  $a'_A = 0$ , і  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ . У цьому випадку план прискорень має вигляд, зображений на рис. 2.8, з.

**Плани швидкостей та прискорень при складному русі ланки.** Складним рухом ланки (точки) називається такий рух, при якому ланка одночасно бере участь у двох або більше простих рухах. Рух, що здійснює ланка (точка) по відношенню до рухомої системи відліку, називається відносним рухом. Рух, що здійснює рухома система відліку по відношенню до нерухомої системи, називається переносним рухом. Рух, що здійснює ланка (точка) по відношенню до нерухомої (основної) системи відліку, називається абсолютним або складним.

Нагадаємо теореми про додавання швидкостей та прискорень точки в її складному русі: абсолютна швидкість  $v_a$  точки дорівнює векторній сумі її переносної  $v_e$  і відносної  $v_r$  швидкостей, тобто

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Дана теорема ще носить назву паралелограма або трикутника швидкостей. Абсолютна швидкість знаходиться шляхом побудови паралелограма швидкостей. Вектори  $\bar{v}_a$ ,  $\bar{v}_e$ ,  $\bar{v}_r$  швидкостей мають напрямки по дотичній до відповідної траєкторії.

Абсолютне **прискорення**  $a_a$  довільної точки ланки дорівнює векторній сумі переносного  $a_e$ , відносного  $a_r$  і коріолісового  $a_c$  прискорень, тобто

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c.$$

Якщо переносний рух поступальний, то абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі двох прискорень: переносного та відносного. В свою чергу, при відносному обертальному русі прискорення  $a_r$  можна розкласти на два прискорення

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r = \bar{a}_e + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^t.$$

Методика побудови планів швидкостей та прискорень для двоповідкових груп полягає у складанні аналогічних векторних рівнянь для кожної ланки та спільному їх графічному розв'язку.

Для **прикладу** розглянемо групу Ассура II класу II порядку першого виду (рис. 2.9). Швидкості точок  $A$  і  $C$  (якими група приєднується до механізму) відомі. Знайдемо швидкість точки  $B$ , яка є спільною для ланок 2 та 3. Для цього рух ланки 2 розкладаємо на переносний поступальний зі швидкістю  $v_A$  точки  $A$  і відносний обертальний рух навколо цієї точки зі швидкістю  $v_{BA}$ . Для ланки 3 аналогічно – на переносний поступальний зі швидкістю  $v_C$  т.С і відносний обертальний - навколо точки  $C$  зі швидкістю  $v_{BC}$ . Скориставшись теоремою про додавання швидкостей точки в її складному русі, запишемо векторні рівняння, що зв'язують швидкості точок  $B$ ,  $A$  та  $C$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}.$$

Інколи, для наочності, праві частини співвідношень (2.2) прирівнюють

$$\underline{\underline{v}}_a + \underline{\underline{v}}_{BA} = \underline{\underline{v}}_c + \underline{\underline{v}}_{BC} \quad (2.3)$$

Зазначимо, що такі векторні рівняння розв'язуються графічно, якщо вони містять не більше двох невідомих параметрів. Розглядувана група Ассура може бути приєднана лише до початкової ланки та стояка чи до раніше приєднаних (і відповідно розглянутих) груп Ассура, кінематичні параметри яких вже відомі. Отже, параметри переносного руху будуть визначеними. Вектори відносних швидкостей  $\underline{\underline{v}}_{BA}, \underline{\underline{v}}_{BC}$  в обертальному русі відомі лише за напрямком - перпендикулярні до відповідної ланки (по дотичній до траєкторії руху).

Відзначимо, що при аналізі векторних рівнянь часто прийнято підкреслювати вектор двома рисками, якщо він відомий як за величиною, так і за напрямком, і однією – якщо тільки за величиною або напрямком.

Графічний розв'язок рівняння (2.3) наведено на рис. 2.9, б у вигляді плану швидкостей. Для його побудови вибираємо довільну точку  $p_v$  - полюс плану швидкостей. Від неї відкладаємо вектор відомої швидкості  $v_A$ . Отримуємо точку  $a$  на плані швидкостей. Далі, згідно з рівнянням (2.3), до вектора швидкості  $v_A$  треба додати вектор швидкості  $v_{BA}$ . Для цього проводимо через точку  $a$  лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості – перпендикуляр до ланки  $AB$  ( $v_{BA} \perp AB$ ). Такі ж міркування можна навести при розгляді правої частини рівняння (2.3). У розглядуваному прикладі точка  $C$  ланки 3 приєднана до стояка,  $v_C = 0$ . Отже, на плані швидкостей т.С знаходиться у полюсі. До вектора швидкості  $v_C$  треба додати вектор швидкості  $v_{BC}$ . Для цього проводимо через полюс  $p_v$  лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості – перпендикуляр до ланки  $BC$  ( $v_{BC} \perp BC$ ). Точка перетину в цих ліній визначить величину та напрямок швидкості точки  $B$ .

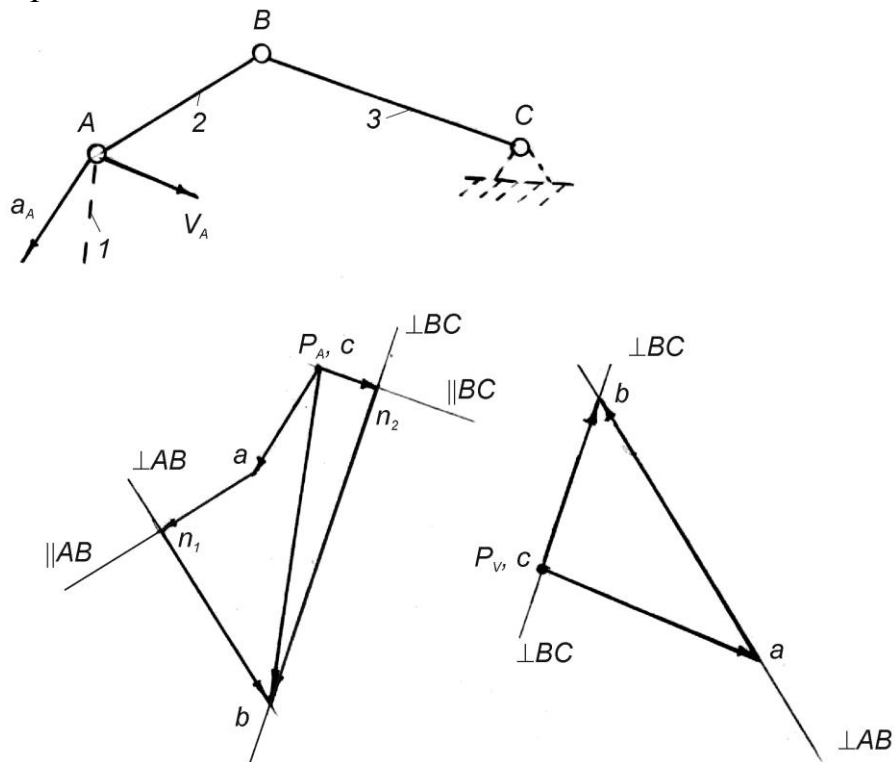


Рис. 2.9

Рівняння, які використовуються при побудові **плану прискорень**, відрізняються лише тим, що невідомі відносні прискорення точки в обертальному русі розкладають на складові

