

МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
Циклова комісія аеронавігації

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Аеродроми»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Аеронавігація

Тема 22. Транспортна задача.

Вінниця 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від _____ № ____

СХВАЛЕНО

Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від _____ № ____

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від _____ № ____

Розглянуто на засіданні циклової комісії аеронавігації, протокол від 29.06.2023 р № 14.

Розробник:

1. викладач циклової комісії аеронавігації, спеціаліст Дроздова С.П.

Рецензенти:

1. викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки Кременчуцького льотного коледжу Харківського університету внутрішніх справ, професор, доцент, к.х.н., Козловська Т.Ф.
2. командир льотного загону аеродрому «Велика Кохнівка» КЛК ХНУВС Шорохов І.В.

План лекції

1. Метод потенціалів (розподіл ПС за маршрутами)

Рекомендована література

Основна

1. Проектування та будівництво аеродромних комплексів : монографія / Г. М. Агеєва, Л. Г. Гуртіна, О. М. Дубік та ін.; за заг. ред. В. В. Карпова. - Херсон : Олді+, 2022. - 336 с.
2. Аеродромне забезпечення польотів. Київ, 2010.
3. Аеродроми цивільні. Терміни та визначення. – Київ : Держстандарт України, 1996. 31. ДСТУ-Н В.1.1-27-2010.

Додаткова

1. Додаток 14 до Конвенції про міжнародну цивільну авіацію. Вид 7-е. 2016.
2. Сертифікаційні вимоги до цивільних аеродромів України. Накази Державіаслужби.
3. Аеродроми цивільні. Терміни та визначення. – Київ : Держстандарт України, 1996. 31. ДСТУ-Н В.1.1-27-2010.
4. Положення про порядок використання аеродромів України. Київ, 2008.
5. Повітряний кодекс України. URL: <https://patrul.in.ua/doc/kod/pku/>
6. Керівництво з організації наземного руху в аеропортах цивільної авіації України. Київ, 2005.
7. Аеродромно-технічне забезпечення польотів. URL: <https://ips.ligazakon.net/document/situation-doc/SI170082>
8. ДБН В2.2.-2022 Аеродроми. – К.: Мінрегіонбуд України, 2022. – 251с.
9. Міжнародні стандарти: ІКАО. Аеродроми. Том 1. – 2004.
10. Наказ № 191/446 від 20.06.2003 «Про затвердження Положення про порядок використання аеродромів України».
11. Наказ № 322 від 15.03.2019 р. «Про затвердження Авіаційних правил України «Інструкція з організації та здійснення контролю на безпеку в аеропортах України».

Текст лекції

Для знаходження оптимального плану транспортної задачі необхідно спочатку визначити опорний план перевезень з допомогою методу північно-західного кута чи методу мінімального елемента.

Теорема: Якщо x^* — деякий опорний план транспортної задачі, для якого виконуються наступні обмеження, а саме:

$$\beta_j + \alpha_i = c_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0$$

$$\beta_j + \alpha_i \leq c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0$$

тоді даний опорний план є оптимальним. α_i, β_j — називаються потенціалами пунктів відправлення та пунктів призначення.

Перевірку опорного плану на оптимальність здійснюють за допомогою методу потенціалів.

Алгоритм даного методу полягає в наступному:

1. Знаходимо потенціали пунктів відправлення (α_i) і пунктів призначення (β_j). Для цього, для кожної зайнятої клітинки будуюмо лінійне рівняння виду:

$$\beta_j + \alpha_i = c_{ij}$$

В результаті отримуємо систему лінійних рівнянь, розв'язавши яку знайдемо шукані потенціали. Зуваження: Зайнятих клітинок завжди є $n+m-1$. Значить ми отримаємо $n+m-1$ рівняння з $n+m$ невідомими. Щоб розв'язати дану систему покладемо $\alpha_1 = 0$.

2. Для усіх вільних клітинок знаходимо значення $\alpha_{ij} = c_{ij} - \beta_j - \alpha_i$.

Якщо всі елементи α_{ij} будуть додатними, то побудований опорний план є оптимальним.

Якщо ж серед значень α_{ij} будуть від'ємні елементи, то це означає, що побудований опорний план не являється оптимальним і є можливість переходу до іншого опорного плану.

Алгоритм переходу до іншого опорного плану наступний:

1) серед усіх від'ємних α_{ij} знаходимо максимальне по модулю значення. Це означає, що дана клітинка повинна бути зайнятою;

2) для клітинки в якій знаходиться максимальне по модулю значення будуюмо цикл перерахунку;

Означення: цикл перерахунку — це ламана лінія, вершини якої знаходяться в зайнятих клітинках і від кожної вершини виходять два відрізки, один з яких знаходиться в рядку, а другий в стовбці. Ламана лінія повинна бути замкнутою.

