

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ
СПРАВ**

**Кафедра кібербезпеки та DATA-технологій
Факультет №6**

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з навчальної дисципліни

«Моделювання складних нелінійних процесів в кібербезпеці»

обов'язкових компонент

освітньої програми другого (магістерського) рівня вищої освіти

125 «Кібербезпека»

(«Безпека інформаційних та комунікаційних систем»)

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 21.12.23 № 11

СХВАЛЕНО

Вченою радою
факультету № 6
Протокол від 20.12.23
№11

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної
ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 21.12.23 № 11

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних кібербезпеки та DATA-технологій (протокол від 15.12.2023р. №12)

Розробники:

професор кафедри д.е.н. Лучик Василь Єфрімович

Рецензенти:

- 1. Професор кафедри обчислювальної техніки та програмування НТУ ХПІ, д.т.н., професор Кучук Г. А.*
- 2. Доцент кафедри штучного інтелекту ХНУРЕ, к.т.н., доцент Чала Л. Є.*

ПРАКТИКУМ

Практичне заняття. Тема: ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТУ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗА ДАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Мета: Отримати практичні навички ідентифікації експериментальних даних в процесі проведення досліджень аспірантами

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Виконати ідентифікацію випадкових величин та оцінювання параметрів закону розподілу за критеріями χ^2 та λ за даними спостережень (табл. 1.1-1.2). Зробити висновки за отриманими результатами виконаних обчислень. Розрахунки виконувати засобами Mathcad.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до практичної роботи №1

№ зп	Варіант											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Дані спостережень для дослідження за критерієм λ											
1	12	10	6	8	9	7	5	6	7	2	10	5
2	6	4	3	3	5	3	3	2	4	5	6	6
3	5	3	3	2	4	2	2	1	4	2	6	0
4	10	8	5	6	8	6	4	5	6	2	9	4
5	13	11	7	9	10	8	5	6	8	4	4	5
6	7	5	4	4	6	4	3	3	5	6	2	2
7	4	2	2	1	4	2	2	1	3	3	3	0
8	9	7	5	6	7	5	4	4	6	1	6	3
9	0	2	2	1	0	0	1	0	0	4	9	0
10	10	8	5	6	8	6	4	5	6	1	4	4
11	4	2	2	1	4	2	2	1	3	3	2	0
12	3	1	2	1	3	1	1	0	3	2	1	0
13	8	6	4	5	6	4	3	3	5	7	3	3
14	11	9	6	7	9	7	4	5	7	2	4	4
15	5	3	3	2	4	2	2	2	4	8	2	1
16	2	0	1	0	2	0	1	0	2	2	1	6
17	7	5	4	4	6	4	3	3	5	1	3	2
18	0	0	1	0	0	7	0	9	3	6	0	0
19	0	3	3	2	6	4	3	3	5	9	3	2
20	0	3	4	2	0	10	0	7	4	3	0	4
21	10	8	5	6	8	6	4	5	6	4	4	4
22	13	11	7	9	10	8	5	6	8	1	5	5

№ зп	Варіант											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Дані спостережень для дослідження за критерієм λ											
23	7	5	4	4	6	4	3	3	5	6	3	2
24	4	2	2	1	4	2	2	1	3	2	2	0
25	5	3	3	2	4	2	2	2	4	0	0	1
26	10	8	5	6	8	6	4	5	6	2	3	4
27	13	11	7	9	10	8	5	6	8	4	3	5
28	7	5	4	4	6	4	3	3	5	4	8	2
29	8	6	4	5	6	4	3	3	5	5	11	3
30	11	9	6	7	9	7	4	5	7	2	5	4
31	5	3	3	2	4	2	2	2	4	6	2	1
32	2	0	1	0	2	0	1	0	2	4	3	9
33	3	1	2	1	3	1	1	0	3	4	8	0
34	8	6	4	5	6	4	3	3	5	8	11	3
35	11	9	6	7	9	7	4	5	7	10	5	4
36	5	3	3	2	4	2	2	2	4	6	6	1
37	10	8	5	6	8	6	4	5	6	6	7	4
38	13	11	7	9	10	8	5	6	8	9	1	5
39	12	10	6	8	9	7	5	6	7	4	5	5
40	6	4	3	3	5	3	3	2	4	2	0	2
41	5	3	3	2	4	2	2	2	4	3	1	1
42	10	8	5	6	8	6	4	5	6	4	8	4
43	13	11	7	9	10	8	5	6	8	5	2	5
44	5	3	3	2	4	2	2	2	4	2	1	1
45	0	2	2	1	0	3	3	2	0	3	8	6
46	0	2	2	1	0	8	5	6	4	5	11	12
47	4	2	2	1	4	2	2	1	3	11	3	0
48	5	3	3	2	4	2	2	2	4	3	10	1
49	6	4	3	3	5	3	3	2	4	2	4	2
50	9	7	5	6	7	5	4	4	6	2	0	3
51	3	1	2	1	3	1	1	0	3	2	0	0
52	7	5	4	4	6	4	3	3	5	3	4	2
53	2	0	1	0	2	0	1	0	2	4	4	5
54	3	1	2	1	3	1	1	0	3	7	5	0
55	10	8	5	6	8	6	4	5	6	1	7	4
56	4	2	2	1	4	2	2	1	3	5	3	0

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до практичної роботи №1

№ Варіанту	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
1	7.058	10.11	5.23	5.23	6.782	9.583	7.22	8.15	7.22	7.22	8.15	9.562	6.63
	11.138	8.079	8.01	6.17	8.27	8.27	4.56	7.54	9.09	12.36	5.66	9.09	6.5
	7.358	6.299	9.1	5.91	8.15	8.15	8.15	5.581	5.44	10.03	11.339	3.56	10.03
	7.178	10.23	5.35	6.52	8.99	9.09	7.34	8.27	6.602	3.34	8.27	10.318	9.87
	6.398	8.199	4.57	6.371	7.541	6.89	10.03	5.24	9.21	10.23	7.623	9.023	9.297
	8.178	6.419	6.35	4.591	5.761	8.562	4.79	9.92	4.14	8.562	5.843	9.32	10.23
	9.958	9.199	8.13	7.371	5.612	6.782	10.23	9.08	10.86	6.782	9.583	6.864	10.341
	6.178	10.979	4.35	9.151	8.392	6.633	8.15	11.251	6.98	8.64	7.803	10.604	7.885
2	7.681	10.733	5.853	5.853	7.405	10.206	7.843	8.773	7.843	7.843	8.773	10.185	7.253
	10.868	7.809	7.74	5.9	8.00	8.00	4.29	7.27	8.82	12.09	5.39	8.82	6.23
	8.378	7.319	10.12	6.93	9.17	9.17	9.17	6.601	6.46	11.05	12.359	4.58	11.05
	7.088	8.889	5.26	7.061	8.231	7.58	10.72	5.93	9.9	10.92	8.313	9.713	9.987
	8.568	6.809	6.74	4.981	6.151	8.952	5.18	10.31	4.53	8.952	6.233	9.71	10.62
	9.208	8.449	7.38	6.621	4.862	6.032	9.48	8.33	10.11	6.032	8.833	6.114	9.591
	6.468	11.269	4.64	9.441	8.682	6.923	8.44	11.541	7.27	8.93	8.093	10.894	8.175
	6.701	9.753	4.873	4.873	6.425	9.226	6.863	7.793	6.863	6.863	7.793	9.205	6.273
3	8.304	11.356	6.476	6.476	8.028	10.829	8.466	9.396	8.466	8.466	9.396	10.808	7.876
	10.598	7.539	7.47	5.63	7.73	7.73	4.02	7	8.55	11.82	5.12	8.55	5.96
	9.398	8.339	11.14	7.95	10.19	10.19	10.19	7.621	7.48	12.07	13.379	5.6	12.07
	9.258	7.499	7.43	5.671	6.841	9.642	5.87	11	5.22	9.642	6.923	10.4	11.31
	9.598	8.839	7.77	7.011	5.252	6.422	9.87	8.72	10.5	6.422	9.223	6.504	9.981
	5.718	10.519	3.89	8.691	7.932	6.173	7.69	10.791	6.52	8.18	7.343	10.144	7.425
	6.991	10.043	5.163	5.163	6.715	9.516	7.153	8.083	7.153	7.153	8.083	9.495	6.563
	7.324	10.376	5.496	5.496	7.048	9.849	7.486	8.416	7.486	7.486	8.416	9.828	6.896

Продовження таблиці 1.2 –

№ Варіанту	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
4	8.927	11.979	7.099	7.099	8.651	11.452	9.089	10.019	9.089	9.089	10.019	11.431	8.499
	10.328	7.269	7.2	5.36	7.46	7.46	3.75	6.73	8.28	11.55	4.85	8.28	5.69
	10.418	9.359	12.16	8.97	11.21	11.21	11.21	8.641	8.5	13.09	14.399	6.62	13.09
	10.288	9.529	8.46	7.701	5.942	7.112	10.56	9.41	11.19	7.112	9.913	7.194	10.671
	6.108	10.909	4.28	9.081	8.322	6.563	8.08	11.181	6.91	8.57	7.733	10.534	7.815
	6.241	9.293	4.413	4.413	5.965	8.766	6.403	7.333	6.403	6.403	7.333	8.745	5.813
	7.614	10.666	5.786	5.786	7.338	10.139	7.776	8.706	7.776	7.776	8.706	10.118	7.186
	7.947	10.999	6.119	6.119	7.671	10.472	8.109	9.039	8.109	8.109	9.039	10.451	7.519
5	9.55	12.602	7.722	7.722	9.274	12.075	9.712	10.642	9.712	9.712	10.642	12.054	9.122
	10.058	6.999	6.93	5.09	7.19	7.19	3.48	6.46	8.01	11.28	4.58	8.01	5.42
	11.438	10.379	13.18	9.99	12.23	12.23	12.23	9.661	9.52	14.11	15.419	7.64	14.11
	6.798	11.599	4.97	9.771	9.012	7.253	8.77	11.871	7.6	9.26	8.423	11.224	8.505
	6.631	9.683	4.803	4.803	6.355	9.156	6.793	7.723	6.793	6.793	7.723	9.135	6.203
	6.864	9.916	5.036	5.036	6.588	9.389	7.026	7.956	7.026	7.026	7.956	9.368	6.436
	8.237	11.289	6.409	6.409	7.961	10.762	8.399	9.329	8.399	8.399	9.329	10.741	7.809
	8.57	11.622	6.742	6.742	8.294	11.095	8.732	9.662	8.732	8.732	9.662	11.074	8.142
6	10.173	13.225	8.345	8.345	9.897	12.698	10.335	11.265	10.335	10.335	11.265	12.677	9.745
	9.788	6.729	6.66	4.82	6.92	6.92	3.21	6.19	7.74	11.01	4.31	7.74	5.15
	12.458	11.399	14.2	11.01	13.25	13.25	13.25	10.681	10.54	15.13	16.439	8.66	15.13
	7.321	10.373	5.493	5.493	7.045	9.846	7.483	8.413	7.483	7.483	8.413	9.825	6.893
	7.254	10.306	5.426	5.426	6.978	9.779	7.416	8.346	7.416	7.416	8.346	9.758	6.826
	7.487	10.539	5.659	5.659	7.211	10.012	7.649	8.579	7.649	7.649	8.579	9.991	7.059
	8.86	11.912	7.032	7.032	8.584	11.385	9.022	9.952	9.022	9.022	9.952	11.364	8.432
	9.193	12.245	7.365	7.365	8.917	11.718	9.355	10.285	9.355	9.355	10.285	11.697	8.765

