

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія авіаційного і радіоелектронного обладнання

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни
«Моделювання та методи оптимізації електромеханічних систем»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти

***141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка
(Електромеханіка)***

за темою № 4 – Моделі електромеханічних систем та їх елементів

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО

Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, протокол від 28.08.2023 № 1.

***Розробник:** старший викладач циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Шмельов Ю.М.*

Рецензенти:

- 1. Доцент кафедри електричних станцій Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент Шокарьов Д.А.*
- 2. Старший викладач циклової комісії технічного обслуговування авіаційної техніки, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції:

1. Моделі, описувані диференціальними рівняннями першого порядку.
2. Моделі, описувані диференціальними рівняннями другого порядку.
3. Моделі силових перетворювачів в електромеханічних системах.
4. Математичні моделі регуляторів замкнутих електромеханічних систем.
5. Моделі замкнутих електромеханічних систем.

Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна література:

1. Моделювання електромеханічних систем: Підручник / Чорний О.П., Луговой А.В., Родькін Д.Й., Сисюк Г.Ю., Садовой О.В. Кременчук, 2001. 410 с.

Допоміжна література:

1. Чорний О.П., Толочко О.І., Титюк В.К. та інші Математичні моделі та особливості чисельних розрахунків динаміки електроприводів з асинхронними двигунами: монографія. Кременчук: ПП Щербатих О.В, 2016. 302 с.
2. Толочко О.І. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу: навчальний посібник. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 150 с.
3. Лозинський А.О., Мороз В.І., Паранчук Я.С. Розв'язування задач електромеханіки в середовищі пакетів MathCAD і MATLAB: Навчальний посібник. Львів: Видавництво Державного університету «Львівська політехніка», 2000. 166 с.
4. Довгань С. М. Дослідження систем електропривода методами математичного моделювання: навчальний посібник. Дніпропетровськ: НГА України, 2001. 137 с.
5. Дерещ О. Л. Спеціальні питання математичного опису і моделювання динаміки складних систем». Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. 104 с.

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

2.1. Моделі, описувані диференціальними рівняннями першого порядку

Моделями, описуваними ДР 1-го порядку, наприклад, можуть бути RL- і RC-ланцюги, використовувані як фільтри низьких і високих частот. Схема комутації RL-ланцюга на джерело постійної напруги представлена на мал. 7.

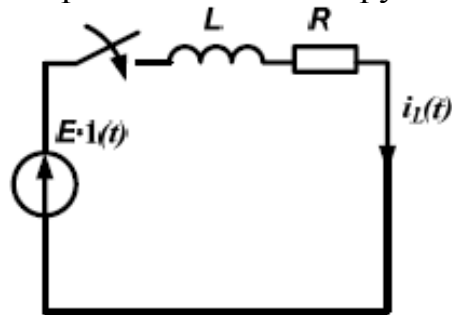


Рис. 7. Схема комутації RL-ланцюга на джерело постійної напруги E

Процеси, що протікають у ланцюзі при замиканні ключа, описуються диференціальним рівнянням 1 порядку, складеним по другому закону Кирхгофа:

$$E \cdot 1(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Схема комутації RC-ланцюга на джерело постійної напруги представлена на мал.8.

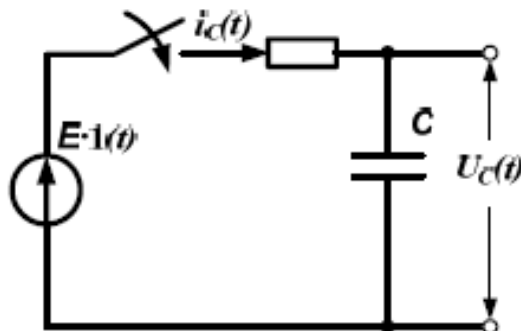


Рис. 8. Схема комутації RC-ланцюга на джерело постійної напруги E

Диференціальне рівняння, складене по другому закону Кирхгофа, описує процеси в ланцюзі після замикання ключа:

$$E \cdot 1(t) = i_c(t) \cdot R + U_c(t)$$

Враховуючи $i_c(t) = RC \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t)$, це рівняння можна записати в наступному виді:

$$E \cdot 1(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + U_c(t)$$

Як видно з моделей, змінними стану в RL- і RC-ланцюгах є струм через котушку індуктивності й напруга на конденсаторі відповідно.

2.2. Моделі, описувані диференціальними рівняннями другого порядку

Як моделі, описуваних ДР 2-го порядку, можна розглянути навантажені RLC-фільтри низьких і високих частот, а також двигун постійного струму незалежного збудження, що є основою ЕМС постійного струму.