Якщо відрізки ламаної лінії перетинаються, то точка перетину вершиною не вважається.

Якщо правильно побудований опорний план, то завжди існує принаймні один цикл перерахунку.

3) починаючи з клітинки, де знаходиться α_{ij} , кожен вершину циклу позначаємо знаком плюс і мінус, чергуючи їх послідовно;

4) серед значень клітинок позначених мінусом вибираємо мінімальне значення;

5) до клітинок позначених знаком плюс додаємо це (мінімальне) значення, а від клітинок позначених знаком мінус — віднімаємо мінімальне значення.

Клітинка де знаходилось мінімальне значення стає вільною. В результаті отримуємо новий опорний план, який знову потрібно перевірити на оптимальність.

- Програмна реалізація методу потенціалів на Delphi
- Транспортна задача. Математична постановка задачі
- Метод північно-західного кута
- Розв'язок транспортної задачі розподільчим методом
- Рішення транспортної задачі методом диференціальних рент в середовищі програмування delphi

При розв'язанні транспортної задачі побудований опорний план може бути досить далеким до оптимального. Тому необхідно:

по-перше, перевірити його на оптимальність,

по-друге, мати механізм його поліпшення, якщо план не є оптимальним.

Одним з методів, який дозволяє вирішити наведені завдання, є метод потенціалів.

Поставимо у відповідність кожному постачальнику A_i деяку величину u_i , а кожному споживачеві B_j – величину v_j . Ці величини називаються потенціалами постачальників та споживачів. Перевірка оптимальності базується на наступному твердженні:

Якщо план $X^*=(x^*_{ij})$ є оптимальним, то йому відповідає така система потенціалів (u^*_i, v^*_j) , для якої виконуються умови:

$$u^*_i + v^*_j = c_{ij} \text{ для всіх } x^*_{ij} > 0, \quad (5.5)$$

$$u^*_i + v^*_j \leq c_{ij} \text{ для всіх } x^*_{ij} = 0, \quad (5.6)$$

$$i=1..m, j=1..n.$$

Перша умова дозволяє відшукати систему потенціалів, а друга - перевірити план на оптимальність. Якщо план не є оптимальним (тобто, хоча б одна з умов порушується), то його поліпшення можна здійснити за рахунок однієї з тих вільних клітин, для якої має місце порушення.

Розглянемо алгоритм методу потенціалів.

1) складається система рівнянь для знаходження потенціалів. Для цього для кожної зайнятої клітини записується рівняння

$$u_i + v_j = c_{ij} . \quad (5.7)$$

В отриманій системі маємо $m+n-1$ рівнянь і $m+n$ невідомих змінних (потенціалів) . Тому така система має нескінчену кількість розв'язків. Нас задовольнить будь-який з них. Для цього оберемо одне зі значень одного з потенціалів довільним (вільна змінна). Як правило, для спрощення розрахунків, його обирають рівним нулю. Вибір змінної ніякого впливу на кінцевий результат не має, однак її обирають виходячи зі зручності подальших обчислень. Наприклад, в ролі вільної змінної обирають таку змінну, яка входить в найбільшу кількість рівнянь.

2) для кожної вільної клітини знаходяться величини

$$D_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \quad (5.8)$$

Якщо серед отриманих величин є від'ємні, план не є оптимальним, і його можна поліпшити.

Це здійснюється за рахунок включення у план тих клітин, (перевезень), для яких отримані від'ємні значення. Якщо всі значення оцінок D_{ij} невід'ємні, то отриманий план є оптимальним. При цьому нульове значення величини D_{ij} свідчить про те, що дану клітину також можна включити у план з відповідними перерахунками, однак загальна вартість перевезень при цьому не зміниться. Тобто, ми будемо мати ще один (або декілька) оптимальний план. Цей висновок важливий для практичної реалізації, коли з декількох отриманих оптимальних планів потрібно обрати той, який буде задовольняти деяким додатковим умовам.

Приклад 5.1 У двох виробників A_1 і A_2 є однорідний товар. У виробника A_1 — 200 т, у виробника A_2 — 160 т. Вказаний товар слідусь відвантажити трьома споживачам B_1 , B_2 , B_3 , потреба яких складає відповідно 140, 90 і 130 т. Відстані від виробника до споживача складають: від виробника A_1 — 6, 4 і 2 км, від виробника A_2 — 5, 3 і 2 км.

Потрібно скласти план відвантаження товару, за якого транспортні витрати були б мінімальними.