$$\begin{aligned}\bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t, \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Виконаємо графічне додавання векторів згідно з рівняннями (2.4). З довільної точки  $p_a$  полюса плану прискорень відкладаємо в масштабі  $\mu_a$  вектор відомого прискорення т.А. З кінця цього вектора, точка  $a$ , відкладемо вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  нормального прискорення точки  $B$  навколо т.А. Нормальне прискорення напрямлене по лінії  $AB$  до центра обертання - точки  $A$ . Модуль його порахований після побудови плану швидкостей за формулою  $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB}$ . Довжина відрізка, який зображає  $\bar{a}_{BA}^n$  на плані прискорень, дорівнює  $an_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$ . Через його кінець (точку  $n_1$ ) проводимо лінію дотичного прискорення  $a_{BA}^t$ , направлено перпендикулярно до  $AB$ .

Розглянемо друге рівняння. З полюса  $p_a$  ( $a_c = 0$ ) відкладемо вектор, який зображає  $\bar{a}_{BC}^n$ , нормальне прискорення, у вигляді відрізка  $p_a n_2 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}$  ( $\bar{a}_{BC}^n \parallel BC$ , має напрям від точки  $B$  до  $C$ ). Через його кінець (точку  $n_2$ ) проведемо лінію-напрямок дотичного прискорення  $a_{BC}^t \perp BC$  до перетину з лінією напрямком прискорення  $a_{BA}^t$ . Точка перетину в цих ліній визначить величину та напрямок прискорень точки  $B$  та величини дотичних прискорень (у масштабі  $\mu_a$ ).

Розглянуті положення використовуються при побудові планів швидкостей і прискорень плоских механізмів. Розглянемо методику побудови планів швидкостей та прискорень механізмів II класу.

**Приклад.** Шестиланковий важільний механізм зі структурними групами Ассура II класу першого та другого видів (рис. 2.10). Задано план механізму та закон руху початкової ланки ( $\omega_1 = const$ ). Кінематичне дослідження будемо проводити у такій послідовності: спочатку побудуємо плани для початкової ланки 1, потім для групи Ассура II (2, 3), а далі для групи II (4, 5).

Визначимо модуль лінійної швидкості т. А ланки  $O_1 A$ , при обертанні її навколо т.  $O_1$ , за формулою  $v_A = \omega_1 \cdot l_{O_1 A} = \frac{\pi n_1}{30} l_{O_1 A}$ , м/с.

З довільно взятої точки  $p_v$  полюса плану швидкостей відкладаємо відрізок  $p_v a$ , перпендикулярний до ланки  $O_1 A$  і направлений в бік руху кривошипа. Швидкість т.А на плані швидкостей показано відрізком  $p_v a$ , тобто масштаб плану швидкостей  $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a}$ ,  $\frac{м/с}{мм}$ .

Переходимо до побудови плану швидкостей першої групи Ассура. Швидкості точок  $A$  та  $O_2$ , що належать до зовнішніх кінематичних пар цієї групи, відомі ( $v_A = v_{A_1} = v_{A_2}$ ;  $v_{O_2} = 0$ ).

Для визначення швидкості т.В, що одночасно належить ланкам 2 та 3, запишемо два векторні рівняння

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BA}}} ,$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} = \underline{\underline{\bar{v}_{O_2}}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BO_2}}} .$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь графічно. Згідно з першим рівнянням, через точку  $a$  плану швидкостей проводимо пряму, перпендикулярну до ланки  $AB$  (до вектора швидкості  $\bar{v}_A$  додаємо вектор швидкості  $\bar{v}_{BA}$ ). Згідно з другим рівнянням, через полюс  $p_v$  проводимо пряму, перпендикулярну до ланки  $BO_2$  (до швидкості т.  $O_2$ , яка дорівнює нулю і, отже, знаходиться в полюсі, додаємо вектор швидкості  $\bar{v}_{BO_2}$ ). Точка перетину  $b$  цих перпендикулярів є кінцем вектора  $p_v b$ , що зображує на плані у масштабі  $\mu_v$  абсолютну швидкість т.  $B$ . Величини невідомих швидкостей визначають за формулами

$$v_B = \mu_v \cdot p_v b , \quad v_{BA} = \mu_v \cdot ab ,$$

тобто, вимірявши відповідні відрізки на плані швидкостей в мм, множимо їх на масштаб  $\mu_v$  і одержуємо модулі шуканих швидкостей.

Кутові швидкості ланок 2 та 3 визначаються рівностями

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{BA}} , \quad \omega_3 = \frac{v_B}{l_{BO_2}} .$$

Визначимо швидкості інших точок, що належать до ланок даної групи. Аналогічно до точки  $B$ , розглянемо рух точки  $C$  по відношенню до точок  $B$  та  $O_2$  і запишемо два векторні рівняння

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CB}}} ,$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_{O_2}}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CO_2}}} .$$

Швидкості точок  $B$  та  $O_2$  відомі. Відносні швидкості  $v_{CB}$  і  $v_{CO_2}$ , як швидкості в обертальному русі, перпендикулярні, відповідно, до ланок  $BC$  та  $CO_2$ . Отже, згідно з першим рівнянням, проведемо через точку  $b$  на плані швидкостей лінію, перпендикулярну до ланки  $BC$ , а згідно з другим – через точку  $p_v$  – лінію, перпендикулярну до ланки  $CO_2$ . На їх перетині дістанемо точку  $c$ , яка є кінцем вектора  $p_v c$ , що зображає на плані швидкостей в масштабі  $\mu_v$  абсолютну швидкість т.  $C$ ;  $v_C = \mu_v \cdot p_v c$ .