2.2.1. Фільтр низьких частот

Ненавантажений RLC-фільтр являє собою послідовно з'єднані резистор, котушку індуктивності й конденсатор. Залежно від того, з якого елемента (індуктивності або ємності) буде зніматися напругу в якості вихідного, фільтр може пропускати високі або низькі частоти.

Схема комутації навантаженого фільтра низьких частот (ФНЧ) на джерело постійної напруги представлена на мал. 9.

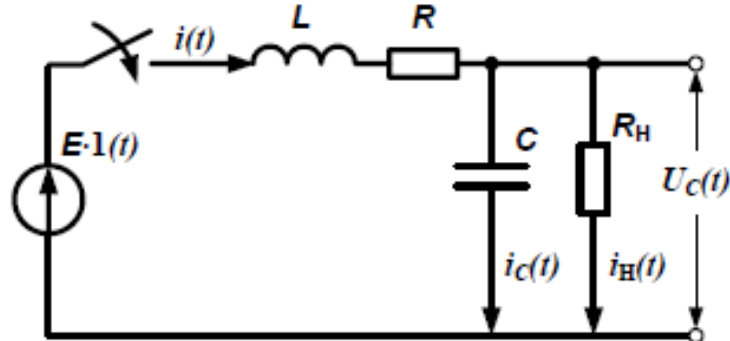


Рис. 9. Схема комутації навантаженого ФНЧ 2-го порядку на джерело постійної напруги

Складемо по другому закону Кирхгофа диференціальне рівняння, що описує динаміку процесів у ФНЧ 2-го порядку:

$$E \cdot 1(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + U_c(t)$$

Диференціальне рівняння для ланцюга по першому закону Кирхгофа:

$$i(t) = i_c(t) + i_n(t)$$

З огляду на , що

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt}, i_n(t) = \frac{U_c(t)}{R_n}$$

дана СДР запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} E \cdot 1(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + U_c(t) \\ i(t) = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{U_c(t)}{R_n} \end{cases}$$

СДР в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} \cdot [E \cdot 1(t) - i(t) \cdot R - U_c(t)] \\ \frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left[i(t) - \frac{U_c(t)}{R_n} \right] \end{cases}$$

У матричному виді:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_H \cdot C} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_H \cdot C} \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів перед змінними стану};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} - \text{вектор вільних членів СДР};$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} - \text{вектор змінних станів.}$$

У ФНЧ 2-го порядку змінними стану є струм через індуктивність і напругу на конденсаторі.

2.2.2. Фільтр високих частот

Схема комутації навантаженого фільтра високих частот (ФВЧ) на джерело постійної напруги представлена на мал. 10.

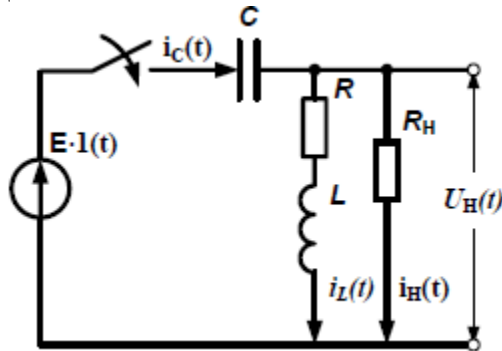


Рис. 10. Схема комутації навантаженого ФВЧ 2-го порядку на джерело постійної напруги

Диференціальне рівняння, що описує динаміку процесів у ФВЧ 2-го порядку, по другому закону Кирхгофа:

$$E \cdot 1(t) = U_c(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \cdot R$$

Диференціальне рівняння для ланцюга по першому закону Кирхгофа:

$$i_C(t) = i_L(t) + i_H(t)$$

З огляду на, що

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt}, i_H(t) = \frac{E \cdot 1(t) - U_c(t)}{R_H}, \text{ дана СДР запишеться у вигляді:}$$

$$\begin{cases} E \cdot 1(t) = U_c(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \cdot R \\ C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} = i_L(t) + \frac{E \cdot 1(t) - U_c(t)}{R_H} \end{cases}$$

СДР в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} \cdot [E \cdot 1(t) \cdot R - U_c(t)] \\ \frac{dU_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left[i_L(t) + \frac{E \cdot 1(t)}{R_H} - \frac{U_c(t)}{R_H} \right] \end{cases}$$

У матричному виді:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_H \cdot C} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ \frac{E}{R_H \cdot C} \end{pmatrix} \cdot 1(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_H \cdot C} \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів перед змінними стану};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ \frac{E}{R_H \cdot C} \end{pmatrix} - \text{вектор вільних членів СДР};$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} - \text{вектор змінних станів.}$$

Змінні стани тут такі ж, як й у ФНЧ. Різниця математичних моделей ФНЧ і ФВЧ складається в різних векторах вільних членів В.