Рішення. У приведеній задачі число пунктів відправлення товару або число постачальників рівне двом, а число споживачів — трьома, тобто $m = 2$, а $n = 3$.

Очевидно, що транспортні витрати будуть якнайменшими у тому випадку, коли загальна кількість тонно-кілометрів буде якнайменшою.

Розташуємо всі дані в табл. 5.1.1.

Таблиця 5.1.1 - Вихідні дані

Виробники	Наявність товару, т	Споживачі та їх потреба у товарі
	$B_1 = 140$ т $B_2 = 90$ т $B_3 = 130$ т	
A1		
A2		

Табл. 1 дозволяє нам відразу скласти першу програму. Для її отримання ми скористуємося так званим правилом «північно-західного кута». Суть цього методу полягає в наступному: ми починаємо з відвантаження товару виробником A1 споживачу B1 тобто із заповнення клітинки A1B1, що стоїть в північно-західному кутку нашої таблиці.1. Оскільки наявність товару у виробника A1 більше потреби споживача B1 $\{a_1 > b_j\}$, то ми віддаємо споживачу B1 всі необхідні йому 140 т, що залишилися 60 т товару — споживачу B2. Вичерпавши всі можливості виробника A1, переходимо до розподілу товару, що знаходиться у виробника A2. Оскільки попит B1 повністю задоволений, то ми переходимо до споживача B2. Йому відвантажуюмо не дістаючих 30 т товару. Що залишилися в A2 130 т віддаємо споживачу B3.

Ми одержуємо першу програму або перший опорний план. При цій програмі транспортні витрати, виражені в тонно-кілометрах, складуть:

$$f_1 = 140 \times 6 + 60 \times 4 + 30 \times 3 + 130 \times 2 = 1430 \text{ ткм.}$$

Замітимо, що чотири клітинки виявилися заповненими. У нашій задачі число виробників $m = 2$, а число споживачів $n = 3$. Число заповнених кліток рівне, таким чином, $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$.

При побудові будь-якої програми число завантажених кліток повинне бути рівне $m + n - 1$. Крім того, заповнені клітинки не повинні утворити циклу. Іншими словами, не повинно бути жодного прямокутника, всі вершини якого є заповненими клітинками.

Виробники	Наявність товару, т	Споживачі та їх потреба у товарі
	$B_1 = 140$ т $B_2 = 90$ т	$B_3 = 130$ т
A1		
A2		

Останню вимогу формулюють іноді ще і так: *завантажені клітинки повинні утворити викреслювану комбінацію. Це означає, що ми повинні*

мати нагоду викреслити всі стовпці і всі рядки, викреслюючи при цьому кожного разу не більш одну завантажену клітинку

Приклад 5.2. На складах A_1, A_2, A_3 міститься однорідна продукція у кількостях відповідно 300, 150, 180т. Споживачі B_1, B_2, B_3, B_4 повинні отримати цю продукцію у кількостях 190, 210, 260 і 220 т відповідно.

Визначити такий варіант закріплення постачальників за споживачами, за яким загальні витрати на перевезення будуть мінімальними. Витрати на перевезення 1т продукції задаються матрицею (табл. 5.2.1). *Знайти* план перевезень даної транспортної задачі методом північно-західного кута, що мінімізує їх загальну вартість. Нехай транспортна задача задана наступною таблицею

Таблиця 5.2.1- Вихідні дані

	B_1 190	B_2 210	B_3 260	B_4 220
A_1 300				
A_2 150				
A_3 180				

Розв'язок.

Знайдемо сумарні значення запасів вантажу та потреб у ньому.

$$\sum_{i=1}^n a_i = 300 + 150 + 180 = 630, \quad \sum_{j=1}^m b_j = 190 + 210 + 260 + 220 = 880.$$

Отже, розраховані величини не співпадають, тому дана задача є задачею відкритого типу. Щоб звести її до завдання закритого типу, уведемо фіктивного постачальника A_4 з обсягом вантажу, рівного $880 - 630 = 250$ (од). Вартості перевезень від нього до споживачів покладемо рівними нулю в результаті отримаємо наступну таблицю.

Таблиця 5.2.2 – Введення фіктивного виробника A_4

B A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1 300				
A_2 150				
A_3 180				
A_4 250				

Побудуємо опорний план, скориставшись методом мінімального елемента. Заповнення таблиці розпочинаємо з комірок з найменшим значенням вартості. В даному випадку це одна з комірок останнього рядка таблиці 5.2.2. Оберемо комірку (4.1). Оскільки при цьому запаси фіктивного споживача повністю не вичерпані, також буде заповнена ще одна комірка цього рядка, в даному випадку (4.2). Остаточні результати відображені у таблиці 3.3.