№ Варіанту	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
7	10.796	13.848	8.968	8.968	10.52	13.321	10.958	11.888	10.958	10.958	11.888	13.3	10.368
	9.518	6.459	6.39	4.55	6.65	6.65	2.94	5.92	7.47	10.74	4.04	7.47	4.88
	13.478	12.419	15.22	12.03	14.27	14.27	14.27	11.701	11.56	16.15	17.459	9.68	16.15
	7.944	10.996	6.116	6.116	7.668	10.469	8.106	9.036	8.106	8.106	9.036	10.448	7.516
	7.877	10.929	6.049	6.049	7.601	10.402	8.039	8.969	8.039	8.039	8.969	10.381	7.449
	8.11	11.162	6.282	6.282	7.834	10.635	8.272	9.202	8.272	8.272	9.202	10.614	7.682
	9.483	12.535	7.655	7.655	9.207	12.008	9.645	10.575	9.645	9.645	10.575	11.987	9.055
	9.816	12.868	7.988	7.988	9.54	12.341	9.978	10.908	9.978	9.978	10.908	12.32	9.388
8	11.419	14.471	9.591	9.591	11.143	13.944	11.581	12.511	11.581	11.581	12.511	13.923	10.991
	9.248	6.189	6.12	4.28	6.38	6.38	2.67	5.65	7.2	10.47	3.77	7.2	4.61
	14.498	13.439	16.24	13.05	15.29	15.29	15.29	12.721	12.58	17.17	18.479	10.7	17.17
	8.567	11.619	6.739	6.739	8.291	11.092	8.729	9.659	8.729	8.729	9.659	11.071	8.139
	8.5	11.552	6.672	6.672	8.224	11.025	8.662	9.592	8.662	8.662	9.592	11.004	8.072
	8.733	11.785	6.905	6.905	8.457	11.258	8.895	9.825	8.895	8.895	9.825	11.237	8.305
	10.106	13.158	8.278	8.278	9.83	12.631	10.268	11.198	10.268	10.268	11.198	12.61	9.678
	10.439	13.491	8.611	8.611	10.163	12.964	10.601	11.531	10.601	10.601	11.531	12.943	10.011
9	12.042	15.094	10.214	10.214	11.766	14.567	12.204	13.134	12.204	12.204	13.134	14.546	11.614
	8.978	5.919	5.85	4.01	6.11	6.11	2.4	5.38	6.93	10.2	3.5	6.93	4.34
	15.518	14.459	17.26	14.07	16.31	16.31	16.31	13.741	13.6	18.19	19.499	11.72	18.19
	9.19	12.242	7.362	7.362	8.914	11.715	9.352	10.282	9.352	9.352	10.282	11.694	8.762
	9.123	12.175	7.295	7.295	8.847	11.648	9.285	10.215	9.285	9.285	10.215	11.627	8.695
	9.356	12.408	7.528	7.528	9.08	11.881	9.518	10.448	9.518	9.518	10.448	11.86	8.928
	10.729	13.781	8.901	8.901	10.453	13.254	10.891	11.821	10.891	10.891	11.821	13.233	10.301
	11.062	14.114	9.234	9.234	10.786	13.587	11.224	12.154	11.224	11.224	12.154	13.566	10.634

№ Варіанту	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
10	12.665	15.717	10.837	10.837	12.389	15.19	12.827	13.757	12.827	12.827	13.757	15.169	12.237
	7.058	10.11	5.23	5.23	6.782	9.583	7.22	8.15	7.22	7.22	8.15	9.562	6.63
	11.138	8.079	8.01	6.17	8.27	8.27	4.56	7.54	9.09	12.36	5.66	9.09	6.5
	7.358	6.299	9.1	5.91	8.15	8.15	8.15	5.581	5.44	10.03	11.339	3.56	10.03
	7.178	10.23	5.35	6.52	8.99	9.09	7.34	8.27	6.602	3.34	8.27	10.318	9.87
	6.398	8.199	4.57	6.371	7.541	6.89	10.03	5.24	9.21	10.23	7.623	9.023	9.297
	8.178	6.419	6.35	4.591	5.761	8.562	4.79	9.92	4.14	8.562	5.843	9.32	10.23
	9.958	9.199	8.13	7.371	5.612	6.782	10.23	9.08	10.86	6.782	9.583	6.864	10.341
11	6.049	6.049	9.592	8.662	9.081	8.322	8.28	11.55	4.85	6.419	6.35	4.591	10.666
	6.282	6.282	9.825	8.895	4.413	5.965	8.5	13.09	14.399	9.199	8.13	7.371	10.999
	7.655	7.655	11.198	10.268	5.786	7.338	11.19	7.112	9.913	10.979	4.35	9.151	12.602
	7.988	7.988	11.531	10.601	6.119	7.671	6.91	8.57	7.733	10.733	5.853	5.853	6.999
	9.591	9.591	13.134	12.204	7.722	9.274	6.403	6.403	7.333	7.809	7.74	5.9	10.379
	6.12	4.28	5.38	6.93	5.09	7.19	7.776	7.776	8.706	7.319	10.12	6.93	11.599
	16.24	13.05	13.741	13.6	9.99	12.23	8.109	8.109	9.039	8.889	5.26	7.061	9.683
	5.581	5.44	10.282	9.352	9.771	9.012	9.712	9.712	10.642	6.809	6.74	4.981	9.916
12	7.623	9.023	9.297	7.601	10.402	8.039	9.683	4.803	4.803	6.355	8.662	9.592	8.662
	5.843	9.32	10.23	7.834	10.635	8.272	9.916	5.036	5.036	6.588	8.895	9.825	8.895
	9.583	6.864	10.341	9.207	12.008	9.645	11.289	6.409	6.409	7.961	10.268	11.198	10.268
	7.803	10.604	7.885	9.54	12.341	9.978	11.622	6.742	6.742	8.294	10.601	11.531	10.601
	8.773	10.185	7.253	11.143	13.944	11.581	13.225	8.345	8.345	9.897	12.204	13.134	12.204
	5.39	8.82	6.23	6.38	6.38	2.67	6.729	6.66	4.82	6.92	2.4	5.38	6.93
	12.359	4.58	11.05	15.29	15.29	15.29	11.399	14.2	11.01	13.25	16.31	13.741	13.6
	8.313	9.713	9.987	8.291	11.092	8.729	10.373	5.493	5.493	7.045	9.352	10.282	9.352

Приклад ідентифікації випадкової величини засобами Mathcad

Спостережувальні значення випадкової величини

$$A :=$$

	0	1	2	3	4
0	9.379	8.76	10.81	9.876	11.15
1	10.61	7.882	9.466	9.682	11.44
2	9.515	9.591	9.146	10.06	11.55
3	9.198	12.05	11.58	9.771	12.55
4	9.153	9.432	7.652	10.34	7.988
5	9.461	9.694	10.68	9.578	11.32
6	10.89	10.97	10.31	9.968	...

Формування масиву спостережувальних значень випадкової величини

$$j := 0 \dots \text{rows}(A) - 1$$
$$k := 0 \dots \text{cols}(A) - 1$$
$$\zeta_{j+k \cdot \text{rows}(A)} := A_{j,k}$$

Кількість значень у масиві $n := \text{длина}(\zeta)$ $n = 84$ $i := 0..n - 1$

Кількість інтервалів в гістограмі $m := 12$ $j := 0..m$

$$\Delta x := \frac{\max(\zeta) - \min(\zeta)}{m - 1} \quad \begin{array}{l} \max(\zeta) = 12.55 \\ \min(\zeta) = 7.652 \end{array}$$

$$\Delta x = 0.445$$

Поділ на інтервали: $x_j := \min(\xi) - \frac{\Delta x}{2} + j \cdot \Delta x$ $\text{длина}(x) = 13$

$\mathbf{x}^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	7.429	7.875	8.32	8.765	9.21	9.656	10.101

Кількість влучень в інтервал: $h := \text{hist}(x, \zeta)$

$$\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 & 16 & 14 & 9 & 15 & 6 & \dots \end{bmatrix}$$