2.2.3. Двигун постійного струму незалежного збудження

Одним з основних електромеханічних перетворювачів енергії в регульованому електричному приводі є двигун постійного струму незалежного збудження (ДПС НЗ).

Схема підключення ДПС НЗ до джерела постійної напруги U представлена на мал. 11.

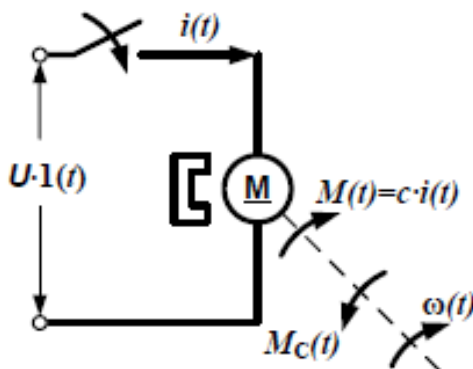


Рис. 11. Схема підключення ДПС НЗ до джерела постійної напруги

Схема заміщення якірного ланцюга ДПС НЗ показана на мал. 12.

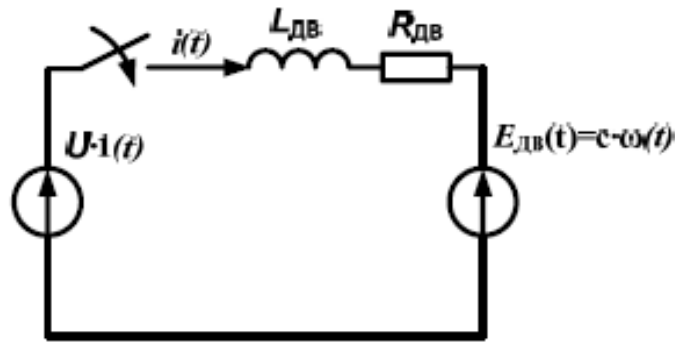


Рис. 12. Схема заміщення якорного ланцюга ДПС НЗ

При складанні математичної моделі ДПС НЗ приймемо наступні допущення. Вважаємо, що реакція якоря повністю скомпенсована (у реальному ДПС завжди є компенсаційна обмотка або додаткові полюси), потік збудження постійний, а активний опір якорного ланцюга не змінюється під час роботи двигуна.

Запишемо диференціальне рівняння електричної рівноваги якорного ланцюга двигуна (мал. 12):

$$U \cdot 1(t) = R_{\text{дв}} \cdot i(t) + L_{\text{дв}} \cdot \frac{di(t)}{dt} + E_{\text{дв}}(t)$$

де $R_{\text{дв}}$ – сумарний активний опір послідовно включені обмотки якоря й додаткових полюсів у гарячому стані (при $t = 750\text{C}$); $L_{\text{дв}}$ – сумарна індуктивність якорного ланцюга; $E_{\text{дв}}(t)$ – противо-ЕРС двигуна; $U \cdot 1(t)$ – напруга, прикладена до якорного ланцюга; $i(t)$ – струм якорного ланцюга.

Рівняння механічної рівноваги двигуна:

$$M(t) - M_c \cdot 1(t) = J_{\text{дв}} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}$$

де $M(t)$ – електромагнітний момент ДПС НЗ; $M_c \cdot 1(t)$ – момент опору навантаження; $J_{\text{дв}}$ – сумарний момент інерції, наведений до вала двигуна; $\omega(t)$ – швидкість двигуна.

З огляду на, що $E_{\text{дв}}(t) = c \cdot \omega(t)$ і $M(t) = c \cdot i(t)$ (c – коефіцієнт ЕРС і моменту ДПС НЗ), запишемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} U \cdot 1(t) = R_{\text{дв}} \cdot i(t) + L_{\text{дв}} \cdot \frac{di(t)}{dt} + c \cdot \omega(t) \\ c \cdot i(t) - M_c \cdot 1(t) = J_{\text{дв}} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} \end{cases}$$

СДР в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L_{\text{дв}}} \cdot [U \cdot 1(t) - R_{\text{дв}} \cdot i(t) - c \cdot \omega(t)] \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J_{\text{дв}}} \cdot [c \cdot i(t) - M_c \cdot 1(t)] \end{cases}$$

СДР в матричному виді:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_{дв}}{L_{дв}} & -\frac{c}{L_{дв}} \\ \frac{c}{J_{дв}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{U}{L_{дв}} \\ -\frac{M_c}{J_{дв}} \end{pmatrix} \cdot 1(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_{дв}}{L_{дв}} & -\frac{c}{L_{дв}} \\ \frac{c}{J_{дв}} & 0 \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів перед змінними стану};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{U}{L_{дв}} \\ -\frac{M_c}{J_{дв}} \end{pmatrix} - \text{вектор вільних членів СДР};$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} - \text{вектор змінних станів}.$$

З отриманої математичної моделі ДПС НЗ видно, що змінними стану в ньому є швидкість вала й струм у якірному ланцюзі.