Таблиця 5.2.3– Застосування методу мінімального елемента

В	А	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	300				
A ₂	150				
A ₃	180				
A ₄	250				

Як видно з цієї таблиці, заповненими є сім клітин, тобто, отриманий план є не виродженим. Загальна величина витрат на перевезення складає $W_0=3110$ (г.о.)

Перевіримо отриманий план на оптимальність. Для цього скористаємось методом потенціалів.

$$u_1 + v_3 = 5$$

$$u_1 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 4$$

$$u_3 + v_2 = 7$$

$$u_3 + v_3 = 6$$

$$u_4 + v_3 = 0$$

$$u_4 + v_1 = 0$$

$$u_1=0, u_2=-1, u_3=1, u_4=-6, v_1=6, v_2=6, v_3=5, v_4=4.$$

$$D_{11} = 3; D_{12} = 0; D_{21} = 2; D_{22} = 1; D_{24} = 3; D_{31} = -1; D_{34} = 0; D_{43} = 1, D_{44} = 2.$$

Отже, серед отриманих величин D_{ij} є від'ємні, отже отриманий план можна поліпшити за рахунок клітини (3,1). Цикл перерахунку в даному випадку має вигляд (3,1) – (3,2) – (4,2) – (4,1).

Застосування методу потенціалів

В	А	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	300				
A ₂	150				
A ₃	180				
A ₄	250				

Загальні витрати на перевезення зменшаться на 150 г.о. і становитимуть $W_1=2960$ (г.о.).

Не відображаючи значення потенціалів цього плану, запишемо величини D_{ij} .

Застосування методу потенціалів

В	А	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	300				
A ₂	150				

A3 180

A4 250

Загальні витрати на перевезення зменшаться на 150 г.о. і становитимуть $W1=2960$ (г.о.)

Не відображаючи значення потенціалів цього плану, запишемо величини D_{ij} .

$D_{11} = 4; D_{12} = 1; D_{21} = 3; D_{22} = 2; D_{24} = 3; D_{32} = 1; D_{34} = 0; D_{43} = 0, D_{44} = 1.$

Отже, отриманий в таблиці 5.2.4 план є оптимальним. Аналізуючи його, можна зробити такі висновки. Споживач B1 отримує від фіктивного споживача 40 од. вантажу. Тобто, насправді його потреби не будуть задоволені на цю ж кількість одиниць. Аналогічний висновок можна зробити стосовно споживача B2. В даному випадку його потреби не будуть задовільне ні повністю. Це є недоліком розв'язання завдання, оскільки реальні умови господарювання можуть виключати такий розв'язок. Тоді потрібно обрати інший план, який завідомо буде менш оптимальним.

Наявність нульових значень величин D_{ij} свідчить про те, що можна побудувати ще один план, який буде рівносильний за сумарною вартістю перевезень побудованому. В даному випадку це можна зробити, включивши у план або клітину (3,4), або клітину (4,3).

В першому випадку цикл перерахунку має вигляд (3,4) – (3,3) – (1,3) – (1,4), а в другому – (4,3) – (4,10) – (3,1) – (3,3). Як видно, жоден з нових планів не включає в себе комірки другого стовпчика (тобто, інтереси споживача B2), а тому описаний вище недолік впливу не здійснюють. Їх можна розглядати лише як альтернативу побудованому плану.

Приклад 5.3. Побудуємо за методом північно-західного кута опорний план задачі. Неважко переконатись, що дана задача є задачею закритого типу.

Значення обсягів перевезень x_{ij} запишемо у нижньому правому кутку клітин таблиці. При цьому в останній стовпчик та останній рядок таблиць записуватимемо нові значення запасів та потреб.

Сумарні витрати на перевезення в даному випадку становлять $4 \cdot 200 + 5 \cdot 70 + 6 \cdot 190 + \dots + 7 \cdot 200 = 4850$ (од)

Кількість зайнятих клітин $N=7$, що свідчить про те, що отриманий план є не виродженим.

Метод мінімальної вартості:

- При включенні до базису пріоритет мають змінні, яким відповідають

меншим значенням сії.

- Такий підхід в загальному випадку зменшить сумарну вартість перевезень в опорному плані, а отже, він буде ближчим до оптимального.

- Серед клітин, що залишились, знову знаходиться та, якій відповідає найменша вартість перевезень, і процедура перетворення таблиці повторюється.

- Процес продовжується, доки не буде заповнена вся таблиця, тобто, не вичерпані всі запаси і не задовільнені всі потреби.