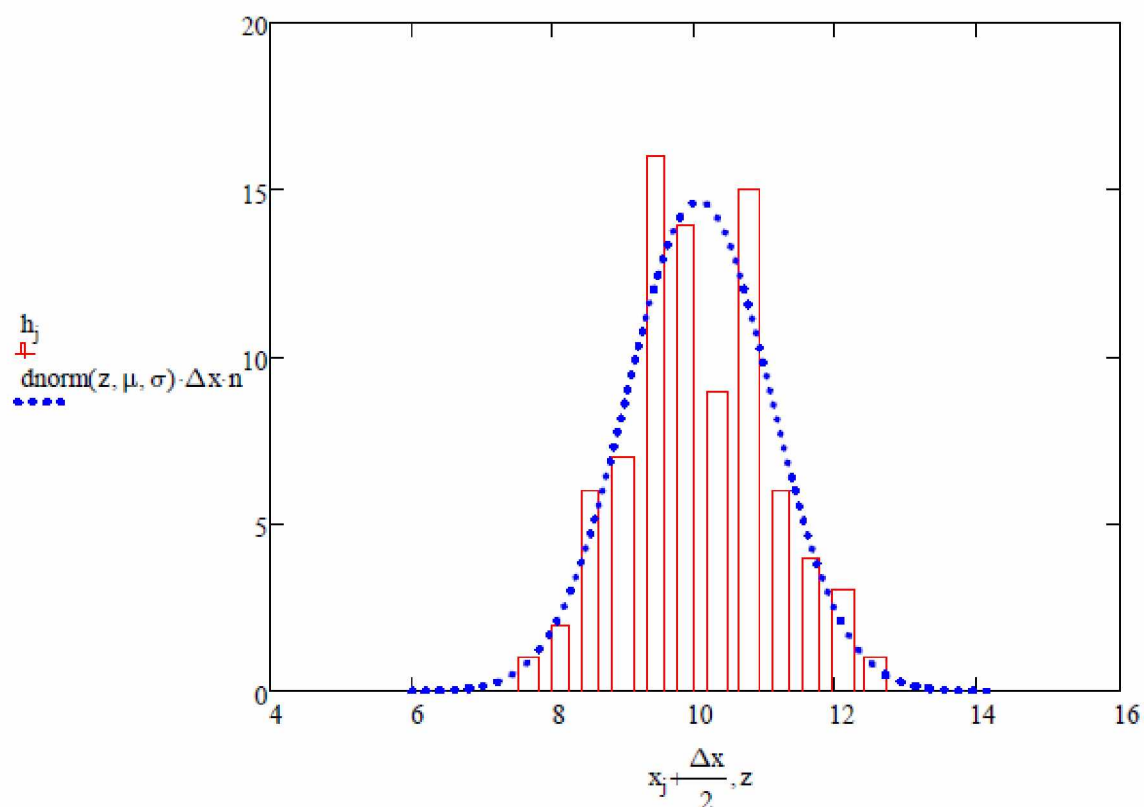
Оцінка середнього значення випадкової величини: $\mu := \text{mean}(\zeta) = 10.056$

Оцінка середньоквадратичного відхилення $\sigma := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \text{stdev}(\zeta) = 1.018$

Рисунок 1.1 – Лістинг програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм χ^2

Побудова гістограми частот:

$$z := \mu - 4\sigma, \mu - 4\sigma + 0.01 \dots \mu + 4\sigma$$



Розрахунок теоретичного очікування кількості влучень:

$$j := 0 \dots m - 1$$

$$h_{\text{teor},j} := \left(\text{pnorm}(x_{j+1}, \mu, \sigma) - \text{pnorm}(x_j, \mu, \sigma) \right) \cdot n$$

$$h_{\text{teor}}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.932	2.347	4.895	8.455	12.095	14.331	14.063	...

Рисунок 1.2 – Продовження лістингу програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм χ^2

Побудова функції, що виконує об'єднання сусідніх груп у разі, якщо кількість влучень менша за п'ять:

```

grup(v,w) :=
  j ← 0
  for i ∈ 0 .. length(v) - 1
    1 if vi ≥ 5
      aj ← vi
      bj ← wi
      j ← j + 1
    otherwise
      0 if i = length(v) - 1
        aj-1 ← aj-1 + vi
        bj-1 ← bj-1 + vi
      otherwise
        vi+1 ← vi + vi+1
        wi+1 ← wi + wi+1
  (a
   b)

```

Групована спостережувана кількість влучень: $H_{\text{ww}} := \text{grup}(h, h_{\text{teor}})_0$

$$H^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	6	7	16	14	9	15	6	...

Групована теоретична кількість влучень: $H_{\text{teor}} := \text{grup}(h, h_{\text{teor}})_1$

$$H_{\text{teor}}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.932	2.347	4.895	8.455	12.095	14.331	14.063	...

Розрахунок спостережуваного значення хі-квадрат:

$$j := 0 \dots \text{длина}(H) - 1 \quad \chi := \sum_j \frac{(H_j - H_{\text{teor},j})^2}{H_{\text{teor},j}} = 5.757$$

Табличне значення хі-квадрат при рівні значущості 0,05: $\text{qchisq}(0.95, m - 1 - 2) = 16.919$

Формування відповіді: $\text{result} := \text{if}(\chi < \text{qchisq}(0.95, m - 3), \text{"YES"}, \text{"NO"}) = \text{"YES"}$

Рисунок 1.3 – Продовження лістингу програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм χ^2

Спостережувальні значення випадкової величини

$A :=$

	0
0	0
1	7
2	9
3	5
4	5
5	7
6	7
7	11
8	6
9	4
10	7
11	4
12	6
13	1
14	4
15	...

$A^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	7	9	5	5	7	7	11	6	...

Формування масиву спостережувальних значень випадкової величини

$$n_s := \text{rows}(A) = 21 \quad N := \text{cols}(A) = 1 \quad j := 0..n_s - 1 \quad k := 0..N - 1$$

$$\zeta_{j+k \cdot n_s} := A_{j,k}$$

Кількість значень у масиві:

$$n := \text{длина}(\zeta) = 21 \quad i := 0..n_s - 1$$

Визначення мінімального та максимального спостережувальних значень:

$$x_{\min} := \min(\zeta) = 0$$

$$x_{\max} := \max(\zeta) = 11$$

Рисунок 1.4 – Лістинг програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм λ

Кількість інтервалів у гістограмі:

$$m := 1 + x_{\max} - x_{\min} = 12 \quad j := 0..m$$

Довжина інтервалу: $\Delta x := 1$

Поділ на інтервали: $x_j := x_{\min} - \frac{\Delta x}{2} + j \cdot \Delta x$

$$x^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	...

Середини інтервалів: $k := 0..m - 1$ $x_{m_k} := x_k + \frac{\Delta x}{2}$

$$x_m^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

Частота влучень в інтервалі:

$$h := \frac{\text{hist}(x, \zeta)}{n} \quad \sum_k h_k = 1$$

$$h^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.048	0.048	0	0	0.143	0.238	0.19	0.238	...

Формування гіпотези про закон розподілу:

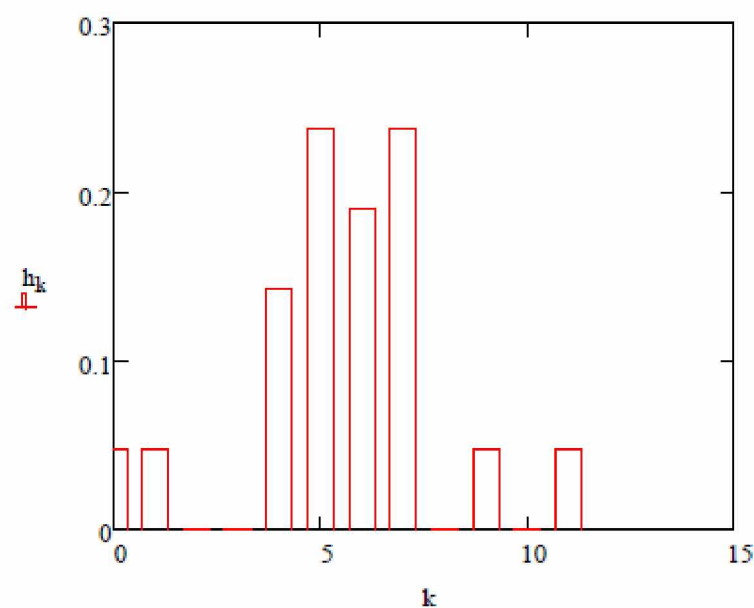


Рисунок 1.5 – Продовження лістингу програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм λ

Сумарна частота влучень в інтервали:

$$w_k := \sum_{j=0}^k h_j \quad w_{m-1} = 1$$

$w^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	0.048	0.095	0.095	0.095	0.238	0.476	0.667	0.905	...

Оцінювання параметрів закону розподілу:

середнє значення

$$\mu_1 := \text{mean}(\zeta) = 5.571$$

середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_1 := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \text{stdev}(\zeta) = 2.378$$

максимальне

$$c := x_{\max} = 11$$

$$p := \frac{\mu_1}{c} = 0.506$$

Візуальне порівняння гістограми сумарних частот випадкових чисел з гіпотетичним законом розподілу:

$$G(i) := \text{pbinom}(i, c, p)$$

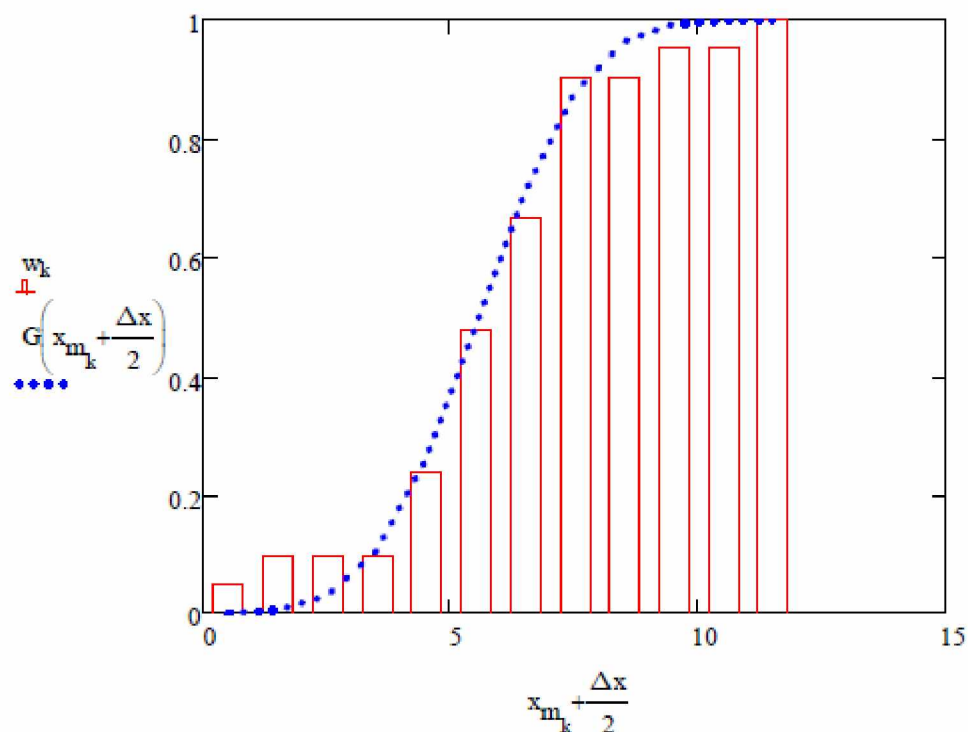


Рисунок 1.6 – Продовження лістингу програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм λ

Перевірка гіпотези за критерієм λ :

$$k := 0 \dots m - 1$$

Спостережувана сумарна частота влучень в інтервали:

$w^T =$		0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0.048	0.095	0.095	0.095	0.238	0.476	0.667	0.905	...