Ці змінні стани відповідно пов'язані з масою вала й індуктивністю обмотки якоря, тобто з механічною й електричною інерційностями двигуна.

2.3. Моделі силових перетворювачів в електромеханічних системах.

Широтно-імпульсний перетворювач

Для регулювання швидкості електроприводів постійного струму дуже часто використовуються широтно-імпульсні перетворювачі (ШПП). До основних достоїнств даного перетворювача відносяться гарні динамічні властивості й лінійність регулювальних характеристик. Принципова схема реверсивного ШПП представлена на мал. 13.

Для наближеного аналізу динаміки ШПП дискретну модель перетворювача можна замінити на безперервну модель - аперіодична ланка 1-го порядку.

У цьому випадку динамічний стан ШПП можна описати ДР 1-го порядку:

$$T_{\text{ПР}} \cdot \frac{dU_d(t)}{dt} + U_d(t) = k_{\text{ПР}} \cdot U_y(t)$$

де $U_y(t)$ - вхідна напруга керування ШПП; $U_d(t)$ - вихідна напруга ШПП; $T_{\text{ПР}}$ - постійна часу ШПП; $k_{\text{ПР}}$ - коефіцієнт передачі ШПП.

Дане ДР записано в стандартному для теорії автоматичного керування виді, тобто в лівій частині записана функція вихідної координати і її похідна, а в правій частині - всі інші доданки. При цьому коефіцієнт перед вихідною координатою дорівнює одиниці. У такому випадку коефіцієнт перед першою похідною вихідної координати $T_{\text{ПР}}$ має розмірність часу і є постійної часу ШПП, а число перед вхідною координатою $k_{\text{ПР}}$ являє собою коефіцієнт передачі ШПП.

Постійну часу ШПП можна визначити як половину періоду частоти комутації силових ключів ШПП:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{1}{2 \cdot f_{\text{КОМ}}}$$

$$K_{\text{ПР}} = \frac{c \cdot 1,5 \cdot \omega_{\text{Н}}}{U_{\text{У МАКС}}}$$

де $U_{\text{У МАКС}}$ - максимальна напруга керування на вході ШП;

$\omega_{\text{Н}}$ - номінальна швидкість ДПС НЗ; c - коефіцієнт ЕРС і моменту ДПС НЗ.

Математичні моделі регуляторів замкнутих ЕМС

У сучасних системах керування, зокрема й в ЕМС, одержали широке поширення регулятори, виконані на операційних підсилювачах. Залежно від математичного закону, по якому поводить вихідна напруга регулятора при подачі на вхід прямокутного імпульсу, регулятори можуть бути пропорційні, інтегральні й диференціальні. Найбільше часто в ЕМС застосовуються наступні види регуляторів: пропорційний, пропорційно-інтегральний, пропорційно-інтегрально-диференціальний. Розглянемо схеми й математичні моделі цих регуляторів.

Математична модель П-регулятора

Схема П-регулятора, що підсумує й підсилює дві вхідних напруги $U_{\text{ВХ1}}$ й $U_{\text{ВХ2}}$, представлена на мал. 14.

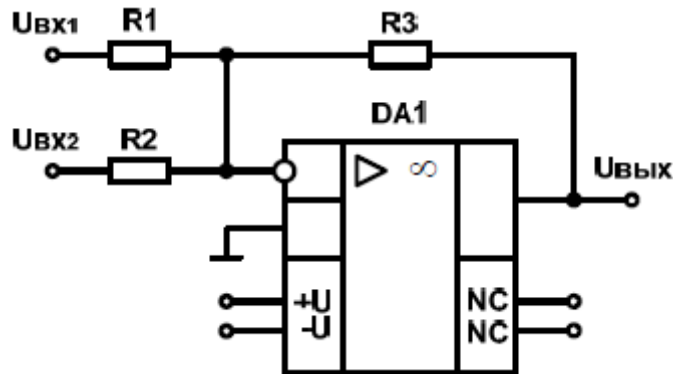


Рис. 14. Схема П-регулятора

Представимо без виводу рівняння, що описує динаміку П-регулятора. Вихідну напругу визначимо як

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВХ1}}(t) \cdot \frac{R3}{R1} + U_{\text{ВХ2}}(t) \cdot \frac{R3}{R2}$$

При $R1=R2$ одержимо

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = (U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t)) \cdot \frac{R3}{R1} = (U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t)) \cdot k_{\text{РЕГ}}$$

де $k_{\text{РЕГ}} = R3 / R1$ - коефіцієнт передачі П-регулятора.

