МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія авіаційного і радіоелектронного обладнання

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни
«Моделювання та методи оптимізації електромеханічних систем»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти

141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка (Електромеханіка)

за темою № 3 – Математичні методи моделювання при обробці даних

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, протокол від 28.08.2023 № 1.

Розробник: *старший викладач циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Шмельов Ю.М.*

Рецензенти:

1. Доцент кафедри електричних станцій Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент Шокарьов Д.А.

2. Старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.

План лекції:

1. Інтерполяція.
2. Апроксимація.
3. Сплайни.
4. Екстраполяція.
5. Методи прогнозної інтерполяції.
6. Класифікація методів прогнозування.

Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна література:

1. Моделювння електромеханічних систем: Підручник / Чорний О.П., Луговой А.В., Родькін Д.Й., Сисюк Г.Ю., Садовой О.В. Кременчук, 2001. 410 с.

Допоміжна література:

1. Чорний О.П., Толочко О.І., Титюк В.К. та інші Математичні моделі та особливості чисельних розрахунків динаміки електроприводів з асинхронними двигунами: монографія. Кременчук: ПП Щербатих О.В, 2016. 302 с.
2. Толочко О.І. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу: навчальний посібник. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 150 с.
3. Лозинський А.О., Мороз В.І., Паранчук Я.С. Розв’язування задач електромеханіки в середовищі пакетів MathCAD і MATLAB: Навчальний посібник. Львів: Видавництво Державного університету «Львівська політехніка», 2000. 166 с.
4. Довгань С. М. Дослідження систем електропривода методами математичного моделювання: навчальний посібник. Дніпропетровськ: НГА України, 2001. 137 с.
5. Дерець О. Л. Спеціальні питання математичного опису і моделювання динаміки складних систем». Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. 104 с.

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

Інтерполяція — в обчислювальній математиці спосіб знаходження проміжних значень величини за наявним дискретним набором відомих значень.

Багатьом із тих, хто стикається з науковими та інженерними розрахунками часто доводиться оперувати наборами значень, отриманих експериментальним шляхом чи методом випадкової вибірки. Як правило, на підставі цих наборів потрібно побудувати функцію, зі значеннями якої могли б з високою точністю збігатися інші отримувані значення. Така задача називається апроксимацією кривої. Інтерполяцією називають такий різновид апроксимації, при якій крива побудованої функції проходить точно через наявні точки даних.

Існує також близька до інтерполяції задача, що полягає в апроксимації якої-небудь складної функції іншою, простішою функцією. Якщо деяка функція занадто складна для продуктивних обчислень, можна спробувати обчислити її значення в декількох точках, а за ними побудувати, тобто інтерполювати, простішу функцію. Зрозуміло, використання спрощеної функції не дозволяє одержати такі ж точні результати, які давала б початкова функція. Але, для деяких класів задач, досягнутий виграш у простоті і швидкості обчислень може переважити отриманий огріх у результатах.

Варто також згадати і зовсім інший різновид математичної інтерполяції, відому за назвою «інтерполяція операторів». До класичних робіт з інтерполяції операторів відносяться теорема Рісса-Торіна) і теорема Марцинкевича, що є основою для багатьох інших робіт.

Апроксима́ція — наближене вираження одних математичних об'єктів іншими, близькими за значенням, але простішими, наприклад, кривих ліній — ламаними, ірраціональних чисел — раціональними, неперервних функцій — многочленами.

Апроксимації присвячені окремі розділи сучасної математики, наприклад, діофантові наближення — апроксимація ірраціональних чисел раціональними, наближення та інтерполяція функцій — апроксимація неперервних функцій алгебраїчними і тригонометричними многочленами.

Сплайн — функція, область визначення якої розбита на шматки, на кожному зі шматків функція є деяким поліномом (многочленом).

В задачах інтерполяції, інтерполяція сплайном краща, ніж інтерполяція многочленом, оскільки дає схожі результати навіть при менших степенях поліномів, а також при її використанні не виникає феномена Рунге.

Максимальний степінь поліномів в сплайні називається степенем сплайна. Різниця між степенем сплайна і його гладкістю називається дефектом сплайна.

Вид фрагментів сплайна. Те що сплайн складається з фрагментів однакового виду є однією з ключових ознак, що відрізняє його від інших кускових функцій. Найвідоміші сплайни, що складаються з фрагментів —

алгебраїчних поліномів не вище заданої степені. Як правило це кубічні поліноми, або поліноми не парних степенів. Лінійний, кубічний, п'ятої степені. Вищі степені застосовують рідко, зважаючи на ускладнення розрахунків та складності описані в попередньому розділі. Основною їхньою перевагою є простота розрахунків та аналізу. Недоліком є те, що відносно мало реальних фізичних процесів відповідають цій залежності.

Експоненційні сплайни

Якщо гнучку металеву лінійку зафіксовану у вузлах натягнути, то розв'язком диференційного рівняння буде не алгебраїчний поліном, а експонента. Тому такі сплайни називають також напруженими. Експонента описує багато фізичних процесів в динамічних системах. Недоліком є трудноші розрахунку.

Тригонометричні сплайни

Сплайни, фрагменти яких описуються тригонометричними поліномами. Мають досить складні розрахункові вирази. Більше п'ятдесяти різноманітних за видом фрагментів сплайнів описано в роботах Попова Б. О.

Раціональні сплайни та сплайни Паде.

Їхньою особливістю є можливість розриву похідних на фрагментах, при неперервності у вузлах.

Ансер М. будує фракціональні сплайни, де фрагменти задані з допомогою Гама функції.