Теоретична сумарна частота влучень в інтервали:

$$w_{\text{teor}_k} := G\left(x_{m_k} + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$w_{\text{teor}}^T =$		0	1	2	3	4
	0	$4.229 \cdot 10^{-4}$	$5.197 \cdot 10^{-3}$	0.03	0.105	...

$$\text{delta_}w_k := |w_k - w_{\text{teor}}|$$

$\text{delta_}w^T =$		0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	2.218	2.095	2.095	2.095	1.767	1.45	1.505	1.922	...

$$\lambda := \max(\text{delta_}w) \cdot \sqrt{n} = 10.163$$

Формування висновку щодо відповідності випадкової величини обраному закону:

$$\text{result} := \text{if}(\lambda < 1.36, \text{"YES"}, \text{"NO"}) = \text{"NO"}$$

Рисунок 1.7 – Продовження лістингу програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм λ

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та зазначається завдання з відповідним варіантом
2. Наводиться лістинг програми в Mathcad
3. Висновки за результатами практичної роботи

Запитання для самоперевірки

1. Яким чином дослідник може визначити закон розподілу випадкової величини?
2. Сформулюйте головні задачі ідентифікації закону розподілу?
3. Визначте критерії відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу.
4. Надайте алгоритм визначення критерію χ^2 та λ -критерію.
5. Яка інформація надається досліднику після проведення оцінювання відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу?
6. Визначте при яких умовах виконується оцінка відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу за критерієм χ^2 ?

7. Визначте при яких умовах виконується оцінка відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу за λ -критерієм?
8. Сформулюйте основні задачі ідентифікації функціональної залежності.
9. Яким чином дослідник визначає функціональну залежність між змінними моделі?

Практичне заняття. Тема: ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ДАНИХ

Мета: Отримати практичні навички аналізу експериментальних даних методами інтерполяції та апроксимації під час виконання досліджень

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Виконати інтерполяцію заданих даних (табл. 2.1) за допомогою формул Ньютона.
2. За даними спостережень (табл. 2.2) виконати апроксимацію функціональної залежності.

Таблиця 2.1 – Дані спостережень (завдання 1)

Варіант	Змінні	Дані спостережень										
1	X	0	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95	1.1	1.25	1.4
	Y	0.1	0.18	0.26	0.34	0.42	0.5	0.58	0.66	0.74	0.82	0.9
2	X	0	0.13	0.28	0.43	0.58	0.73	0.88	1.03	1.18	1.33	1.48
	Y	0	0.25	0.33	0.41	0.49	0.57	0.65	0.73	0.81	0.89	0.97
3	X	0	0.21	0.36	0.51	0.66	0.81	0.96	1.11	1.26	1.41	1.56
	Y	0.05	0.32	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8	0.88	0.96	0.96
4	X	0	0.29	0.44	0.59	0.74	0.89	1.04	1.19	1.34	1.49	1.64
	Y	0.01	0.41	0.49	0.57	0.65	0.73	0.81	0.89	0.97	0.98	1
5	X	0	0.37	0.52	0.67	0.82	0.97	1.12	1.27	1.42	1.57	1.72
	Y	0	0.38	0.46	0.54	0.62	0.7	0.78	0.86	0.94	0.95	0.97
6	X	0	0.45	0.6	0.75	0.9	1.05	1.2	1.35	1.5	1.65	1.8
	Y	0.11	0.42	0.5	0.58	0.66	0.74	0.82	0.9	0.98	0.99	1
7	X	0	0.53	0.68	0.83	0.98	1.13	1.28	1.43	1.58	1.73	1.88
	Y	0	0.49	0.57	0.65	0.73	0.81	0.89	0.97	1.05	1.06	1.07
8	X	0	0.61	0.76	0.91	1.06	1.21	1.36	1.51	1.66	1.81	1.96
	Y	0.08	0.43	0.51	0.59	0.67	0.75	0.83	0.91	0.95	0.968	0.99
9	X	0	0.69	0.84	0.99	1.14	1.29	1.44	1.59	1.74	1.89	2.04
	Y	0	0	0.39	0.47	0.55	0.63	0.71	0.79	0.83	0.848	0.87
10	X	0	0.77	0.92	1.07	1.22	1.37	1.52	1.67	1.82	1.97	2.12
	Y	0	0	0.46	0.54	0.62	0.7	0.78	0.86	0.9	0.918	0.94
11	X	0	0.85	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9	2.05	2.2
	Y	0	0.01	0.33	0.41	0.49	0.57	0.65	0.73	0.77	0.788	0.81
12	X	0	0.93	1.08	1.23	1.38	1.53	1.68	1.83	1.98	2.13	2.28
	Y	0	0	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8	0.84	0.858	0.88

Таблиця 2.2 – Дані спостережень (завдання 2)

№ варіанту	Змінні	Дані спостережень																				
1	X ₁	3	3	5	5	1	2	2	4	6	3	3	4	2	4	4	3	5	6	7	7	8
	X ₂	12	12	20	20	4	8	8	16	24	12	12	16	8	16	16	12	20	24	28	28	32
	X ₃	36	45	69	73	21	33	33	57	81	45	45	57	33	57	57	45	69	81	93	93	105
	Y	60.38	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92	12.3	80	26.4	13,2	95	35.02	14	10.2	29.05	18.23	91	50	17
2	X ₁	5	4	7	9	3	4	4	6	8	5	5	6	4	6	6	5	7	8	9	9	10
	X ₂	20	16	28	36	12	16	16	24	32	20	20	24	16	24	24	20	28	32	36	36	40
	X ₃	60	57	93	121	45	57	57	81	105	69	69	81	57	81	81	69	93	105	117	117	129
	Y	95	35	14	10.2	29.05	18	91	50	17	14	18	100	17.1	60.38	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92
3	X ₁	1	4	3	3	6	3	6	2	4	1	1	2	5	2	2	1	3	4	5	5	6
	X ₂	4	16	12	12	24	12	24	8	16	4	4	8	20	8	8	4	12	16	20	20	24
	X ₃	12	48	36	36	72	36	72	24	48	12	12	24	60	24	24	12	36	48	60	60	72
	Y	52.1	50	92	12.3	80	26.4	13,2	95	35.02	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92	12.3	80	50	17	14
4	X ₁	6	3	3	4	2	4	4	3	6	3	3	4	7	4	4	3	6	9	13	7	8
	X ₂	24	12	12	16	8	16	16	12	24	12	12	16	28	16	16	12	24	36	52	28	32
	X ₃	81	45	45	57	33	57	57	45	81	45	45	57	93	57	57	45	72	108	156	84	96
	Y	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92	12.3	80	20.08	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92	12.3	80	26.4	13,2	95	35.02

Продовження таблиці 2.2 –

№ варіанту	Змінні	Дані спостережень																				
5	X ₁	7	8	2	5	5	6	4	2	4	4	7	5	1	2	8	2	2	4	6	3	3
	X ₂	28	32	8	20	20	24	16	8	16	16	28	20	4	8	32	8	8	16	24	12	12
	X ₃	93	105	33	69	69	81	57	33	57	57	93	73	21	33	105	33	33	57	81	45	45
	Y	57	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	89	52.1	50	92	12.3	80	20.08	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92
6	X ₁	9	10	4	7	7	8	6	4	6	6	9	9	3	4	10	4	4	6	8	5	5
	X ₂	36	40	16	28	28	32	24	16	24	24	36	36	12	16	40	16	16	24	32	20	20
	X ₃	117	129	57	93	93	105	81	57	81	81	117	121	45	57	129	57	57	81	105	69	69
	Y	52.1	50	92	12.3	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	26.4	13,2	95	35.02	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	19.05
7	X ₁	5	6	6	3	3	4	2	5	2	2	5	3	6	3	12	3	6	2	4	1	1
	X ₂	20	24	24	12	12	16	8	20	8	8	20	12	24	12	48	12	24	8	16	4	4
	X ₃	60	72	72	36	36	48	24	60	24	24	60	36	72	36	144	36	72	24	48	12	12
	Y	35.02	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92	12.3	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	89	52.1	81.23	105.02	69.13
8	X ₁	7	8	2	5	5	11	4	7	4	4	13	4	2	4	4	4	4	3	6	3	3
	X ₂	28	32	8	20	20	44	16	28	16	16	52	16	8	16	16	16	16	12	24	12	12
	X ₃	84	96	24	60	60	132	57	93	57	57	156	57	33	57	57	57	57	45	81	45	45
	Y	35.02	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	19.05	12.3	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	80	26.4	13,2	95	35.02

Продовження таблиці 2.2 –

№ варіанту	Змінні	Дані спостережень																				
9	X ₁	3	10	4	7	1	2	0	3	0	6	3	1	4	9	6	6	5	5	8	5	5
	X ₂	12	40	16	28	4	8	0	12	0	24	12	4	16	36	24	24	20	20	32	20	20
	X ₃	45	129	57	93	12	24	0	36	0	72	36	12	57	121	81	81	69	69	105	69	69
	Y	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	80	26.4	12.3	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	80	20.08	19.35	59.3	78.19
10	X ₁	2	4	4	7	3	4	2	6	2	2	11	2	0	2	6	5	2	6	4	1	7
	X ₂	8	16	16	28	12	16	8	24	8	8	44	8	0	8	24	20	8	24	16	4	28
	X ₃	33	57	57	93	45	57	33	72	24	24	132	24	0	24	72	60	24	72	48	12	84
	Y	69.13	69	81.02	57.09	81.1	80	26.4	13,2	95	35.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	80	26.4	13,2	95	35.02	88.02
11	X ₁	4	6	6	9	2	6	2	9	3	3	3	5	3	4	2	4	4	8	6	3	3
	X ₂	16	24	24	36	8	24	8	36	12	12	12	20	12	16	8	16	16	32	24	12	12
	X ₃	57	81	81	117	33	81	33	117	45	36	45	69	45	57	33	57	57	105	81	45	36
	Y	95	35.02	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	92	19.05	12.3	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	52.1	81.23	105.02
12	X ₁	5	2	2	5	4	8	4	11	5	5	4	7	2	5	5	6	4	4	2	5	5
	X ₂	20	8	8	20	16	32	16	44	20	20	16	28	8	20	20	24	16	16	8	20	20
	X ₃	60	24	24	60	57	105	57	141	69	60	57	93	33	69	69	81	48	48	24	60	69
	Y	19.05	12.3	81.23	105.02	69.13	69	81.02	57.09	81.1	81.02	57.09	26.4	13,2	95	35.02	14.02	19.35	12.3	81.23	105.02	17.06