Застосувавши до цього рівняння пряме перетворення Лапласа з нульовими початковими умовами одержимо

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = (U_{\text{ВХ1}}(p) + U_{\text{ВХ2}}(p)) \cdot k_{\text{РЕГ}}$$

Передаточна функція $W(p)$ П-регулятора як елемента ЕМС (мал. 15) визначається як відношення зображення вихідної напруги $U_{\text{ВЫХ}}(p)$ до зображення вхідної.

$$W_{\text{РЕГ}}(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ1}}(p) + U_{\text{ВХ2}}(p)} = k_{\text{РЕГ}} = \frac{R3}{R1}$$

При включенні регулятора в ЕМС першу вхідну напругу відповідає напрузі задачі $U_{\text{ВХ1}}(p) = U_{\text{ЗАД}}(p)$, а друга вхідна напруга відповідає напрузі негативного зворотного зв'язку $U_{\text{ВХ1}}(p) = -U_{\text{ОС}}(p)$. Вихідна напруга регулятора є вхідною напругою керування $U_{\text{ВЫХ}}(p) = U_y(p)$ для широтно-імпульсного модулятора (ШІМ), що управляє ШІП.

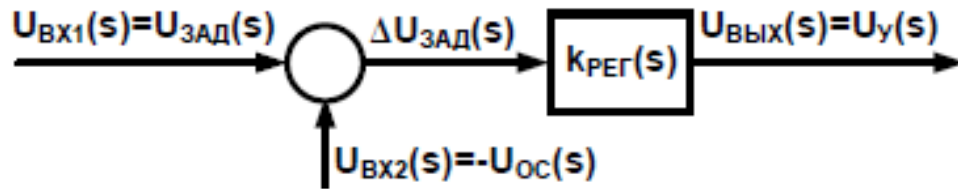


Рис. 15. П-регулятор як елемент ЕМС

При однакових опорах $R1=R2=R3$ вихідна напруга регулятора дорівнює сумі вхідних напруг.

2.4.2. Математична модель Пі-регулятора

Схема Пі-регулятора, що підсумує й підсилює дві вхідних напруги $U_{\text{ВХ1}}$ й $U_{\text{ВХ2}}$, представлена на мал. 16.

Представимо без виводу диференціальне рівняння, що описує динаміку Пі-регулятора, як

$$\frac{d}{dt} \left[U_{\text{ВЫХ}}(t) - \left(U_{\text{ВХ1}}(t) \cdot \frac{R3}{R1} + U_{\text{ВХ2}}(t) \cdot \frac{R3}{R2} \right) \right] = \frac{U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t)}{R1 \cdot C1}$$

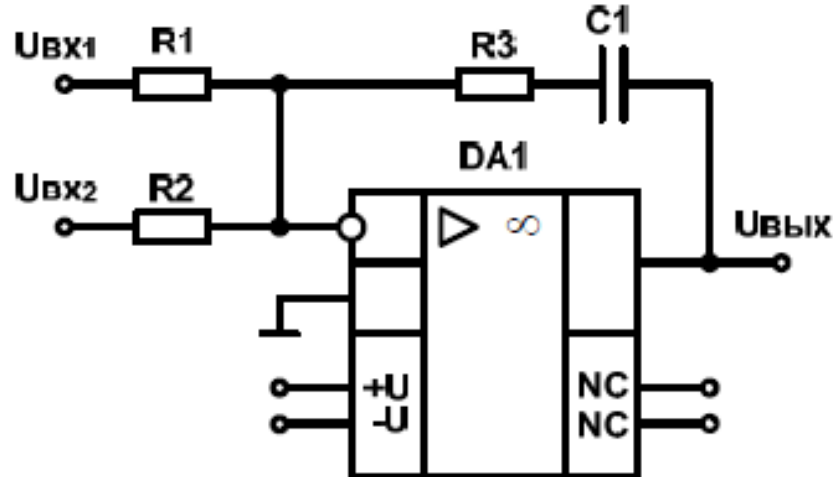


Рис. 16. Схема Пі-регулятора

У випадку рівності $R1=R2$ одержимо

$$\frac{d}{dt} \left[U_{\text{ВЫХ}}(t) - \frac{R3}{R1} \cdot (U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t)) \right] = \frac{U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t)}{R1 \cdot C1}$$