Як впливає з виконаної побудови, трикутник  $BO_2C$  на плані механізму, подібний до трикутника  $bp_v c$  на плані швидкостей ( $bc \perp BC$ ,  $bp_v \perp BO_2$ ,  $cp_v \perp CO_2$ ). При цьому, трикутники  $BO_2C$  та  $bp_v c$  повернуті, один відносно одного, на прямий кут в напрямку миттєвого обертання. Цю властивість подібності фігури відносних швидкостей на плані швидкостей (прискорень), до фігури ланки на схемі механізму, називають *теоремою подібності: план відносних швидкостей (прискорень) точок однієї і тієї ж ланки, подібний до відповідної фігури на схемі механізму*.

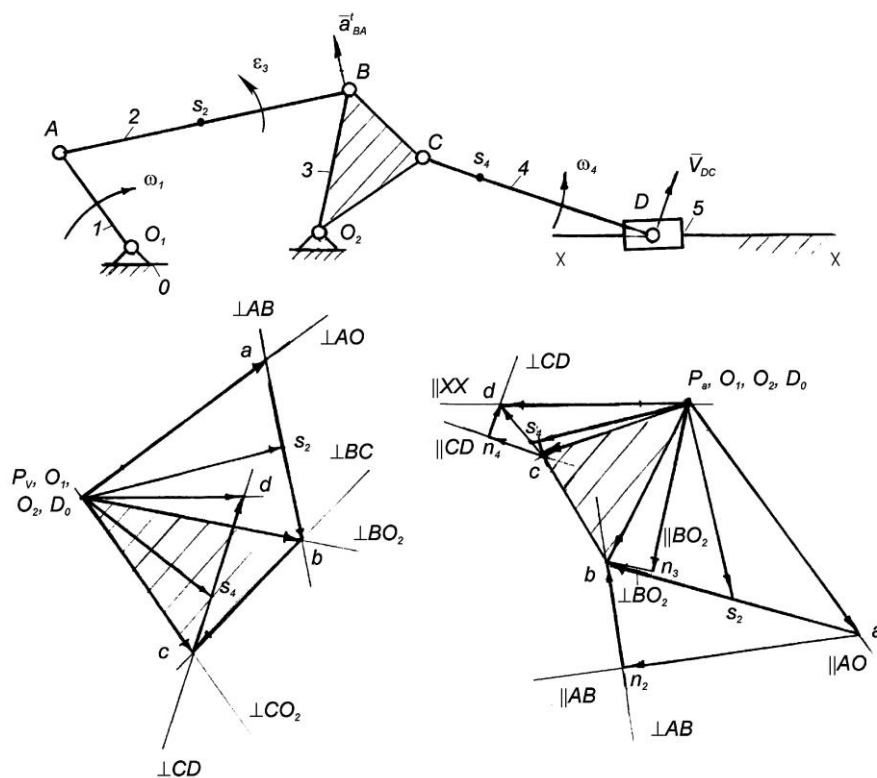


Рис. 2.10

Відзначимо, що теорема подібності дійсна також при побудові планів прискорень. Вона дає можливість легко визначити швидкості будь-яких точок ланки, якщо відомі швидкості двох інших точок цієї ланки.

Таким чином, швидкість точки  $C$  зручніше знаходити за теоремою подібності. Для цього на відрізку  $p_v b$ , на плані швидкостей будуємо трикутник  $p_v b c$ , подібний до трикутника  $o_2 B C$  на плані механізму. Згідно з теоремою подібності можна записати такі пропорції

$$\frac{BC}{bc} = \frac{BO_2}{bp_v} = \frac{CO_2}{cp_v}, \text{ або } \frac{l_{BC}}{bc} = \frac{l_{BO_2}}{bp_v} = \frac{l_{CO_2}}{cp_v},$$

з яких визначаємо довжини відрізків  $cp_v$  та  $bc$ :

$$cp_v = bp_v \frac{CO_2}{BO_2}, \quad bc = bp_v \frac{BO_2}{BC},$$

де  $l_{BC}, l_{BO_2}, l_{CO_2}$  — дійсні розміри ланок,  $BC, BO_2, CO_2$  — розміри ланок на схемі механізму;  $bc, bp_v, cp_v$  — відповідні відрізки на плані швидкостей.

Зробивши засічки з точки  $p_v$  плану швидкостей радіусом  $p_v c$ , а з точки  $b$  — радіусом  $bc$ , знайдемо точку  $c$ . Щоб не допустити помилки при визначенні положення точки  $c$  на плані швидкостей (засічку можна зробити по обидва боки від лінії  $p_v b$ ), потрібно користуватися правилом обходу: якщо обходити план швидкостей і ланку в одному напрямку, наприклад, за рухом стрілки годинника, починаючи відповідно з точок  $p_v$  і  $o_2$ , то порядок літер для них має бути однаковим —  $p_v \rightarrow b \rightarrow c$  та  $o_2 \rightarrow B \rightarrow C$ . Зазначимо, що теорема подібності справедлива лише для незмінної системи твердого тіла, тобто однієї ланки.



Одночасно для декількох ланок, групи Ассура чи механізму в цілому вона не дійсна.

Швидкості центрів мас ланок знаходять, користуючись теоремою подібності. Наприклад, якщо задано, що центр мас другої ланки - точка  $S_2$  лежить на середині ланки  $AB$ , то на плані швидкостей т.  $S_2$  знаходиться також на середині відрізка  $ab$ . З'єднавши на плані точку  $s_2$  з полюсом, знаходимо вектор швидкості  $\overline{p_v s_2}$  центра мас шатуна 2. Модуль вектора швидкості визначається за формулою

$$v_{s_2} = \mu_v \cdot p_v s_2.$$

Переходимо до визначення швидкостей точок другої групи Ассура, яка складається з ланок 4 та 5. Знайдемо швидкість центра шарніра  $D$ , що з'єднує ланки 4 та 5 ( $v_D = v_{D_4} = v_{D_5}$ ). Розглядаючи рух т.  $D$  по відношенню до т.  $C$ , а потім – до т.  $D_0$  (точки, що належить напрямній  $xx$ , і в даному положенні механізму співпадає з точкою  $D$  на повзуні), запишемо два векторні рівняння

$$\underline{\bar{v}}_D = \underline{\bar{v}}_C + \underline{\bar{v}}_{DC},$$

$$\underline{\bar{v}}_D = \underline{\bar{v}}_{D_0} + \underline{\bar{v}}_{DD_0}.$$

Відзначимо, що для таких структурних груп обмежуються першим рівнянням; повзун 5 рухається по нерухомій напрямній і абсолютна швидкість кожної його точки паралельна напрямній,  $v_D // xx$ . При графічному розв'язку цих рівнянь достатньо через точку  $c$  плану швидкостей провести пряму, перпендикулярну до ланки  $CD$  на плані механізму, а через полюс  $p_v$  – пряму, паралельну до напрямної  $xx$ . На перетині цих прямих і буде шукана точка  $d$ .