Приклад виконання завдань практичної роботи засобами Mathcad

Інтерполяція за формулами Ньютона

ORIGIN := 0 M := 6

X :=

	0
0	0
1	0.4
2	0.6
3	0.7
4	0.8
5	0.9
6	1

Y :=

	0
0	0
1	0
2	0.01
3	0.03
4	0.06
5	0.13
6	0.37

Ступінь поліномів Ньютона N := length(X) = 7

Побудова матриці кінцевих різниць порядків 1,2,...,M:

```

D(X,Y,M) :=
| N ← length(Y)
| for i ∈ 0 .. N - 2
|   Δi,0 ← Yi+1 - Yi
|   for j ∈ 1 .. M - 1
|     for i ∈ 0 .. N - 2 - j
|       Δi,j ← Δi+1,j-1 - Δi,j-1
|   Δ

```

Δ := D(X,Y,M)

Рисунок 2.1 – Лістинг програми в Mathcad для виконання інтерполяції за формулами Ньютона

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.03 & 0.04 \\ 0.01 & 0.01 & 0 & 0.03 & 0.07 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0.03 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.04 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0.17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Реалізація першої формули Ньютона для заданого x за відомою матрицею кінцевих різниць Δ (використовується лише перша відома точка):

$$P_1(x, X, Y, \Delta) := \left(\begin{array}{l} h \leftarrow X_1 - X_0 \quad p \leftarrow Y_0 \quad nf \leftarrow 1 \quad q \leftarrow \frac{x - X_0}{h} \quad qp \leftarrow q \\ \text{for } j \in 1 \dots \text{cols}(\Delta) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + \frac{\Delta_{0,j-1}}{nf} \cdot qp \\ nf \leftarrow nf \cdot (j + 1) \\ qp \leftarrow qp \cdot (q - j) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right)$$

Реалізація другої формули Ньютона для заданого x за відомою матрицею кінцевих різниць Δ (використовується лише остання відома точка):

$$P_2(x, X, Y, \Delta) := \left(\begin{array}{l} N \leftarrow \text{last}(X) \quad h \leftarrow X_N - X_{N-1} \quad p \leftarrow Y_N \quad nf \leftarrow 1 \quad q \leftarrow \frac{x - X_N}{h} \quad qp \leftarrow q \\ \text{for } j \in 1 \dots \text{cols}(\Delta) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + \frac{\Delta_{N-j,j-1}}{nf} \cdot qp \\ nf \leftarrow nf \cdot (j + 1) \\ qp \leftarrow qp \cdot (q - j) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right)$$

Рисунок 2.2 – Продовження лістингу програми в Mathcad для виконання інтерполяції за формулами Ньютона

Для порівняння виконуємо реалізацію за тими ж даними звичайного канонічного полінома:

$$i := 0..last(X) \quad j := 0..last(X) \quad C_{i,j} := (X_i)^j \quad G := C^{-1} \cdot Y$$

$$P_0(x, G) := \begin{cases} p \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..last(G) \\ \quad p \leftarrow p + G_i \cdot x^i \\ p \end{cases}$$

Побудова 2 поліномів Ньютона та канонічного полінома у межах зміни X із заданим шагом dx

$$dx := 0.1 \quad x := X_0, X_0 + dx..X_{last(X)} \quad i := 0..last(X)$$

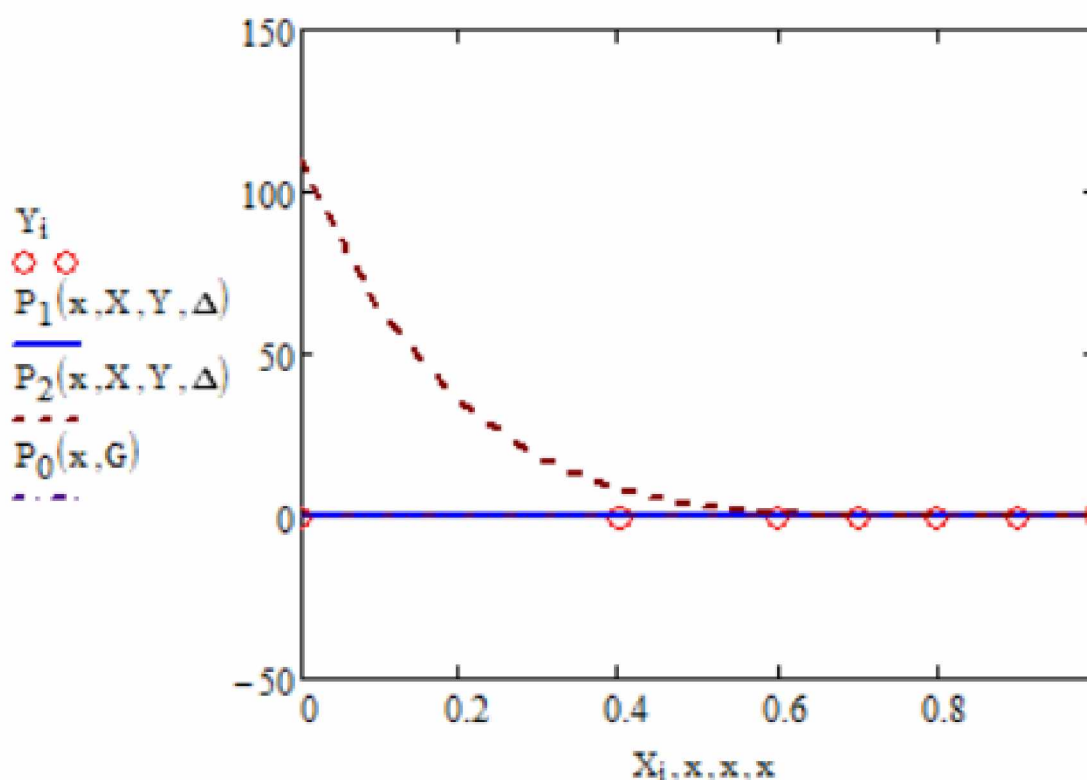


Рисунок 2.3 – Продовження лістингу програми в Mathcad для виконання інтерполяції за формулами Ньютона

Форматування масиву спостережувальних даних

Data :=

	0	1
0	2	27
1	3	...

$j := 0.. \text{cols}(\text{Data}) - 2$

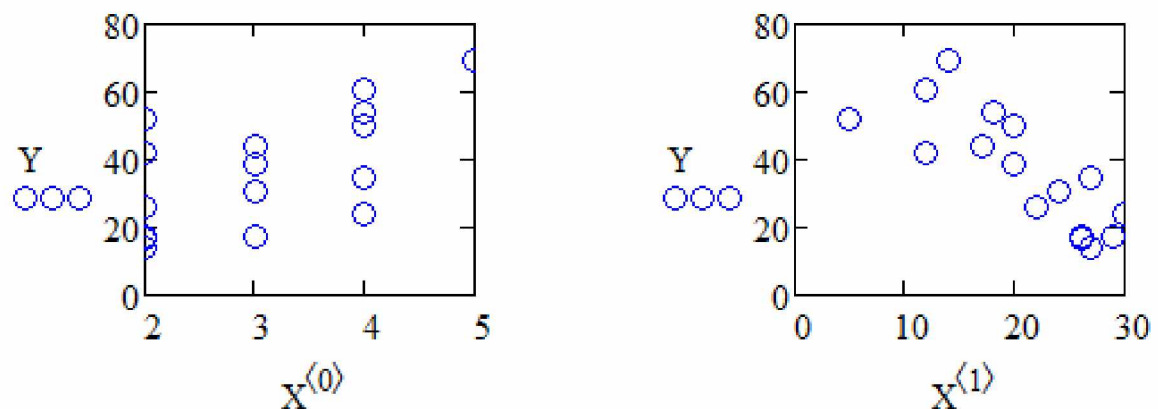
$X^{(j)} := \text{Data}^{(j)}$

$Y := \text{Data}^{(\text{cols}(\text{Data})-1)}$

$X^{(0)} =$		0	$X^{(1)} =$		0	$Y =$		0
	0	2		0	27		0	14.01
	1	3		1	29		1	17.01
	2	4		2	18		2	53.99
	3	3		3	17		3	43.83
	4	4		4	27		4	34.72
	5	3		5	24		5	30.92
	6	4		6	30		6	24.19
	7	3		7	20		7	38.55
	8	2		8	12		8	41.69
	9	2		9	26		9	16.65
	10	5		10	14		10	69.34
	11	2		11	22		11	25.92
	12	2		12	5		12	51.83
	13	4		13	12		13	60.58
	14	4		14	20		14	50
	15	2		15	26		15	17.1

Рисунок 2.4 – Формування масиву за даними спостережень в Mathcad для апроксимації функціональної залежності

Візуальне спостереження залежності вихідної змінної від вхідних параметрів:



Формування гіпотези про вид функціональної залежності:

$$\text{fun}(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix} \quad k := 3$$

$$f(x, b) := \begin{cases} a \leftarrow \text{fun}(x)_0 \\ \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad a \leftarrow a + b_i \cdot \text{fun}(x)_i \\ a \end{cases}$$

Оцінка значень параметрів функціональної залежності за МНК (метод найменших квадратів)

$$i := 0.. \text{rows}(\text{Data}) - 1$$

Формування матриці для обчислення параметрів:

$$\text{Matrix_X}_i,0 := 1$$

$$\text{Matrix_X}_i,1 := X_{i,0}$$

$$\text{Matrix_X}_i,2 := (X_{i,1})^2$$

Рисунок 2.5 – Лістинг програми в Mathcad апроксимації функціональної залежності за даними спостережень

$$\text{Matrix_X}^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 729 & 841 & 324 & 289 & 729 & 576 & 900 & 400 & 144 & \dots \end{array}$$