Уведемо для Пі-регулятора коефіцієнт передачі $k_{\text{рег}} = R3 / R1$ і постійну часу $T_{\text{рег}} = C1 \cdot R1$. У цьому випадку диференціальне рівняння, що описує динаміку Пі-регулятора, буде виглядати як

$$\frac{d}{dt} [U_{\text{ВЫХ}}(t) - k_{\text{рег}} \cdot (U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t))] = \frac{U_{\text{ВХ1}}(t) + U_{\text{ВХ2}}(t)}{T_{\text{рег}}}$$

Застосувавши пряме перетворення Лапласа з нульовими початковими умовами, одержимо алгебраїчне рівняння для зображень

$$p \cdot [U_{\text{ВЫХ}}(p) - k_{\text{рег}} \cdot (U_{\text{ВХ1}}(p) + U_{\text{ВХ2}}(p))] = \frac{U_{\text{ВХ1}}(p) + U_{\text{ВХ2}}(p)}{T_{\text{рег}}}$$

на підставі якого можна одержати передаточну функцію Пі-регулятора

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ1}}(p) + U_{\text{ВХ2}}(p)} = k_{\text{рег}} + \frac{1}{T_{\text{рег}} \cdot p} = \frac{R3}{R1} + \frac{1}{C1 \cdot R1 \cdot p}$$

Передаточна функція Пі-регулятора складається із пропорційної крег й інтегральної $(T_{\text{рег}} \cdot p)$ -1 частин.

2.5. Моделі замкнутих електромеханічних систем

2.5.1. Модель з замкнутою електромеханічною системою з П-регулятором, двигуном постійного струму незалежного збудження й силовим перетворювачем, представленим аперіодичною ланкою 1-го порядку

У замкнутої ЕМС із П-регулятором, ДПС НЗ і ШП зворотний зв'язок здійснюється за рахунок датчика швидкості, яким звичайно служить тахогенератор. Структурна схема такий ЕМС представлена на мал. 17.

СДР, що описує дану ЕМС, буде складатися із трьох рівнянь - електричної рівноваги якірного ланцюга ДПС НЗ, рівняння руху електропривода й рівняння стану ШП.

При складанні рівняння стану ШП внесемо для зручності коефіцієнт передачі регулятора k_p у передаточну функцію перетворювача. Тоді коефіцієнт передачі ШП буде дорівнює добутку $k_{\text{пр}} \cdot k_p$, причому

$$U_y(t) = \Delta U_{\text{Зад}}(t) = U_{\text{Зад}}(t) - U_{\text{Ос}}(t) = U_{\text{Зад}}(t) - k_{\text{пр}} \cdot k_p \cdot \omega(t)$$

Рівняння стану перетворювача:

$$T_{\text{пр}} \cdot \frac{dU_d(t)}{dt} + U_d(t) = k_{\text{пр}} \cdot k_p \cdot (U_{\text{Зад}} - U_{\text{Ос}}) \\ = k_{\text{пр}} \cdot k_p \cdot (U_{\text{Зад}} - k_{\text{Ос}} \cdot k_{\text{тг}} \cdot \omega(t))$$

Рівняння електричної рівноваги ДПС НЗ:

$$U_d(t) = L_{\text{дв}} \cdot \frac{di(t)}{dt} + R_{\text{дв}} \cdot i(t) + c \cdot \omega(t)$$

Рівняння механічної рівноваги ДПС НЗ:

$$c \cdot i(t) - M_c = J_{\text{дв}} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}$$

Дозволяючи кожне рівняння відносно похідних, запишемо СДР в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dU_d(t)}{dt} = \frac{1}{T_{\text{ПР}}} \cdot [k_{\text{ПР}} \cdot k_{\text{Р}} \cdot (U_{\text{ЗАд}} - k_{\text{ОС}} \cdot k_{\text{ТГ}} \cdot \omega(t)) - U_d(t)] \\ \frac{dU_d(t)}{dt} = \frac{1}{L_{\text{ДВ}}} \cdot [U_d(t) - R_{\text{ДВ}} \cdot i(t) + c \cdot \omega(t)] \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J_{\text{ДВ}}} \cdot [c \cdot i(t) - M_c] \end{cases}$$