Швидкість центра мас  $S_4$  знаходимо за теоремою подібності, в загальному випадку, із співвідношення

$$\frac{l_{CD}}{l_{CS_4}} = \frac{cd}{cs_4}, \text{ або } \frac{CD}{CS_4} = \frac{cd}{cs_4}, \text{ звідки } cs_4 = cd \frac{l_{CD}}{l_{CS_4}},$$

де  $l_{CD}$ ,  $l_{CS_4}$  – дійсні розміри ланок,  $CD$ ,  $CS_4$  – розміри ланок на схемі механізму;  $cd$ ,  $cs_4$  – відповідні відрізки на плані швидкостей.

З'єднавши з полюсом знайдену точки  $s_4$ , отримуємо вектор, який зображає на плані швидкості даної точки.

Підкреслимо, що, маючи план швидкостей механізму, можна визначити абсолютну та відносну швидкості будь-якої з точок механізму: вимірявши відповідний відрізок в мм на плані швидкостей, множимо його на масштаб плану  $\mu_v$  і одержуємо величину відповідної швидкості. Наприклад,

$$v_D = \mu_v \cdot pd, \quad v_{DC} = \mu_v \cdot dc, \quad v_{s_4} = \mu_v \cdot ps_4.$$

Кутову швидкість ланки 4 визначаємо за формулою  $\omega_4 = \frac{v_{DC}}{l_{DC}}$ . Напрямки

кутових швидкостей ланок знаходимо за допомогою умовного переносу векторів відносних швидкостей на схему механізму. Наприклад, для ланки 4 швидкість  $\bar{v}_{DC}$ , яка на плані швидкостей зображена вектором  $\overline{cd}$ , умовно переносимо в точку  $D$  на схемі механізму. Вектор  $\bar{v}_{DC}$  вказує на умовне

обертання ланки 4 навколо точки  $C$  проти ходу годинникової стрілки і, отже,  $\omega_4$  також напрямлена проти руху стрілки годинника.

*Побудова плану прискорень.* Послідовність побудови плану прискорень така ж, як для плану швидкостей.

Повне прискорення точки  $A$  кривошипа  $I$  дорівнює геометричній сумі нормального та дотичного прискорень. У розглядуваному прикладі початкова ланка обертається рівномірно ( $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $a'_A = 0$ ), тому  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ . Модуль цього прискорення знаходять зі співвідношення  $a_A^n = \omega_1^2 l_{O_1A}$  або  $a_A^n = \frac{v_A^2}{l_{O_1A}}$ ,  $\frac{м}{с^2}$ .

З точки  $p_a$  відкладемо паралельно до кривошипа  $O_1A$  (у напрямку від точки  $A$  до точки  $O_1$ ) відрізок довільної довжини  $p_a a$ . Тоді масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_A}{p_a a}, \quad \frac{м/с^2}{мм}.$$

Розглянемо групу Ассура II(2, 3). Для неї відомі прискорення точок  $A$  та  $O_2$ . Визначимо прискорення центра шарніра  $B$ . Розглядаючи рух т. $B$  по відношенню до т. $A$ , а потім - до т. $O_2$ , запишемо, відповідно, два векторні рівняння

$$\begin{aligned} \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t, \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{BO_2}^n + \bar{a}_{BO_2}^t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обчислимо величини нормальних складових  $a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}$ ,  $a_{BO_2}^n = \omega_3^2 l_{BO_2}$ ,  $\frac{м}{с^2}$  та довжини відрізків, які будуть зображати їх на плані,  $an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$ ,  $p_a n_3 = \frac{a_{BO_2}^n}{\mu_a}$ ,  $мм$ .

Після цього можна векторні рівняння (2.5) розв'язувати графічно. Згідно з першим рівнянням, з точки  $a$  плану прискорень відкладаємо відрізок  $an_2$ , що напрямлений паралельно до ланки  $AB$  у напрямку від т. $B$  до т. $A$ . Через його кінець – т. $n_2$  проводимо пряму, перпендикулярну до  $AB$  (напрямок  $\bar{a}_{BA}^t$ ). Згідно з другим рівнянням, з полюса  $p_a$  паралельно до  $BO_2$ , у напрямку від т. $B$  до т. $O_2$ , відкладаємо відрізок  $p_a n_3$ . Через т. $n_3$  проводимо перпендикуляр до  $BO_2$  (напрямок  $\bar{a}_{BO_2}^t$ ). На перетині дотичних складових (перпендикулярів) отримуємо шукану точку  $b$ .

Відрізок  $p_a b$  зображає, в масштабі  $\mu_a$ , абсолютне прискорення точки  $b$ ; відрізки  $n_2 b$  та  $n_3 b$  – відповідно, невідомі дотичні складові  $a_{BA}^t$ ,  $a_{BO_2}^t$ , а відрізок  $ab$  - повне відносне прискорення  $a_{BA}$  т. $B$  відносно т. $A$ .

Прискорення точок  $S_2$  та  $C$  знайдемо за теоремою подібності: точку  $s_2$  на плані прискорень розмістимо на середині відрізка  $ba$  (у даному прикладі центр мас  $S_2$  знаходиться посередині ланки  $AB$ ). Відрізок  $p_a s_2$  зображає прискорення т. $S_2$ ; з пропорції  $\frac{BO_2}{bp_a} = \frac{BC}{bc} = \frac{CO_2}{cp_a}$  вираховуємо довжини відрізків  $bc$  та  $cp_a$  та методом засічок знаходимо точку  $c$  на плані прискорень. При цьому має бути збережена схожість фігур  $BCO_2$  на схемі механізму та  $bcp_a$  на плані прискорень.