Розрахунок параметрів функціональної залежності:

$$\text{coef_b} := (\text{Matrix_X}^T \cdot \text{Matrix_X})^{-1} \cdot \text{Matrix_X}^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 31.187 \\ 9.528 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$

Розрахунок значень вихідної змінної за функціональною залежністю:

$$f\left[\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{coef_b}\right]^T = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 14.901 & 18.846 & 54.147 & 46.364 & 33.957 & \dots \end{array}$$

Кількість спостережень: $n := \text{rows}(\text{Data})$

Розрахунок критерію НМК:

$$K_{\text{rit}} := \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left[\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{coef_b}\right]_i - Y_i \right]^2 = 37.739$$

Кореляційно-регресійний аналіз знайденої функціональної залежності

Розрахунок індексу кореляції:

$$\sigma_{\text{fact}} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left[\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{coef_b}\right]_i - \text{mean}(Y) \right]^2 = 294.128$$

$$\sigma_{\text{zag}} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - \text{mean}(Y))^2 = 294.51$$

Рисунок 2.6 – Продовження лістингу програми в Mathcad апроксимації функціональної залежності за даними спостережень

$$\text{Індекс кореляції: } \underline{R} := \sqrt{\frac{\sigma_{\text{fact}}}{\sigma_{\text{zag}}}} = 0.999$$

Індекс кореляції показує, що (за шкалою Чеддока) зв'язок між вихідною змінною у та множиною вхідних змінних х є суттєвим.

$$\text{Індекс детермінації: } R^2 = 0.999$$

Індекс детермінації показує, що 99% загальної варіації вихідної змінною у пояснюється факторами х.

Розрахунок індексу кореляції (матричний спосіб):

$$RR := \sqrt{\frac{[\text{koef_b} \cdot (\text{Matrix_X}^T \cdot Y)] - n \cdot \text{mean}(Y)^2}{Y^T \cdot Y - n \cdot \text{mean}(Y)^2}} = 0.998$$

Істотність індексу кореляції:

$$\underline{F} := \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - k - 1}{k}$$

if($F > qF(0.95, k, n - k - 1)$, "YES", "NO") = "YES"

Індекс кореляції є істотним.

Дослідження значущості параметрів функціональної залежності

$$j := 0..k - 1$$

$$d_j := \left[(\text{Matrix_X}^T \cdot \text{Matrix_X})^{-1} \right]_{j,j}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0.952 \\ 0.067 \\ 9.125 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$s_{kv} := \frac{1}{n - k - 1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[f \left[\begin{pmatrix} X^{(0)} \\ X^{(1)} \end{pmatrix}, \text{koef_b} \right]_i - Y_i \right]^2 = 3.145$$

Рисунок 2.7 – Продовження лістингу програми в Mathcad апроксимації функціональної залежності за даними спостережень

$$t_j := \frac{|koef_b_j|}{\sqrt{d_j \cdot s_kv}} \quad t = \begin{pmatrix} 18.023 \\ 20.702 \\ 29.427 \end{pmatrix}$$

$$if(t_j > qt(0.95, n - 2), "YES", "NO") = \begin{pmatrix} "YES" \\ "YES" \\ "YES" \end{pmatrix}$$

Встановлено, що всі параметри функціональної залежності є значущими.

Визначення довірчих інтервалів параметрів функціональної залежності

$$b_min_j := koef_b_j - qt(0.95, n - 2) \cdot \sqrt{d_j \cdot s_kv}$$

$$b_max_j := koef_b_j + qt(0.95, n - 2) \cdot \sqrt{d_j \cdot s_kv}$$

$$b_min = \begin{pmatrix} 28.14 \\ 8.717 \\ -0.053 \end{pmatrix} \quad koef_b = \begin{pmatrix} 31.187 \\ 9.528 \\ -0.05 \end{pmatrix} \quad b_max = \begin{pmatrix} 34.235 \\ 10.338 \\ -0.047 \end{pmatrix}$$

З огляду на отримані результати, найбільш неточним є визначений перший параметр, а найбільш точним виявився останній параметр.

Рисунок 2.8 – Продовження лістингу програми в Mathcad апроксимації функціональної залежності за даними спостережень

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та зазначається завдання з відповідним варіантом
2. Наводиться лістинг програми в Mathcad
3. Висновки за результатами практичної роботи

Запитання для самоперевірки

1. Надайте визначення інтерполяції даних та її класифікацію.
2. Поясніть алгоритм виконання інтерполяції даних за допомогою виразів Ньютона.
3. Визначте особливості виконання інтерполяції за формулами Ньютона.
4. У яких випадках розв'язок задачі апроксимації не можливий?
5. За якими показниками дослідник визначає вид апроксимуючої функції?

6. Які обмеження впливають на той чи інший вид функціональної залежності в задачах апроксимації?
7. Назвіть критерії визначення параметрів функціональної залежності.
8. Визначте головну мету кореляційно-регресійного аналізу.
9. Які критерії оцінки значущості параметрів функціональної залежності є? Охарактеризуйте їх.
10. Який критерій дозволяє оцінити істотність індексу кореляції?
11. Яка інформація надається при наявності довірчого інтервалу?

Практичне заняття. Тема: ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ПЛАНУВАННЯ

Мета: Отримати практичні навички застосування методів математичного програмування при розв'язанні задач планування.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Знайти найкоротший шлях з пункту А до пункту Б. Схема транспортної мережі представлена на рис. 3.1 із зазначеними відстанями між об'єктів (табл. 3.1).
2. Визначити максимальний потік для транспортної мережі. Схема транспортної мережі представлена на рис. 3.1 із зазначеною пропускну здатністю ділянок мережі (табл. 3.1).

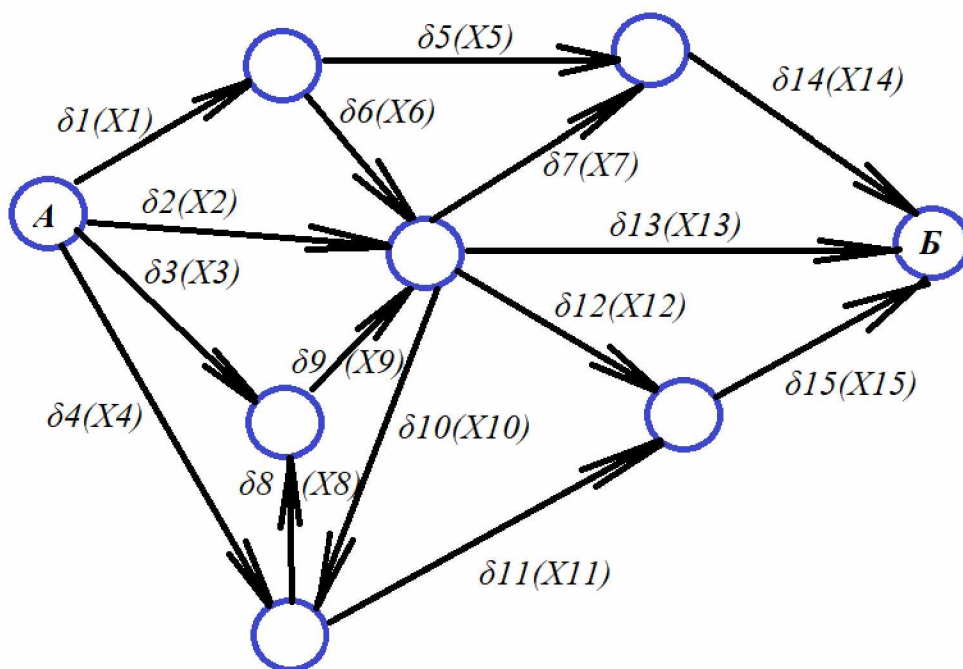


Рисунок 3.1 – Транспортна мережа

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

Варіант	Показник	Дані														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Відстані між об'єктів δ_i	3	4	4	7	8	9	5	9	7	5	3	4	5	9	3
	Пропускна здатність ділянок X_i	10	4	10	13	15	17	9	17	13	9	5	7	9	17	5
2	Відстані між об'єктів δ_i	5	6	6	9	10	11	7	11	9	7	5	6	7	11	5
	Пропускна здатність ділянок X_i	9	6	10	17	19	21	13	21	17	13	9	11	13	21	9
3	Відстані між об'єктів δ_i	7	8	4	11	12	13	9	13	11	9	7	8	9	13	7
	Пропускна здатність ділянок X_i	8	8	5	16	18	20	12	20	16	12	8	10	12	20	8
4	Відстані між об'єктів δ_i	4	5	1	8	9	10	6	10	8	6	4	5	6	10	4
	Пропускна здатність ділянок X_i	7	10	5	15	17	19	11	19	15	11	7	9	11	19	7

Продовження таблиці 3.1 –

Варіант	Показник	Дані														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	Відстані між об'єктів δ_i	6	7	4	10	11	12	8	12	10	8	6	7	8	12	6
	Пропускна здатність ділянок X_i	6	7	9	14	16	18	10	18	14	10	6	8	10	18	6
6	Відстані між об'єктів δ_i	3	4	5	7	8	9	5	9	7	5	3	4	5	9	3
	Пропускна здатність ділянок X_i	5	4	11	16	18	20	12	20	16	12	8	10	12	20	8
7	Відстані між об'єктів δ_i	8	9	6	12	13	14	10	14	12	10	8	9	10	14	8
	Пропускна здатність ділянок X_i	4	6	8	17	19	21	13	21	17	13	9	11	13	21	9
8	Відстані між об'єктів δ_i	4	5	2	8	9	10	6	10	8	6	4	5	6	10	4
	Пропускна здатність ділянок X_i	3	8	7	18	21	24	12	24	18	12	6	9	12	24	6