Доцільність застосування певного виду фрагментів ґрунтується на конкретних умовах задачі та обмеженнях реалізації. Як правило основними вимогами є досягнення заданої точності інтерполяції за прийнятних затрат часу та ресурсів на реалізацію. Вдалий вибір виду фрагментів, що відповідає характеру процесу дозволяє скоротити витрати.

Число фрагментів. Очевидно, що мінімальним числом фрагментів є один. Класичне визначення сплайна обмежує число фрагментів певним числом на скінченному відрізку. Проте можна будувати сплайни і з нескінченим числом фрагментів, а реально це методи і алгоритми котрі не потребують інформації про певну кількість фрагментів. Представником цих сплайнів є кардинальні, досліджені Шенбергом. Для побудови сплайнів з необмеженим числом фрагментів найкраще підходять локальні сплайни.

Ширина фрагментів. Варто виділити сплайни з рівною шириною фрагментів. Це дозволяє значно спростити розрахункові вирази і прискорити роботу алгоритмів та знизити витрати на реалізацію. Певного спрощення можна також досягти за рахунок застосування фрагментів з кратною шириною. Існують сплайни з нульовою шириною фрагментів (Де Бур). Це призводить до кратності вузлів і можливості наближувати сплайнами з нерозривними фрагментами розривні функції. Розрахункові вирази отримують в результаті граничних переходів. Сплайни можуть мати також фрагменти з нескінченною шириною. Ці фрагменти мають бути крайніми. Іноді це дозволяє природно задати крайові умови.

Умови стикування фрагментів. Ще одна важлива ознака, що вирізняє сплайни. Коли йде мова про сплайни, як правило, вважають що фрагменти стикуються гладко. Тобто забезпечується неперервність значень та першої похідної. Поняття дефекту сплайна пов'язане із числом неперервних похідних, що має функція-фрагмент певного виду та числом похідних, неперервність яких гарантована у вузлах. Експонента, синусоїда мають нескінчене число похідних. Для них це поняття не має змісту. Тому зручніше говорити прямо про число похідних, неперервність яких гарантована у вузлах сплайна. Практично мова йде про неперервність значень та першої, максимум — другої похідних. Розрив другої та вищих похідних візуально є непомітним, тому враховується рідко. Зрозуміло, що перша похідна в точках стику може задаватися по-різному. Найпоширеніші два прийоми. Значення першої похідної вибирається так, щоб забезпечити неперервність другої (глобальні кубічні сплайни мінімального дефекту). Перша похідна рівняється першій похідній інтерпольованої функції (можливо наближено) в Ермітових сплайнах.

Крайові умови. Якщо сплайни мають обмежене число фрагментів, то природно в них відсутні крайні фрагменти праворуч та ліворуч. Тобто крайні вузли немає з чим стикувати. Винятком є лише періодичні сплайни, які мають природне продовження. Іноді природними називають крайові умови з нульовою похідною, хоча ніяких підстав вважати їх природнішими за інші немає. Якщо сплайн має фрагменти однакової ширини, вважаємо відсутні фрагменти тої ж ширини. Інший варіант це вважати відсутні фрагменти продовженими в нескінченність. Перевага такого підходу в можливості екстраполяції. Можна також вважати ширину фрагментів нульовою. Розрахункові вирази отримують граничними переходами. Якщо поглянути на крайові умови з точки зору формування сплайна з базисних функцій, то вони зводяться до продовження відповідних локальних базисних функцій. Ширина сусідніх фрагментів впливає на їхню форму. А просте обрізання часто призводить до осциляцій та зростання похибки на краях. Важливе значення крайові умови мають при обробці зображень та в задачах з екстраполяцією.

Додаткові обмеження. Вони частіше всього стосуються похідних у вузлах. Іноді вони випливають із фізики процесу. Наприклад невід'ємність першої похідної при інтерполяції не спадаючої функції (закону розподілу). Інші умови: невід'ємність значень, рівність моментів, площ, умови нормування. Додаткові умови іноді спрощують аналіз властивостей сплайнів, але можуть серйозно ускладнювати побудову та затрати реалізації.

Сітка точок інтерполяції. Може суттєво впливати на ефективність розрахунків. Важливими є випадки рівномірної сітки та рівномірної сітки, з відстанню між точками кратною відстані між вузлами сплайна.

Локальні властивості базисних функцій. Сплайн можна представити як суму зважених базисних сплайнів. Суттєвою є ширина цих базисних функцій. Так, в глобальних сплайнах базисні сплайни ненульові на всьому відрізку інтерполяції. Хоча варто зауважити, що з певною точністю (достатньою для багатьох технічних розрахунків) їх можна вважати локальними. В локальних сплайнів ширина базисних функцій невелика (чотири фрагменти в кубічних ермітових сплайнів). Це суттєво впливає на ефективність розрахунків та затрати реалізації.

Форма представлення. Функції, що задають фрагменти сплайна, як правило, залежать від множини параметрів, завдяки яким вони змінюють свою форму. Значення параметрів на кожному із фрагментів індивідуальні. Ці параметри можуть задавати конкретний сплайн. Для поліноміальних сплайнів це поліноміальні коефіцієнти. Отже, сплайн можна представити множиною параметрів функцій на кожному з фрагментів. Назвемо це представлення пофрагментним. Таке представлення є наочним, часто має явний фізичний зміст. Але число параметрів є надмірним. Так, для кубічного сплайна необхідно мати 4*(r-1) параметри (r — число вузлів сплайна).

Екстраполяція — наближення (приближення), знаходження за рядом даних значень функції інших її значень, що містяться поза цим рядом.