Наступна структурна група утворена ланками 4 та 5. Повзун 5 рухається по нерухомій напрямній. Абсолютне прискорення кожної його точки паралельне

цій напрямній. Така умова дозволяє записати одне рівняння для визначення прискорення точки  $D$

$$\underline{\bar{a}}_D = \underline{\bar{a}}_C + \underline{\bar{a}}_{DC}^n + \underline{\bar{a}}_{DC}^t.$$

Визначаємо нормальне прискорення  $a_{DC}^n = \omega_4^2 l_{DC}$  та відрізок, що буде зображати його на плані прискорень,

$$cn_4 = \frac{a_{DC}^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

Виконаємо графічну побудову. З точки  $c$  плану прискорень паралельно до ланки  $CD$  в напрямку від т. $D$  до т. $C$  відкладемо відрізок  $cn_4$ . Через точку  $n_4$  проводимо перпендикуляр до  $CD$  (напрямок вектора  $\bar{a}_{DC}^t$ ). Через полюс  $p_a$  проводимо пряму, паралельну до напрямної (напрямок вектора абсолютного прискорення  $\bar{a}_D$ ). Ці лінії перетнуться в шуканій точці  $d$ . Згідно співвідношення  $\frac{CD}{cd} = \frac{CS_4}{cs_4}$  на відрізку  $dc$  розмістимо точку  $s_4$ . План прискорень побудований.

Величини прискорень точок механізму дорівнюють добутку довжини відповідного відрізка з плану прискорень на масштаб плану. Наприклад:

$$a_D = \mu_a \cdot p_a d, \quad a_{DC}^t = \mu_a \cdot dn_4.$$

Визначимо кутові прискорення ланок

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{BA}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{BO_2}^t}{l_{BO_2}}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^t}{l_{DC}}.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення, наприклад, другої ланки  $\varepsilon_2$ , уявно переносимо вектор дотичного прискорення  $a_{BA}^t$  (на плані прискорень зображений відрізком  $n_2b$ ) у точку  $B$ . Перенесений вектор  $a_{BA}^t$  вказує на умовне обертання ланки 2 навколо т. $A$  проти руху годинникової стрілки. Це і буде напрям кутового прискорення  $\varepsilon_2$ .

### Основні властивості плану швидкостей та прискорень.

- 1) Усі точки механізму, швидкості (прискорення) яких дорівнюють нулю, на плані швидкостей (прискорень) знаходяться в полюсі.
- 2) Усі вектори, що виходять з полюса плану швидкостей (прискорень), є векторами абсолютних швидкостей (прискорень).
- 3) Усі вектори плану, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей (прискорень), є векторами відносних швидкостей (прискорень). Замірявши відповідні відрізки (в мм) на плані швидкостей (прискорень) та помноживши їх на масштаб  $\mu_v$  ( $\mu_a$ ), знаходимо дійсні (за модулем) значення швидкостей (прискорень).
- 4) Для плану швидкостей та прискорень дійсна теорема подібності.

**Приклад 2.** На рис. 2.11,  $a$  показана кінематична схема механізму поперечно-стругального верстата. До його складу входять початкова ланка 1 та дві групи Ассура II класу: група, що складається з ланок 2 та 3 третього виду, та група II(4,5) п'ятого виду.

Необхідно побудувати плани швидкостей і прискорень для положення визначеного кутом  $\varphi_1$ . Кутова швидкість кривошипа  $\omega_1 = \text{const}$ .

Знаходимо швидкість т. $B$ , яка належить ланці 1,  $v_B = \omega_1 \cdot l_{AB}$ , м/с.

Від полюса  $p_v$  плану швидкостей відкладаємо відрізок  $p_v b \perp AB$ , який зображує вектор швидкості  $v_B$  (Рис. 2.11, б). При цьому масштаб плану швидкостей дорівнює

$$\mu_v = \frac{v_B}{p_v b}, \frac{м/с}{мм}.$$

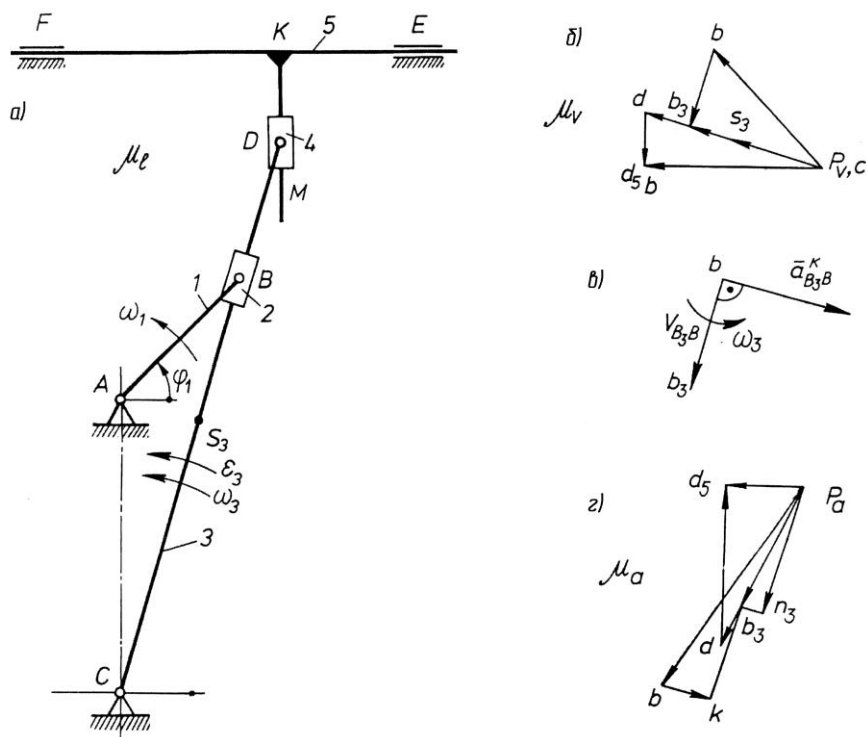


Рис. 2.11

Переходимо до визначення швидкостей точок ланок першої структурної групи. Відомі швидкості точок  $B$  і  $C$ , які належать зовнішнім кінематичним парам групи: швидкість т.  $B_2$ , яка належить ланці 2 (повзуна), дорівнює швидкості т.  $B$  кривошипа (першої ланки), тобто  $v_{B_2} = v_{B_1} = v_B$ ,  $v_c = 0$ . Невідома швидкість точки  $B_3$ , яка належить ланці 3, кулісі і в даному положенні механізму, співпадає з т.  $B$ , що лежить на кривошипі (повзуні). Для її визначення запишемо систему векторних рівнянь

$$\vec{v}_{B_3} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B_3B},$$

$$\vec{v}_{B_3} = \vec{v}_C + \vec{v}_{B_3C}.$$

За першим рівнянням з точки  $b$ , кінця вектора  $\overline{p_v b}$  (швидкості т.  $B$ ) проводимо пряму, паралельну до ланки  $CD$  ( $v_{B_3B}$  є швидкість відносного поступального руху повзуна 2 по напрямній 3; напрямлена вздовж неї). За другим рівнянням з точки  $c$ , яка співпадає з полюсом  $p_v$  ( $v_c = 0$ ), проводимо пряму, перпендикулярну до  $BC$ . На перетині цих прямих одержуємо точку  $b_3$ . Вектор  $\overline{p_v b_3}$  зображує швидкість  $\vec{v}_{B_3}$  точки  $B_3$ , що належить кулісі.