Приклад виконання завдань практичної роботи засобами Mathcad

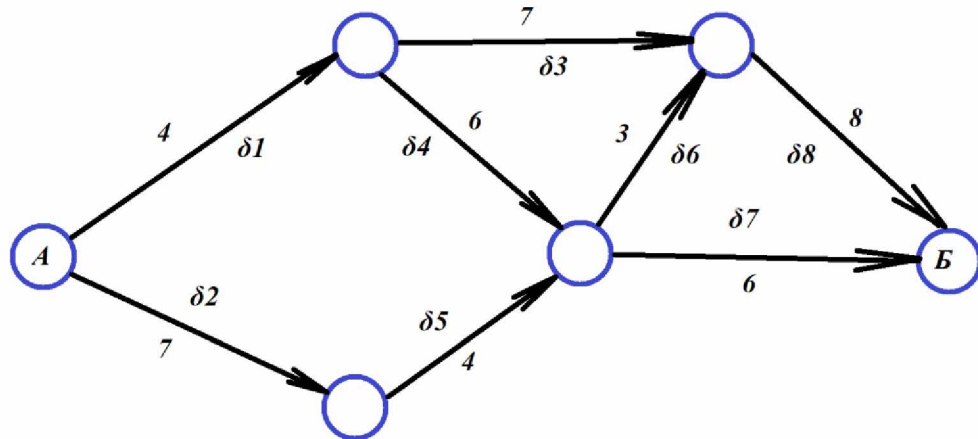


Рисунок 3.2 – Приклад транспортної мережі з відстанями між об'єктами

ORIGIN := 1

Цільова функція:

$$f(\delta) := 4\delta_1 + 7\delta_2 + 7\delta_3 + 6\delta_4 + 4\delta_5 + 3\delta_6 + 6\delta_7 + 8\delta_8$$

$$\delta_1 := 1 \quad \delta_2 := 1 \quad \delta_3 := 1 \quad \delta_4 := 1 \quad \delta_5 := 1 \quad \delta_6 := 1 \quad \delta_7 := 1 \quad \delta_8 := 1$$

Given

$$\delta_1 \geq 0 \quad \delta_2 \geq 0 \quad \delta_3 \geq 0 \quad \delta_4 \geq 0 \quad \delta_5 \geq 0 \quad \delta_6 \geq 0 \quad \delta_7 \geq 0 \quad \delta_8 \geq 0$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 1 \quad \delta_1 = \delta_3 + \delta_4 \quad \delta_2 = \delta_5 \quad \delta_4 + \delta_5 = \delta_6 + \delta_7$$

$$\delta_3 + \delta_6 = \delta_8 \quad \delta_7 + \delta_8 = 1$$

Визначаємо найкоротший шлях від пункту А до пункту Б:

$$P := \text{Minimize}(f, \delta)$$

$$P^T = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

Найкоротший шлях від пункту А до пункту Б становлять ребра:

$$\delta_1, \delta_4, \delta_7$$

Рисунок 3.3 – Лістинг програми в Mathcad для визначення найкоротшого шляху в транспортній мережі

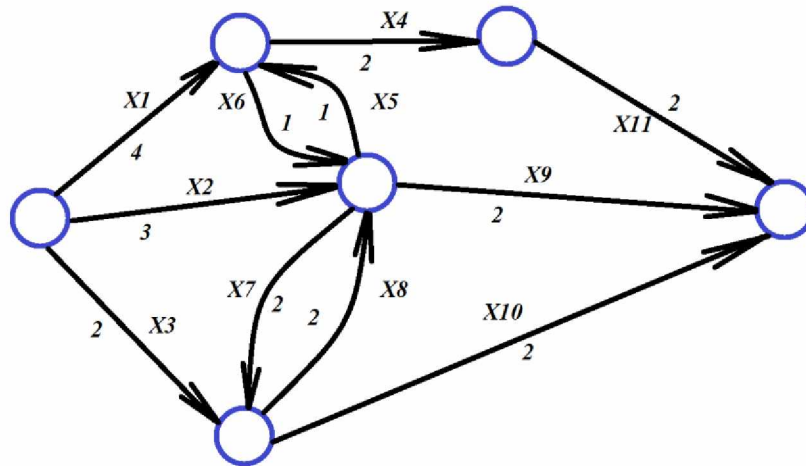


Рисунок 3.4 – Приклад транспортної мережі з максимальною пропускнуою здатністю ділянок

ORIGIN := 1

Цільова функція: f(x) := x₉ + x₁₀ + x₁₁

i := 1..11

x_i := 1

Given

0 ≤ x₁ ≤ 4 0 ≤ x₂ ≤ 3 0 ≤ x₃ ≤ 2 0 ≤ x₄ ≤ 2 0 ≤ x₅ ≤ 1

0 ≤ x₆ ≤ 1 0 ≤ x₇ ≤ 2 0 ≤ x₈ ≤ 2 0 ≤ x₉ ≤ 2 0 ≤ x₁₀ ≤ 2

0 ≤ x₁₁ ≤ 5

x₁ + x₅ = x₄ + x₆ x₂ + x₆ + x₈ = x₅ + x₇ + x₉ x₄ = x₁₁

x₃ + x₇ = x₈ + x₁₀

Potik := Maximize(f, x)

f(Potik) = 6

Potik^T =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	...

-ребро мережі
-потік

Рисунок 3.5 – Лістинг програми в Mathcad для пошуку максимального потоку для транспортної мережі

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та зазначається завдання
2. Наводиться лістинг програми в Mathcad
3. Висновки за результатами практичної роботи

Запитання для самоперевірки

1. Поняття сіткової моделі та її основні елементи.
2. Визначте основні правила побудови сіткових графіків.
3. Надайте визначення шляху та критичного шляху.
4. Яким чином здійснюється розрахунок тимчасових параметрів сіткових графіків?
5. Визначте алгоритм пошуку максимального потоку в сітках. Поясніть кожен етап.

Практичне заняття. Тема: ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕРЕЖ ПЕТРІ

Мета: Отримати практичні навички аналітичного моделювання під час визначення основних можливостей мереж Петрі.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Визначити результат запуску послідовності переходів $T_3-T_2-T_1-T_2$ та скласти матриці входів і виходів для мережі Петрі (рис.4.1). Виконати побудову дерева досяжності для даної мережі та дослідити її основні властивості.

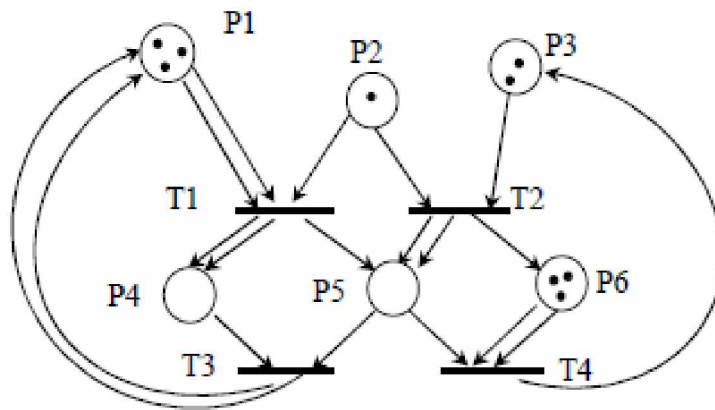


Рисунок 4.1 – Мережа Петрі до завдання 1

2. Скласти формалізовану модель системи на основі мереж Петрі: завдання поступають на обладнання у середньому одна машина у час. Розподіл величини інтервалу між ними експоненціальний. При нормальному режимі роботи завдання виконуються в порядку їхнього надходження. Час виконання завдання нормально розподілений з математичним сподіванням 0,5 години і середньоквадратичним відхиленням 0,1 година. Перед виконанням завдання відбувається наладка обладнання, час здійснення якої розподілений рівномірно на інтервалі від 0,2 до 0,5 години. Завдання, які виконані на обладнанні, направляються в інші відділи цеху. Електрична

машина страждає від пошкоджень, при яких він не може продовжувати виконання завдання. Інтервали між поломками розподілені нормально з математичним сподіванням 20 годин і середньоквадратичним відхиленням 2 години. При пошкодженні виконуване завдання виймається з обладнання і поміщається в початок черги завдань до нього. Виконання завдання відновлюється з того місця, на якому воно було перервано. Коли електрична машина ламається, починається процес усунення пошкодження, що складається із трьох фаз. Тривалість кожної фази має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням, рівним $3/4$ години. Оскільки загальна тривалість усунення пошкодження є сумою незалежних випадкових величин, що мають експоненціальний закон розподілу з однаковими параметрами, можна вважати, що ця випадкова величина розподілена за законом Ерланга. Дослідити властивості отриманої мережі Петрі матричним методом та скласти матриці входів і виходів. Побудувати дерево досяжності для розробленої мережі Петрі. Визначити досяжність маркування, що відповідає стану системи при працюючому та при зламаному обладнанні.

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та зазначається завдання
2. Зазначається поетапне виконання завдань. Формування мережі Петрі.
3. Висновки за результатами практичної роботи

Запитання для самоперевірки

1. Надайте визначення мережі Петрі та визначте, з яких елементів вона складається?
2. Визначте основні умови запуску переходів та поясніть їх. Яким чином виконується запуск переходу?
3. Визначте яким чином складаються матриці входів, виходів та змінювань?
4. Перерахуйте основні властивості мереж Петрі та дайте пояснення.
5. Яким чином виконується дослідження збереженості мереж Петрі?
6. Яким чином виконується дослідження досяжності мереж Петрі?
7. Що собою представляє дерево досяжності мережі Петрі? На дайте алгоритм складання.
8. Поясніть, які обмеження є при застосуванні дерева досяжності при дослідженні мереж Петрі?
9. Яким чином здійснюється дослідження досяжності маркування мережі Петрі?
10. Яким чином визначити рівень активності переходу мережі Петрі?

Практичне заняття. Тема: СКЛАДАННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕРЕЖІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ІМІТАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

Мета: Отримати практичні навички імітаційного моделювання під час дослідження алгоритму мережі масового обслуговування.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Виконати дослідження мережі масового обслуговування (рис. 5.1) із застосуванням імітаційних методів моделювання. Відомо, що показники ефективності мережі є ймовірність відмови в обслуговуванні, середні довжини черг в накопичувачах та середній час очікування в чергах. Розробити алгоритм реалізації мережі масового обслуговування за допомогою обраної на ваш розсуд мови програмування (C++/C#, Java, PHP, Python) та виконати його дослідження за наступних умов:
 - а) вхідних значень параметрів λ , μ , l ;
 - б) зміненому в декілька раз параметрі λ ;
 - в) зміненому в декілька раз параметрі μ ;
 - г) зміненому в декілька раз параметрі l ;
 - д) збільшеному в два рази часу моделювання;Надати результати досліджень та виконати їх порівняння.