СДР в матричному виді:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_d(t) \\ i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{\text{ПР}}} & 0 & -\frac{k_{\text{ПР}} \cdot k_{\text{Р}} \cdot k_{\text{ОС}} \cdot k_{\text{ТГ}}}{T_{\text{ПР}}} \\ \frac{1}{L_{\text{ДВ}}} & -\frac{R_{\text{ДВ}}}{L_{\text{ДВ}}} & \frac{c}{L_{\text{ДВ}}} \\ 0 & \frac{c}{J_{\text{ДВ}}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_d(t) \\ i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k_{\text{ПР}} \cdot k_{\text{Р}} \cdot U_{\text{ЗАд}}}{T_{\text{ПР}}} \\ 0 \\ -\frac{M_c}{J_{\text{ДВ}}} \end{pmatrix} \cdot 1(t)$$

$\begin{bmatrix} U_d(t) \\ i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$ - вектор - змінні стани;

$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{\text{ПР}}} & 0 & -\frac{k_{\text{ПР}} \cdot k_{\text{Р}} \cdot k_{\text{ОС}} \cdot k_{\text{ТГ}}}{T_{\text{ПР}}} \\ \frac{1}{L_{\text{ДВ}}} & -\frac{R_{\text{ДВ}}}{L_{\text{ДВ}}} & \frac{c}{L_{\text{ДВ}}} \\ 0 & \frac{c}{J_{\text{ДВ}}} & 0 \end{pmatrix}$ - матриця коефіцієнтів перед змінними стану;

$B = \begin{pmatrix} \frac{k_{\text{ПР}} \cdot k_{\text{Р}} \cdot U_{\text{ЗАд}}}{T_{\text{ПР}}} \\ 0 \\ -\frac{M_c}{J_{\text{ДВ}}} \end{pmatrix}$ - вектор вільних членів СДР.

З отриманої математичної моделі видно, що крім двох змінних станів двигуна (струму й швидкості) ЕМС має третій змінний стан - вихідна напруга ШП, обумовлену інертністю перетворювача.

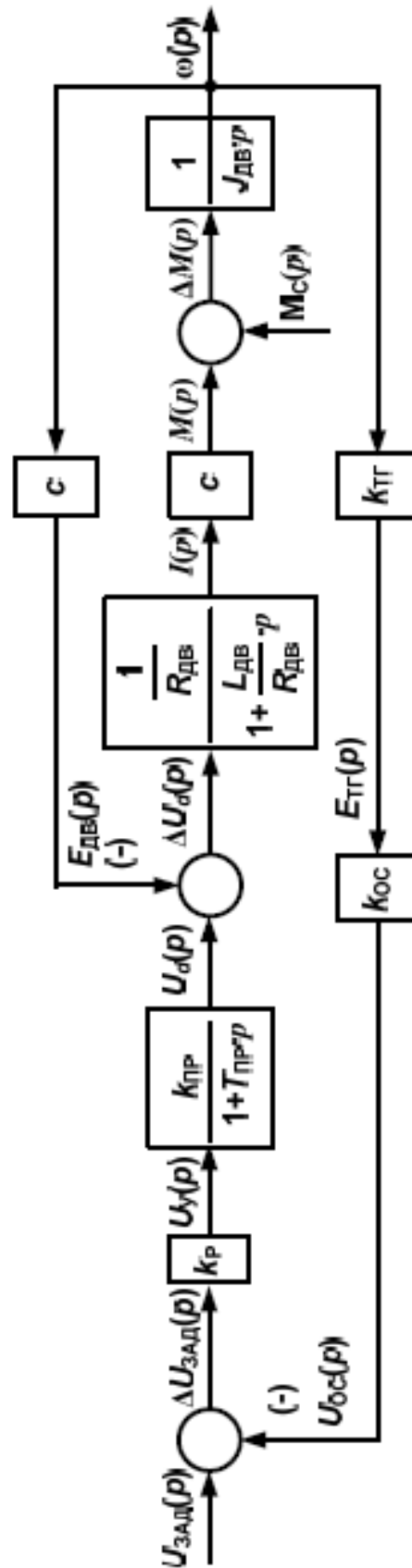


Рис. 17. Структурна схема замкнутої ЕМС із П-регулятором

2.5.2. Модель з замкнутою електромеханічною системою з

Пі-регулятором, двигуном постійного струму незалежного збудження й силовим перетворювачем, представленим пропорційною ланкою

Структурна схема ЕМС із Пі-регулятором, ДПС НЗ і ШП, представленим пропорційною ланкою, показана на мал. 18.