Використовуючи теорему подібності, знаходимо положення точки  $D$  на плані швидкостей

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB}; \quad cd = cb_3 \frac{CD}{CB}, мм.$$

Відкладаємо відрізок  $cd$  на продовженні відрізка  $cb_3$  ( $p_v b_3$ ), знаходимо точку

*d.*

Швидкість т. $D_5$ , яка належить ланці 5, визначаємо з рівняння

$$\bar{v}_{D5} = \bar{v}_D + \bar{v}_{D5D}.$$

Усі точки ланки 5 рухаються вздовж напрямної  $EF$ , тобто абсолютна швидкість т. $D_5$  паралельна напрямній,  $\bar{v}_{D5} // EF$ . Таким чином, з полюса  $p_v$  проводимо пряму, паралельну до  $EF$ , а з точки  $d$  – пряму, паралельну до  $KM$ . На перетині одержуємо точку  $d_5$ . Сполучаємо її з полюсом  $p_v$ .

Положення т. $S_3$  знаходимо за теоремою подібності з пропорції

$$\frac{cs_3}{cd} = \frac{CS_3}{CD}; \quad cs_3 = cd \frac{CS_3}{CD}.$$

Вимірявши відповідні відрізки в мм, множимо їх на масштаб  $\mu_v$  і одержуємо величини шуканих швидкостей

$$\begin{aligned} v_{B3} &= \mu_v \cdot p_v b_3; \quad v_D = \mu_v \cdot p_v d; \quad v_{D5} = \\ &= \mu_v \cdot p_v d_5; \quad v_{B3B} = \mu_v \cdot b b_3; \quad v_{D5D} = \mu_v \cdot d d_5. \end{aligned}$$

Кутову швидкість ланки 3 визначимо за формулою  $\omega_3 = v_{DC} / l_{DC}$ . Напрямок цієї швидкості знаходимо за допомогою вектора швидкості  $\bar{v}_{DC}$ . Умовно переносимо цей вектор у т.  $D$  механізму та спостерігаємо за умовним обертанням ланки 3 відносно точки  $C$  проти руху стрілки годинника. Таким чином,  $\omega_3$  напрямлена у той же бік.

*Побудова плану прискорень.* Прискорення т. $B$ , яка належить ланці 1 кривошипу, визначається за формулою

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 l_{AB}, \text{ м/с}^2.$$

Від полюса  $p_a$  (рис. 2.11, з) відкладаємо відрізок  $p_a b$  паралельно до ланки  $AB$  (у напрямку від т. $B$  до т. $A$ ), який зображує прискорення  $\bar{a}_B$  ( $\bar{a}_B = \bar{a}_{B_1} = \bar{a}_{B_2}$ ).

Масштаб плану прискорень при цьому  $\mu_a = \frac{a_B}{p_a b}, \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ .

Визначаємо прискорення т.  $B_3$ , що належить ланці 3,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{B_3} &= \bar{a}_B + \bar{a}_{B_3B}^K + \bar{a}_{B_3B}^r, \\ \bar{a}_{B_3} &= \bar{a}_C + \bar{a}_{B_3C}^n + \bar{a}_{B_3C}^t. \end{aligned}$$

У першому рівнянні  $\bar{a}_{B_3B}^K$ , - коріолісове прискорення, яке з'явилося у результаті складання відносного поступального руху повзуна 2 по напрямній 3 зі швидкістю  $\bar{v}_{B_3B}$  та переносного обертального руху цієї напрямної зі швидкістю  $\omega_3$ . Модуль цього прискорення визначається за формулою

$$a_{B_3B}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{B_3B}.$$

Щоб знайти напрямок вектора  $\bar{a}_{B_3B}^K$ , необхідно повернути вектор відносної швидкості  $\bar{v}_{B_3B}$  на кут  $90^\circ$  в напрямку переносної кутової швидкості  $\omega_3$  (рис. 2.11, в). Прискорення  $\bar{a}_{B_3B}^r$  є прискоренням відносного поступального руху повзуна 2 по напрямній 3 і напрямлене вздовж ланки  $CD$ . Величина (модуль) його невідома. Нормальне прискорення  $a_{B_3C}^n$  визначається за формулою  $a_{B_3C}^n = \omega_3^2 l_{BC}$ , воно напрямлене від точки  $B$  до точки  $C$  паралельно до ланки  $CB$ . Дотичне прискорення  $\bar{a}_{B_3C}^t$  напрямлене перпендикулярно до ланки  $BC$ . Визначаємо відрізки  $b k$  і  $p_a n_3$ , які зображують прискорення  $\bar{a}_{B_3B}^K$  і  $\bar{a}_{B_3C}^n$  на плані

$$bk = \frac{a_{B_3B}^K}{\mu_a}; \quad p_a n_3 = \frac{a_{B_3C}^n}{\mu_a}.$$

Відкладаємо від точки  $b$  плану прискорень відрізок  $bk$ , а від полюса  $p_a$  відрізок  $p_a n_3$ . З точки  $k$  проводимо лінію, паралельну до  $BC$ , а з точки  $n_3$  - лінію, перпендикулярну  $BC$  до їх перетину між собою. Точку перетину  $b_3$  з'єднуємо з полюсом і одержуємо відрізок  $p_a b_3$ , який зображує прискорення  $\bar{a}_{B_3}$  точки  $B_3$ . Для визначення положення точки  $D$  на плані прискорень складаємо рівняння, використовуючи теорему подібності,

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB}, \text{ звідки } cd = cb_3 \frac{CD}{CB}.$$