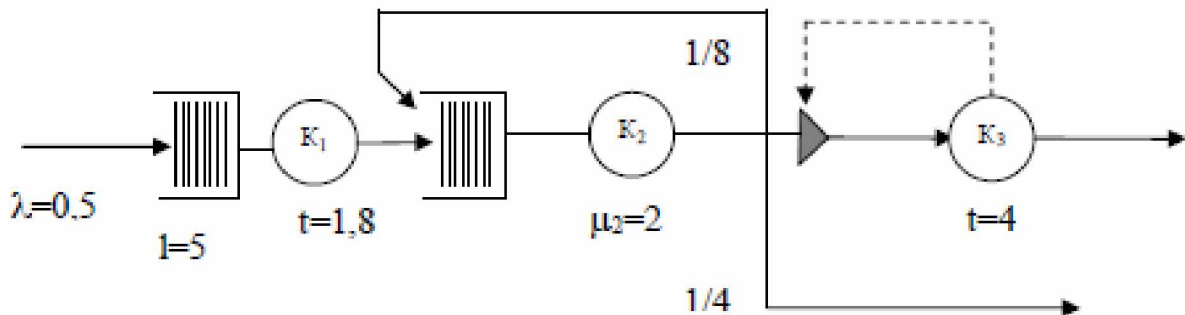


Рисунок 5.1 – Мережа масового обслуговування

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та зазначається завдання
2. Наводиться програмна реалізація алгоритму з відповідними поясненнями
3. Зазначаються результати дослідження мережі
4. Висновки за результатами практичної роботи

Запитання для самоперевірки

1. Надайте пояснення мережі масового обслуговування. Які властивості вона має?
2. Які способи формалізації мереж масового обслуговування? Надайте їх характеристику.

3. Визначте з яких основних елементів система масового обслуговування складається?
4. Які параметри застосовують в мережі масового обслуговування?
5. Для яких системи необхідна формалізації засобами мереж масового обслуговування?
6. При яких умовах застосовуються тільки імітаційні методи реалізації системи масового обслуговування?
7. Визначте етапи створення алгоритму імітації процесів функціонування дискретних систем?
8. Які способи створення алгоритму просування стану дискретних моделей в залежності від часу існують?
9. Надайте пояснення об'єктно-орієнтованого підходу до побудови алгоритму імітації мережі масового обслуговування.

Практичне заняття. Тема: СКЛАДАННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕРЕЖІ ПЕТРІ ІМІТАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

Мета: Отримати практичні навички імітаційного моделювання під час дослідження алгоритму мережі Петрі.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. У відповідності до схеми мережі масового обслуговування (рис. 5.1) з практичної роботи №5 розробити мережу Петрі. Виконати складання та реалізацію алгоритму імітації отриманої мережі за допомогою обраної на ваш розсуд мови програмування (C++/C#, Java, PHP, Python) та перевірити її за умови зміни вхідних параметрів моделі. За результатами отриманих вихідних характеристик здійснити порівняльний аналіз за умови використання різноманітних способів формалізації мережі Петрі.

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та зазначається завдання
2. Наводиться розроблена мережа Петрі
3. Наводиться програмна реалізація алгоритму імітації з відповідними поясненнями та результати перевірки правильної його роботи
4. Зазначаються результати дослідження мережі
5. Висновки за результатами практичної роботи

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть елементи імітаційної моделі мережі Петрі.
2. Які способи формалізації мереж Петрі існують? Надайте їх характеристику.
3. Яким чином зазначаються матриці входів і виходів в імітаційній моделі мережі Петрі?

4. Яким чином перевіряється умова запуску j -переходу мережі Петрі?
5. За допомогою якої змінної виконується опис стану мережі Петрі?
6. Надайте алгоритм дій реалізації переходу мережі Петрі з часовою затримкою?
7. Проаналізуйте відмінності реалізації багатоканального переходу мережі Петрі від одно канального?
8. Надайте алгоритм імітації простої мережі Петрі, з конфліктними та багатоканальними переходами?
9. Яким чином виконується реалізація неявного пріоритету запуску конфліктних переходів мережі Петрі?
10. Надайте пояснення об'єктно-орієнтованого підходу до побудови алгоритму імітації мереж Петрі.

Практичне заняття. Тема: ПЛАНУВАННЯ ТА ПРОВЕДЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ЗА ДОПОМОГОЮ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

Мета: Отримати практичні навички в плануванні та проведенні експериментів на основі імітаційної моделі.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Визначити розмір вибірки відгуку імітаційної моделі, що потрібний для забезпечення точності 3 за умови довірчої ймовірності 0,95. Закон розподілу відгуку імітаційної моделі є нормальним і його дисперсія дорівнює 126.
2. Визначити розмір вибірки відгуку імітаційної моделі, що потрібний для забезпечення точності 0,05 за умови довірчої ймовірності 0,95. Закон розподілу відгуку імітаційної моделі є невизначеним і його середньоквадратичне відхилення дорівнює 0,05.
3. Здійснити тактичне і стратегічне планування та виконати експеримент із застосуванням імітаційної моделі системи, яка реалізована в практичних роботах №5 або №6, на основі розробленого плану. За результатами виконати побудову регресійного рівняння відгуку імітаційної моделі. Характер відгуку моделі та план експерименту наводяться в табл. 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані для завдання №3

Варіант	Характер відгуку	План експерименту
1	Вірогідність відмови	Повний факторний експеримент
2	Середня довжина черги	Дробовий факторний експеримент
3	Середній час очікування	Повний факторний експеримент
4	Вірогідність відмови	Дробовий факторний експеримент
5	Середня довжина черги	Повний факторний експеримент
6	Середній час очікування	Дробовий факторний експеримент

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи
2. Наводяться завдання 1,2 та їх розв'язання
3. Зазначається завдання 3 та наводиться імітаційна модель мережі масового обслуговування або мережі Петрі
4. Наводиться тактичний та стратегічний плани експерименту
5. Зазначаються результати виконання експерименту
6. Наводиться отримане регресійне рівняння відгуку імітаційної моделі та результати дослідження за ним
7. Висновки з практичної роботи щодо проведення експерименту, отриманих результатів моделювання та їх точність.

Запитання для самоперевірки

1. Яким чином здійснюється визначення структури експерименту?
2. Що собою представляють якісні і кількісні фактори?
3. Наведіть основні задачі тактичного та стратегічного планування експерименту?
4. Яким чином можна побудувати план повного факторного експерименту у випадку наявності якісних факторів?
5. Яким чином можна побудувати план повного факторного експерименту у випадку наявності кількісних факторів?
6. Яким чином можна розробити план дробового факторного експерименту?
7. Наведіть алгоритм проведення дисперсійного аналізу результатів факторного експерименту.
8. Яким чином здійснюється складання регресійного рівняння відгуку моделі?
9. Наведіть алгоритм проведення регресійного аналізу результатів факторного експерименту.
10. Дайте визначення відтвореності експерименту?
11. Надайте алгоритм оцінки значущості коефіцієнту регресії?
12. Визначте критерії оцінки адекватності регресійного рівняння результатам експерименту?
13. Поясніть, які висновки щодо функціонування моделі можна зробити з регресійного рівняння її відгуку?

Практичне заняття. Тема: ВИЗНАЧЕННЯ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДІВ САМООРГАНІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ

Мета: Отримати практичні навички застосування методів самоорганізації за умови визначення оптимальної моделі складності.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Розробити програму для пошуку моделі оптимальної складності використовуючи однорядний та багаторядний алгоритми самоорганізації моделей, критерій регулярності, критерій мінімуму зсуву або комбінований критерій, а також заданий клас опорних функцій, за умови використання одної функції виду з:

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_5x^5, \quad (7.1)$$

$$y = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \cos x + \dots + b_{2n-1} \sin^n x + b_{2n} \cos^n x, \quad (7.2)$$

$$y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} + b_2 \frac{1}{x^2} + \dots + b_n \frac{1}{x^n}, \quad (7.3)$$

за даними спостережень (табл. 8.1) відносно заданих функцій. Виконати перевірку розробленої програми за наступних умов:

- а) дані точно відповідають заданій функції;
- б) отримана модель оптимальної складності за заданими даними є точною відносно відомої функції;
- в) дані відповідають заданій функції із точністю 5% або 10%;
- г) отримана модель оптимальної складності за заданими даними відносно відомої функції із точністю 5% або 10%.

Таблиця 8.1 – Дані спостережень відносно заданих функцій

Варіант завдання відносно заданих рівнянь	Змінні	Дані спостережень							
1	x	1	5	9	13	17	21	25	29
	y	312.89	1612	4225	8043	12900	18560	24740	31070
	x	33	37	41	45	49	53	57	61
	y	37160	42510	46600	48820	48510	44960	37370	24910

Варіант завдання відносно заданих рівнянь	Змінні	Дані спостережень							
2	x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	2.8
	y	1.79	2.005	2.225	2.41	2.526	2.553	2.489	2.349
	x	3.2	3.6	4	4.4	4.8	5.2	5.6	6
	y	2.161	1.954	1.76	1.603	1.504	1.478	1.531	1.661
3	x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
	y	14	18.222	18	17.216	16.444	15.778	15.219	14.749
	x	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5
	y	14.352	14.014	13.722	13.469	13.248	13.052	12.879	12.724

Зміст звіту

1. Вказується тема і мета практичної роботи та наводиться завдання
2. Наводиться лістинг розробленої програми пошуку моделі оптимальної складності
3. Зазначаються результати виконання перевірки розробленого алгоритму згідно заданих умов
4. Зазначаються результати пошуку моделі оптимальної складності (графік внутрішнього та зовнішнього критерію в залежності від складності моделі; функцію з визначеними коефіцієнтами; таблиці заданих значень відгуку та розрахункових значень моделі)
5. Висновки з практичної роботи щодо отриманих результатів використання методів самоорганізації.

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть основну ідею самоорганізації моделей.
2. Поясніть застосування навчальної та перевіркової послідовностей даних.
3. Яким чином розділити таблицю даних на навчальну та перевірочну?
4. За якими факторами визначається складність моделі?
5. Яким чином визначити модель оптимальної складності?
6. Надайте визначення зовнішнього критерію та його класифікацію
7. Надайте визначення внутрішнього критерію. Яким чином він розраховується?
8. Яким чином визначається критерій регулярності?
9. Яким чином визначається критерій мінімуму зсуву?
10. Наведіть алгоритм однорядної самоорганізації моделі.
11. Наведіть алгоритм багаторядної самоорганізації моделі.
12. Поясніть, яким чином визначаються параметри моделі за табличними даними?