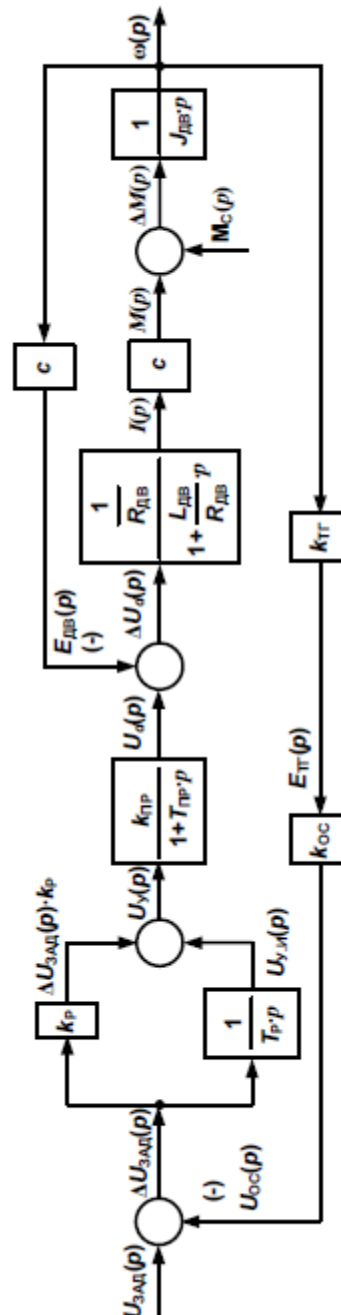


Рис. 18. Структурна схема замкнутої ЕМС із Пі-регулятором

У такому випадку рівняння електричної рівноваги буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} & [k_p \cdot (U_{зад} - k_{ос} \cdot k_{тг} \cdot \omega(t)) + U_{у.и}(t)] \cdot k_{пр} \\ & = L_{дв} \cdot \frac{di(t)}{dt} + R_{дв} \cdot i(t) + c \cdot \omega(t) \end{aligned}$$

де $U_{у.и}(t)$ - напруга керування інтегральною частиною регулятора.

Рівняння механічної рівноваги залишиться без змін:

$$c \cdot i(t) - M_c = J_{\text{ДВ}} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}$$

До цих двох рівнянням додається рівняння стану Пі-регулятора:

$$T_p \cdot \frac{dU_{y.и}(t)}{dt} = U_{\text{зАд}} - k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}} \cdot \omega(t)$$

де T_p - постійна часу регулятора.

СДР в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L_{\text{ДВ}}} \cdot \left(\left[k_p \cdot (U_{\text{зАд}} - k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}} \cdot \omega(t)) + U_{y.и}(t) \right] \cdot k_{\text{пР}} - R_{\text{ДВ}} \cdot i(t) + c \cdot \omega(t) \right) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J_{\text{ДВ}}} \cdot [c \cdot i(t) - M_c] \\ \frac{dU_{y.и}(t)}{dt} = \frac{1}{T_p} \cdot [U_{\text{зАд}} - k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}} \cdot \omega(t)] \end{cases}$$

СДР в матричній формі:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ U_{y.и}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{\text{ДВ.Г}}}{L_{\text{ДВ}}} & -\frac{k_{\text{пР}} \cdot k_p \cdot k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}} + c}{L_{\text{ДВ}}} & \frac{k_{\text{пР}}}{L_{\text{ДВ}}} \\ \frac{c}{J_{\text{э}}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}}}{T_p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ U_{y.и}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_{\text{пР}} \cdot k_p \cdot U_{\text{зАд}}}{L_{\text{ДВ}}} \\ -\frac{M_c}{J_{\text{э}}} \\ \frac{U_{\text{зАд}}}{T_p} \end{bmatrix} \cdot 1(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ U_{y.и}(t) \end{bmatrix} - \text{вектор змінних станів;}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_{\text{ДВ.Г}}}{L_{\text{ДВ}}} & -\frac{k_{\text{пР}} \cdot k_p \cdot k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}} + c}{L_{\text{ДВ}}} & \frac{k_{\text{пР}}}{L_{\text{ДВ}}} \\ \frac{c}{J_{\text{э}}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{\text{ос}} \cdot k_{\text{тГ}}}{T_p} & 0 \end{bmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів перед змінними}$$

стану;

$$B = \begin{pmatrix} \frac{k_{\text{пР}} \cdot k_p \cdot U_{\text{зАд}}}{L_{\text{ДВ}}} \\ -\frac{M_c}{J_{\text{э}}} \\ \frac{U_{\text{зАд}}}{T_p} \end{pmatrix} - \text{вектор вільних членів СДР.}$$

Третьою змінною стану ЕМС у цьому випадку виступає напруга керування інтегральною частиною Пі-регулятора.