Щоб знайти прискорення точки  $D_5$ , яка належить ланці 5, записуємо векторне рівняння

$$\bar{a}_{D_5} = \bar{a}_D + \bar{a}_{D_5D}^r,$$

$$\bar{a}_{D_5} \parallel EF.$$

Прискорення  $\bar{a}_{D_5}$  напрямлене вздовж напрямної  $EF$ , а відносне (релятивне) прискорення  $\bar{a}_{D_5D}^r$  - вздовж  $KM$ . З полюса  $p_a$  проводимо лінію, паралельну до  $EF$ , а з точки  $d$  - лінію, паралельну до  $KM$ . На перетині цих ліній одержуємо точку  $d_5$ . Величини знайдених прискорень дорівнюють

$$a_{B_3} = \mu_a \cdot p_a b_3; \quad a_{D_5} = \mu_a \cdot p_a d_5; \quad a_B = \mu_a \cdot p_a b;$$

$$a_{B_3C}^r = \mu_a \cdot n_3 b_3; \quad a_{s3} = \mu_a \cdot p_a s_3.$$

Модуль кутового прискорення  $\varepsilon_3$  ланки 3 знайдемо за формулою

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{B_3C}^t}{l_{BC}}.$$

Напрямок  $\varepsilon_3$  знаходимо з допомогою дотичного прискорення  $\bar{a}_{B_3C}^t$ . Переносимо вектор  $b_3 n_3$ , що зображає  $\bar{a}_{B_3C}^t$  на плані, у точку  $B$  механізму і бачимо, що він вказує на умовне обертання ланки 3 навколо точки  $C$  проти руху стрілки годинника.

Кінематичне дослідження механізмів аналітичними методами

Широке розповсюдження ЕОМ з різноманітним програмним забезпеченням сприяє все більшому застосуванню аналітичних методів кінематичного дослідження. З великої кількості праць з аналітичного розв'язку задач кінематики, якщо розглядати лише загальні методи, які можна застосувати для будь-яких механізмів, виділяють два їх різновиди: *метод замкнених векторних контурів*, розроблений В.А. Зінов'євим, та *метод перетворення координат (матричний метод)*, запропонований Ю.Ф. Морошкіним.

Аналітичне розв'язування задач кінематики просторових механізмів рекомендують виконувати *методом перетворення координат*. Застосування цього методу дає змогу визначати кінематичні параметри звичайними

алгебричними методами із застосуванням матриць. Перевага матричної форми запису полягає, головним чином, у застосуванні формул множення матриць.

Аналітичне дослідження плоских механізмів зручніше виконувати методом замкнених векторних контурів.

**Метод замкнених векторних контурів.** Метод полягає у тому, що кінематичні параметри визначаються у вигляді аналітичних залежностей, що одержують, якщо представити схему механізму замкненими векторними контурами, утвореними ланками цього механізму. Вихідними даними є структурна схема механізму, розміри ланок та залежності узагальнених координат механізму від часу. Якщо останні не задано, то рівняння записують як функції узагальнених координат, тобто визначають кінематичні передатні функції.

Суть методу замкнених векторних контурів полягає у такому:

- ланки механізму зображають у вигляді векторів, які утворюють на схемі механізму один або декілька замкнених векторних контурів (відповідно до кількості груп Ассура);

- складають векторні рівняння замкненості кожного контуру;

- вибирають прямокутну систему координат та проектують рівняння замкнутості контурів на осі вибраної системи координат.

У результаті отримують аналітичні залежності положення ланок від узагальнених координат механізму та його розмірів, тобто функцію положень ланок механізму;

- диференціюють двічі за часом рівняння замкненості контурів у проекціях на осі  $x$ ,  $y$  та отримують, відповідно, систему рівнянь для визначення швидкостей та прискорень ланок механізму. Якщо диференціюють по узагальненій координаті – отримують, відповідно, рівняння для визначення аналогів швидкостей та прискорень.

- визначають координати, проекції швидкостей та прискорень характерних точок механізму. Визначають модулі швидкостей та прискорень цих точок.

Деякі рекомендації щодо застосування методу замкнених векторних контурів:

- напрямок векторів слід вибирати так, щоб вони вказували послідовність побудови схеми механізму. Спочатку у вигляді вектора зображають початкову ланку механізму. Початок цього вектора – нерухома точка (центр шарніра). Вектори, що зображають ланки в групах Ассура, рекомендують напрямляти до внутрішньої кінематичної пари. Напрямок векторів на нерухомій ланці вибирають довільно;

- записуючи умови замкненості векторних контурів, треба враховувати знаки векторів. Для цього користуються правилом обходу: обходячи кожний векторний контур схеми у довільно вибраному напрямі, векторам, напрям яких збігається з напрямом обходу, присвоюють знак плюс і, навпаки, для векторів, що мають напрям проти напрямку обходу, присвоюють знак мінус;

- прямокутну систему координат зв'язують зі стояком. За початок відліку можна прийняти центр шарніру, що з'єднує початкову ланку зі стояком. Якщо у механізмі є нерухома напрямна для повзуна, то одну з осей координат доцільно

проводити паралельно до цієї напрямної.

Зазначимо, якщо механізм утворює декілька замкнених векторних контурів, то послідовність їх розгляду визначається послідовністю приєднання.

Методику одержання розрахункових залежностей розглянемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму двоступінчастого двоциліндрового повітряного компресора, структурна схема якого зображена на рис. 2.12, а. Задані розміри всіх ланок та частота обертання  $n_1$  кривошипа 1. Необхідно визначити усі кінематичні параметри ланок та їх характерних точок (центрів мас)  $S_2, S_4$ .

Представимо схему механізму у вигляді двох замкнутих векторних контурів:  $OABO$  та  $OCDO$  (рис. 2.12, б). У кожен контур входить структурна група Ассура другого класу:  $\Pi(2, 3)$  та  $\Pi(4, 5)$ . Ланки механізму зобразимо у вигляді векторів  $\vec{l}_1, \vec{l}_1', \vec{l}_2, \vec{l}_4$ , положення повзунів 3, 5 визначатиметься векторами  $\vec{l}_3, \vec{l}_5$ .

Складемо векторні рівняння замкнутості кожного контура

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3, \quad (2.6)$$

$$\vec{l}_1' + \vec{l}_4 = \vec{l}_5. \quad (2.7)$$

Рівняння (2.6), (2.7) спроектуємо на осі вибраної прямокутної системи координат  $xOy$  (за початок відліку якої прийнято центр шарніра  $O$ , а вісь  $Oy$  направлено вздовж напрямної повзунів) та запишемо рівняння проєкцій.

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0; \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sin(\varphi_1 + \pi) + l_4 \sin \varphi_4 &= 0; \\ l_1 \cos(\varphi_1 + \pi) + l_4 \cos \varphi_4 &= l_5 \end{aligned} \right\}, \quad (2.9)$$

де  $l_1, l_2, l_4$  – відповідно довжини ланок 1, 2, 4;  $l_3, l_5$  – відповідно відстані між центром шарніра  $O$  та центрами шарнірів  $B, D$  повзунів;  $\varphi_1$  - узагальнена координата механізму (кут повороту кривошипа);  $\varphi_2, \varphi_4$  – відповідно кути повороту ланок 2, 4.

Відлік кутів  $\varphi_i$ , які визначають положення ланок, проводимо від додатного напрямку осі  $Oy$  за рухом годинникової стрілки (в напрямку обертання кривошипа). Отже, для визначення величини та напрямку кута повертаємо вісь  $Oy$  за годинниковою стрілкою доти, доки стрілка осі  $Oy$  не зіллється зі стрілкою вектора. Це й буде позитивним напрямом кута.

Розв'язуючи системи (2.8), (2.9) відносно невідомих  $\varphi_2, l_3$  та  $\varphi_4, l_5$ , отримаємо аналітичні залежності положень ланок 2, 3, 4, 5 від узагальненої координати, тобто функції положень ланок. Так для першого контура, з першого рівняння системи (2.8) одержимо:

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2}\right), \quad (2.10)$$

а з другого рівняння (2.8) врахувавши (2.10), отримаємо

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \left[ \arcsin\left(-\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2}\right) \right].$$

Для другого контура всі викладки аналогічні.



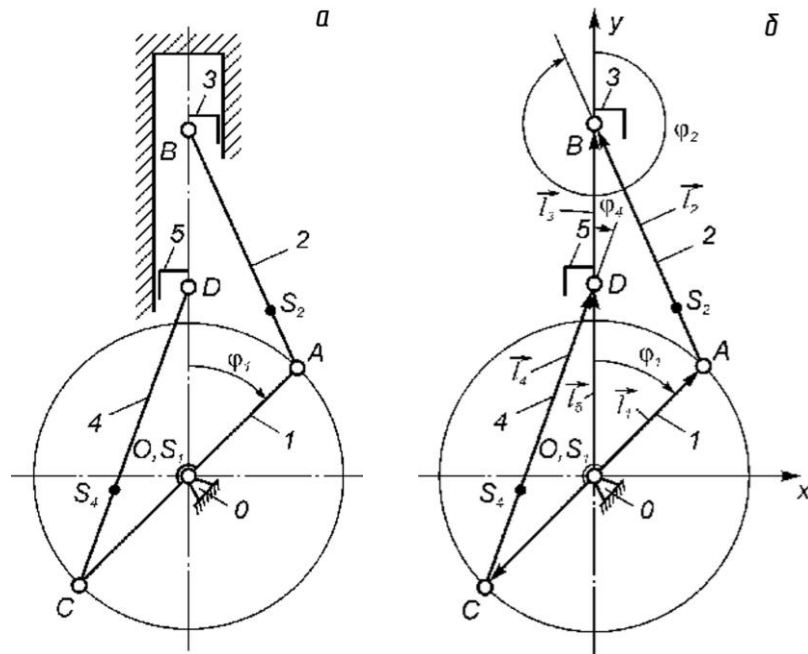


Рис. 2.12

Диференціюючи систему (2.8) за часом,

$$l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$-l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = v_3, \quad (2.12)$$

з (2.11) отримаємо вираз для кутової швидкості шатуна 2, а з (2.12) – лінійної швидкості повзуна 3

$$\omega_2 = -\frac{l_1 \omega_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2},$$

$$v_3 = -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 + l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2.$$

У випадку, коли закон руху початкової ланки невідомий, визначають аналогії швидкостей та прискорень, продиференціювавши системи (2.8) і (2.9) за узагальненою координатою.

Для визначення прискорень двічі диференціюємо за часом систему (2.8), що приводить до рівнянь

$$-l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 + l_2 \varepsilon_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (2.13)$$

$$l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 - l_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 = a_3. \quad (2.14)$$

З (2.13) визначаємо кутове прискорення шатуна 2

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}.$$

Підставивши значення  $\varepsilon_2$  в рівняння (2.14), можна визначити лінійне прискорення повзуна 3.

Координати будь-якої характерної точки механізму, її швидкість та прискорення визначають, використовуючи рівняння проекцій даної точки на осі координат. Наприклад, для т.  $S_2$  будемо мати

$$x_{S_2} = l_1 \sin \varphi_1 + l_{AS_2} \sin \varphi_2,$$

$$y_{S_2} = l_1 \cos \varphi_1 + l_{AS_2} \cos \varphi_2.$$

Модулі швидкостей та прискорень цієї точки знаходяться за відомими формулами

$$v_{s2} = \sqrt{\dot{x}_{s2}^2 + \dot{y}_{s2}^2}, \quad a_{s2} = \sqrt{\ddot{x}_{s2}^2 + \ddot{y}_{s2}^2}.$$

Наведені результати аналітичного дослідження зручні для програмування та реалізації на ЕОМ. Для складніших механізмів II класу з багатьма групами Ассура метод замкнутих векторних контурів може призвести до громіздких математичних виразів. Реалізація відповідних алгоритмів на ЕОМ призводить до складних програм. З метою спрощення методики дослідження механізмів II класу рекомендується *погруповий метод кінематичного дослідження*. Враховуючи, що будь-який механізм отримується послідовним приєднанням до початкового механізму обмеженої кількості груп Ассура, доцільно аналітичне дослідження механізмів виконувати за структурними групами. При цьому рух ланок для кожної групи розглядається окремо, з урахуванням кінематичних характеристик її зовнішніх кінематичних пар, якими вона приєднується до механізму. Створені уніфіковані блоки (підпрограми) для початкових механізмів та груп Ассура. Такий метод зводить дослідження механізмів до розгляду окремих структурних груп, методика кінематичного дослідження яких не залежить від механізму, у який вони входять.

Для кінематичного дослідження механізмів високих класів рекомендують метод замкнутих векторних контурів.